FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 1**

Prezime, ime, br. indeksa: ________________________________ **12.05.2019.**

PREDISPITNE OBAVEZE 1

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+1}{3n}\right)^{3n} = \underline{\sqrt{2e}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^2+1}\right) = \underline{\infty}$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2} = \underline{12}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{e^{x+5}} = \underline{0}$
- Zaokružiti tačne iskaze, za proizvoljne realne funkcije f, g i h, i $a,b\in\mathbb{R}$:

  1) $(xf(x))' = f'(x)$ **2)** $f(x)\equiv f(-x) \Rightarrow f'(x)\equiv f'(-x)$ **3)** $(f(\sin x))' = f'(x)\cos x$

  4) $(f\circ g)'(x) = (f'\circ g')(g(x))$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

  6) $\left(e^{f(x)}\right)' = \left(e^{f'(x)}\right)$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+c$
- Napisati jednačinu tangente na grafik diferencijabilne funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u tački x_0:

  $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$
- Funkcija $f(x) = \sin\dfrac{x-4}{x^2+Ax+1}$ je neprekidna u tački $x_0=1$ za $A\in \underline{\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$
- Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2+4\right|$ je diferencijabilna u tačkama $x\in \underline{\mathbb{R}}$
- Napisati prve izvode datih funkcija

  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+2x}$, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2+2x)-2e^{2x}(x+1)}{(x^2+2x)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2+x-1)}{(x^2+2x)^2}$

  $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = \cos(1-\sqrt{x})$, $g'(x) = -\sin(1-\sqrt{x})\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
- Stacionarne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$ su: $\underline{x_0=2}$
- Prava $y=2$ je leva horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ ako je (izraziti limesom): $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$
- Napisati formulu za razvoj funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u beskonačni Maklorenov red: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f'(0)}{k!}x^k$
- Napisati Lagranžovu funkciju za nalaženje uslovnih (vezanih) ekstrema funkcije $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^4+1}$ uz uslove $x+2y-3z=1$ i $\cos(x+y+z)=0$:

  $L(x,y,z;\lambda,\theta) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^4+1} + \lambda(x+2y-3z-1) + \theta(\cos(x+y+z))$
- Prvi parcijalni izvodi funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x^2y)-3y^2$ su

  $f_x(x,y) = \underline{2x\cos(x^2y)}$ $f_y(x,y) = \underline{x^2\cos(x^2y)-6y}$

ZADACI

1. Dat je rekurzivan niz $a_{n+1} = 4-\dfrac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$ i $a_1=1$. Dokazati da za svaki član niza a_n, $n\in\mathbb{N}$ važi $1\le a_n<4$, dokazati da niz konvergira, i zatim mu izračunati granicu.
2. Ispitati za koje $A,B\in\mathbb{R}$ je funkcija $f(x) = \begin{cases} B+\frac{\sin x - x}{x} & , x\in(-\infty,0) \\ A & , x\in[0,1] \\ \operatorname{arctg}\frac{2-2\sqrt{x}}{1-x} & , x\in(1,\infty)\end{cases}$ neprekidna na $\mathbb{R}$.
3. Naći jednačinu tangente na krivu $e^y = \ln(x+y)$ u njenoj tački preseka sa x-osom.
4. Koliko (najmanje) članova u razvoju funkcije $f(x)=\ln(1+x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi se vrednost broja $\ln(1.5)$ mogla izračunati sa greškom manjom od 0.02?

REŠENJA ZADATAKA - KOLOKVIJUM 1

1. Dat je rekurzivan niz $a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ i $a_1 = 1$. Dokazati da za svaki član niza a_n, $n \in \mathbb{N}$ važi $1 \leq a_n < 4$, dokazati da niz konvergira, i zatim mu izračunati granicu.

   Rešenje:

   (a) Relaciju $A(n): \ 1 \leq a_n < 4$ dokazujemo matematičkom indukcijom:

   (a.1) $A(1) : 1 \leq 1 < 4$ je tačno;

   (a.2) pretpostavimo da je $A(k) : 1 \leq a_k < 4$ je tačno;

   (a.3) koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo da je tačno i $A(k+1)$ jer je

   $$A(k+1): \ \ 1 \leq a_{k+1} < 4 \ \ \Leftrightarrow \ \ 1 \leq 4 - \frac{1}{a_k} < 4 \ \ \Leftrightarrow \ \ -3 \leq -\frac{1}{a_k} < 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ 3 \geq \frac{1}{a_k} > 0$$

   $$\Leftrightarrow \ \ 3a_k \geq 1 > 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ a_k \geq \frac{1}{3},$$

   što je tačno zbog induktivne pretpostavke $1 \leq a_k$.

   (b) Matematičkom indukcijom ćemo dokazati da niz je $a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1 = 1$ monotono rastući, iz čega će da sledi njegova konvergencija jer smo pod (a) dokazali da je ograničen. Dakle, dokazujemo $B(n): \ a_n \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (b.1) $B(1) : 1 \leq 3$ je tačno;

   (b.2) pretpostavimo da je $B(k) : a_k \leq a_{k+1}$ je tačno;

   (b.3) koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo da je tačno i $B(k+1)$ jer je

   $$B(k+1): \ \ a_{k+1} \leq a_{k+2} \ \ \Leftrightarrow \ \ 4 - \frac{1}{a_k} \leq 4 - \frac{1}{a_{k+1}} \ \ \Leftrightarrow \ \ \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{a_{k+1}} \ \ \Leftrightarrow \ \ a_k \leq a_{k+1},$$

   što je tačno zbog induktivne pretpostavke.

   (c) Dakle, niz konvergira, tj. $\exists A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, pri čemu je $A \in [1,4]$ zbog $1 \leq a_n < 4$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je

   $$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{a_n}\right) = 4 - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 4 - \frac{1}{A}$$

   $$\Leftrightarrow \ \ A = 4 - \frac{1}{A} \ \ \Leftrightarrow \ \ A^2 - 4A + 1 = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ A_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

   Pri tome $2 - \sqrt{3} \notin [1,4]$ i $2 + \sqrt{3} \in [1,4]$, te je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 + \sqrt{3}$.

2. Ispitati za koje $A, B \in \mathbb{R}$ je funkcija $f(x) = \begin{cases} B + \frac{\sin x - x}{x} & , \ x \in (-\infty, 0) \\ A & , \ x \in [0,1] \\ \operatorname{arctg} \frac{2-2\sqrt{x}}{1-x} & , \ x \in (1, \infty) \end{cases}$ neprekidna na $\mathbb{R}$.

   Rešenje: Izrazi kojima je funkcija f definisana su takvi da je funkcija f neprekidna u svim tačkama osim možda u 0 i 1.

   (1) $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \ \ \Leftrightarrow \ \ \lim_{x\to 0^-}\left(B + \frac{\sin x - x}{x}\right) = A$$

   $$\Leftrightarrow \ \ B + \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = A \ \ \Leftrightarrow \ \ B + \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} - 1 = A \ \ \Leftrightarrow \ \ B + 1 - 1 = A \ \ \Leftrightarrow \ \ B = A.$$

   (2) $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

   $$\Leftrightarrow \ \ A = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\frac{2 - 2\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\frac{2(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

   $$= \lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\frac{2}{1+\sqrt{x}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{1+1} = \frac{\pi}{4}.$$

   U konjunkciji uslova (1) i (2) dobijamo jedinstveno rešenje $A = B = \frac{\pi}{4}$.

3. Naći jednačinu tangente na krivu $e^y = \ln(x+y)$ u njenoj tački preseka sa x-osom.

   Rešenje: Tačka preseka sa x-osom je za $y = 0$ i:

$e^0 = \ln(x+0) \;\Leftrightarrow\; 1 = \ln x \;\Leftrightarrow\; x = e,$

dakle tačka $T(e,0)$. Kako je

$e^y = \ln(x+y) \;\Leftrightarrow\; e^{e^y} = x + y \;\Leftrightarrow\; x = e^{e^y} - y = g(y).$

Jednačina tangente na krivu u tački $y = 0$ je

$x = g'(0)y + g(0) - g'(0)\cdot 0,$

gde je

$g(0) = e^{e^0} - 0 = e,$

$g'(y) = e^{e^y}\cdot e^y - 1 = e^{e^y+1} - 1, \quad g'(0) = e^{e^0+1} - 1 = e^2 - 1,$

te jednačina tražene tangente glasi

$x = \left(e^2 - 1\right)y + e.$

4. Koliko (najmanje) članova u razvoju funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi se vrednost broja $\ln(1.5)$ mogla izračunati sa greškom manjom od 0.02?

Rešenje: Imamo $\ln(1.5) = \ln(1+0.5) = f(0.5)$, te posmatramo razvoj funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u tački $x = 0.5$. Kako je (vidi tablice)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1,1],$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ za neko } \xi \in (x,0),$$

to za $x = 0.5$ treba da bude

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < 0.02,$$

pri čemu za $f(x) = \ln(1+x)$ induktivno dobijamo

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4},$
$f^{(5)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}, \quad f^{(6)}(x) = -\frac{5!}{(1+x)^6}, \ \ldots$

odnosno

$$f^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x)^{2n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$f^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x)^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

Tako, za $\xi \in (0, 0.5)$, za sve $x \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$|r_n(0.5)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot 0.5^{n+1}\right| = \left|\frac{\pm\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!}\cdot 0.5^{n+1}\right| =$$
$$= \left|\frac{0.5^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\right| < \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)\cdot 1^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < 0.02,$$

pri čemu je

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < 0.02 \quad\Leftrightarrow\quad 50 < (n+1)2^{n+1}.$$

Kako je $a_n = (n+1)2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ rastući niz, rešenje zadatka je prvo $n \in \mathbb{N}$ za koje važi nejednakost $50 < (n+1)2^{n+1}$. Redom dobijamo $a_1 = 8 < 50$, $a_2 = 24 < 50$, $a_3 = 64 > 50$, te je za traženu aproksimaciju dovoljno uzeti $n = 3$, odnosno polinom 3-eg stepena.