FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 1**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **23.06.2020.**

PREDISPITNE OBAVEZE 1

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2+1}{2n^3-6n^2-1}\right)^2 =$ __________________ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} =$ __________________
- $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-1}} =$ __________________ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{\ln(x+5)} =$ __________________
- Zaokružiti tačne iskaze, za proizvoljne realne funkcije f, g i h:

  1) $(xf(x))' = f'(x)$ **2)** $f(x)\equiv f(-x) \Rightarrow f'(x)\equiv f'(-x)$ **3)** $(f(\sin x))' = f'(x)\cos x$
  4) $(f\circ g)'(x) = \left(f'\circ g'\right)(g(x))$ **5)** $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
  6) $\left(e^{f(x)}\right)' = \left(e^{f'(x)}\right)$ **7)** $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+c$
- Napisati jednačinu tangente na grafik funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ u tački $x_0=0$:
- Za funkciju $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ napisati, ako postoje, jednačine:

  (a) verikalnih asimptota:

  (b) leve horizontalne asimptote:

  (c) desne horizontalne asimptote:
- Funkcija $f(x)=\begin{cases} x^2+A^2x-8 & , \ x<1 \\ 2x-5 & , \ x\ge 1\end{cases}$ je neprekidna u tački $x_0=1$ za $A\in$ ______________
- Napisati prve izvode datih funkcija

  $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x^2+3)}$, $f'(x)=$ __________________________

  $g(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$, $g'(x)=$ __________________________
- Napisati formulu za razvoj funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u beskonačni Maklorenov red:

  $f(x)=$
- Prvi parcijalni izvodi funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3\sqrt{y}-e^x$ su

  $f_x(x,y)=$ ______________________ $f_y(x,y)=$ ______________________

ZADACI 1

1. Dat je rekurzivan niz $a_{n+1}=4-\dfrac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$ i $a_1=1$. Dokazati da za svaki član niza a_n, $n\in\mathbb{N}$ važi $1\le a_n<4$, dokazati da niz konvergira, i zatim mu izračunati granicu.
2. Ispitati funkciju $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$ i nacrtati njen grafik.
3. Koliko članova u razvoju funkcije $f(x)=e^x$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost e^2 izračunali sa greškom manjom od 0.1?

FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 2**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **23.06.2020.**

PREDISPITNE OBAVEZE 2

- Zaokružiti osobine integrala (za proizvoljne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, i $\alpha\in\mathbb{R}$)

  1) $\int h(f(x))dx = h\left(\int f(x)dx\right)$ **2)** $\int f^{\alpha}(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x)+c$

  3) $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ **4)** $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

  5) $\int f(x)\cdot g(x)dx = g(x)\int f(x)dx + f(x)\int g(x)dx$ **6)** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)+c$

  7) $\int f(x)\cdot g(x)dx = g(x)\int f(x)dx - f(x)\int g(x)dx$ **8)** $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

- Izračunati:

  1) $\int \sqrt{4-5x}dx =$ ______________ **2)** $\int \frac{\ln x - \sqrt{x}}{2x}dx =$ ______________

  3) $\int \frac{x-2}{x+3}dx =$ ______________ **4)** $\int (x+3)e^{x}dx =$ ______________

- Izračunati:

  1) $\int_{1}^{3} e^{2x}dx =$ ______________ **2)** $\int_{-1}^{1} (x^2+4x)dx =$ ______________

- Napisati formulu za parcijalnu integraciju: ______________________

- Napisati formulu za dužinu luka parametarski zadane krive $(x(t), y(t))$, $t\in[1,2]$, gde je $x'(t)>0$:

  $\ell =$ ______________________________________

- Zaokruži rešenja diferencijalne jednačine $yy'' = e^{3x}$:

  1) $y(x)=x$ **2)** $y(x)=x^2$ **3)** $y(x)=e^{x}$ **4)** $y(x)=e^{3x}$ **5)** $y(x)=\sin x$

- Rešenje diferencijalne jednačine oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ tražimo uvodeći smenu: ______________

- Ako je 3 dvostruki karakteristični koren homogene linearne jednačine, tada se među njenim fundamentalnim rešenjima nalaze i funkcije:

ZADACI 2

1. Izračunati $I = \int (x^2+x)\ln(x+1)dx$.

2. Izračunati površinu između krivih $y = \frac{1}{\sin x}$ i $y = \operatorname{ctg} x$, i pravih $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

REŠENJA ZADATAKA KOLOKVIJUMA 1

1. *Dat je rekurzivan niz* $a_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_1 = 1$. *Dokazati da za svaki član niza* a_n, $n \in \mathbb{N}$ *važi* $1 \le a_n < 4$, *dokazati da niz konvergira, i zatim mu izračunati granicu.*

   REŠENJE:

   (a) Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom. Za $a_1 = 1$ važi $1 \le a_1 < 4$. Pretpostavimo da nejednakost $1 \le a_n < 4$ važi za $n \ge 2$, i dokažimo da važi i za $n+1$. Kako je

   $$1 \le a_{n+1} < 4 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \le 4 - \frac{1}{a_n} < 4 \quad\Leftrightarrow\quad -3 \le -\frac{1}{a_n} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3 \ge \frac{1}{a_n} > 0,$$

   imamo da nejednakost $\dfrac{1}{a_n} > 0$ očigledno važi jer je $1 \le a_n$ tj. $0 < a_n$, a nejednakost $3 \ge \dfrac{1}{a_n}$ važi jer je $1 \le a_n$ tj. $\dfrac{1}{a_n} \le 1$.

   (b) Dokažimo da je niz a_n, $n \in \mathbb{N}$ monotono rastući, te će zbog njegove ograničenosti, što smo dokazali pod (a), slediti da je konvergentan. Dakle, dokažimo da je $a_n < a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

   $$a_n < a_{n+1} \quad\Leftrightarrow\quad a_n < 4 - \frac{1}{a_n} \quad\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\quad a_n^2 < 4a_n - 1 \quad\Leftrightarrow\quad a_n^2 - 4a_n + 1 < 0$$

   [1] - Nejednakost se ne menja jer je $a_n > 0$, što je dokazano pod (a).
   Rešenja kvadratne jednačine $x^2 - 4x + 1 = 0$ su

   $$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

   gde je $x_2 = 2 \pm \sqrt{3} > 3$, te nejednakost $a_n^2 - 4a_n + 1 < 0$ važi za sve $n \ge 3$ (naime, kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 1$ je konveksna, dakle monotono rastuća za sve vrednosti $x > x_2 = 2 + \sqrt{3}$).

   (c) Pod (b) je dokazano da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, pri čemu je $A \ne 0$ odnosno $1 \le A \le 4$ jer je $1 \le a_n < 4$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

   $$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{a_n}\right) = 4 - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

   $$\Rightarrow\quad \left(A = 4 - \frac{1}{A} \ \wedge\ A \ge 1\right) \quad\Rightarrow\quad \left(A^2 - 4A + 1 = 0 \ \wedge\ A \ge 1\right)$$

   $$\Rightarrow\quad \left(A = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \ \wedge\ A \ge 1\right) \quad\Rightarrow\quad A = 2 + \sqrt{3}.$$

2. *Ispitati funkciju* $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x-2}$ *i nacrtati njen grafik.*

   REŠENJE:

   $$f(x) = \ln\frac{x-1}{x-2} = \ln(x-1) - \ln(x-2),$$

   $$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{(x-1)(x-2)},$$

   $$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

   (a) *Domen funkcije*: domen funkcije je

   $$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{x-1}{x-2} > 0\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1>0 \ \wedge\ x-2>0) \ \vee\ (x-1<0 \ \wedge\ x-2<0)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \ \vee\ x < 1\} = (-\infty, 1) \cup (2, \infty).\end{aligned}$$

   (b) *Parnost/neparnost funkcije*: funkcija f nije ni parna ni neparna jer je npr.

   $$f(-3) = \ln\frac{4}{5} \ne \pm f(3) = \pm\ln 2.$$

(c) *Nule i znak funkcije*: za $x \in \mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ je

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{x-1}{x-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-2} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \emptyset,$$

odnosno, funkcija f nema nula. Kako je

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{x-1}{x-2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-2} - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2,$$

sledi da za $x \in \mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ važi

$f(x) > 0$ za $x \in (2, \infty)$,

$f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1)$.

(d) *Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije*: kako je

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)(x-2)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad ((x-1 > 0 \ \wedge \ x-2 > 0) \ \vee \ (x-1 < 0 \ \wedge \ x-2 < 0))$$
$$\Leftrightarrow \quad (x > 2 \ \vee \ x < 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty),$$

sledi da je funkcija f monotono opadajuća na celom svom domenu. To znači i da nema ekstremnih vrednosti.

(e) *Konveksnost / konkavnost funkcije*: kako je $(x-1)^2(x-2)^2 > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, sledi da je

$$\left(f''(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2} > 0 \ \wedge \ x \in \mathcal{D}_f \right)$$
$$\Leftrightarrow \quad (2x-3 > 0 \ \wedge \ x \in \mathcal{D}_f)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x > \frac{3}{2} \ \wedge \ x \in \mathcal{D}_f \right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in (2, \infty),$$

te važi da je f konveksna na intervalu $(2, \infty)$, a konkavna na $(-\infty, 1)$, i nema prevojnih tačaka.

(f) *Vertikalne asimptote funkcije*: neprekidna funkcija f vertikalne asimptote može imati u tačkama 1 i 2 (u rubovima svog domena). Kako je

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln \frac{x-1}{x-2} = \ln \frac{-0}{-1} = \ln(+0) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln \frac{x-1}{x-2} = \ln \frac{1}{+0} = \ln(+\infty) = +\infty,$$

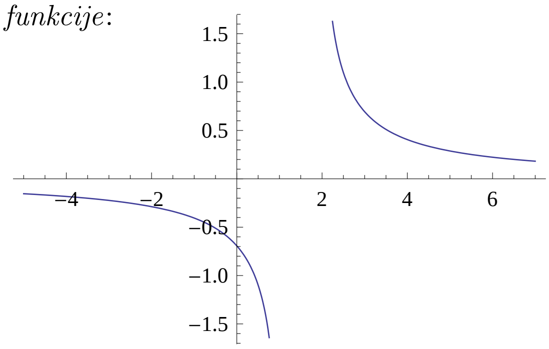
tako da su prave $x = 1$ i $x = 2$ vertikalne asimptote funkcije f.

(g) *Horizontalna / kosa asimptota funkcije*: Kako je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln \left(\frac{x-1 : x}{x-2 : x} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{2}{x}} = \ln \left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{2}{x}} \right) = \ln 1 = 0,$$

te je y-osa i leva i desna horizontalna asimptota funkcije f.

(h) *Grafik funkcije*:



3. *Koliko članova u razvoju funkcije $f(x) = e^x$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost e^2 izračunali sa greškom manjom od 0.1?*

REŠENJE: Posmatramo Maklorenov razvoj funkcije $f(x) = e^x$. Za svako $x \in \mathbb{R}$ je $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x)$, gde je $r_n(x)$ ostatak u Lagranžovom obliku, tj. $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ za neko $\xi \in (0, x)$, koji, po uslovu zadatka, treba da zadovoljava relaciju $|r_n(x)| < 0.1$. Za funkciju $f(x) = e^x$ je $f^{(n)}(x) = e^x$ za sve $n \in \mathbb{N}$, a funkcija e^x je monotono rastuća, te sledi da je $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi} < e^x$ za sve $\xi \in (0, x)$. Stoga je

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \left| \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \right|.$$

Tako za $x = 2$ dobijamo da treba da bude

$$|r_n(2)| < \left| \frac{e^2}{(n+1)!} 2^{n+1} \right| = \frac{e^2}{(n+1)!} 2^{n+1} \approx \frac{7.3891}{(n+1)!} 2^{n+1} < 0.1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{0.1}{7.3891} \approx 0.0135.$$

Za $n = 1$ je $\frac{2^2}{2!} = 2 > 0.0135$,

za $n = 2$ je $\frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3} > 0.0135$,

za $n = 3$ je $\frac{2^4}{4!} \approx 0.6667 > 0.0135$,

za $n = 4$ je $\frac{2^5}{5!} \approx 0.2667 > 0.0135$,

za $n = 5$ je $\frac{2^6}{6!} \approx 0.0889 > 0.0135$,

za $n = 6$ je $\frac{2^7}{7!} \approx 0.0254 > 0.0135$,

za $n = 7$ je $\frac{2^8}{8!} \approx 0.0063 < 0.0135$,

te je dovoljno uzeti prvih 8, za $n = 7$, članova u razvoju funkcije $f(x) = e^x$ u Maklorenov red.

REŠENJA ZADATAKA KOLOKVIJUMA 2

1. *Izračunati $I = \int (x^2 + x) \ln(x+1) dx$.*

REŠENJE: Parcijalnom integracijom sa

$u = \ln(x+1)$, $du = \frac{dx}{x+1}$ i $dv = x^2 + x$, $v = \int (x^2 + x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ dobijamo

$$I = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \int \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2}{x+1} dx = \ldots$$

Smenom $x + 1 = t$, $dx = dt$, $x = t - 1$ dalje dobijamo

$$I = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \int \frac{\frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{2}(t-1)^2}{t} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \int \frac{\frac{1}{3}\left(t^3 - 3t^2 + 3t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(t^2 - 2t + 1\right)}{t} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \int \frac{\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}}{t} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \frac{1}{3}\int t^2 dt + \frac{1}{2}\int t dt - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \ldots$$

Primenom tabličnih integrala dobijamo

$$I = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}\ln t + c =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \ln(x+1) - \frac{1}{9}(x+1)^3 + \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{6}\ln(x+1) + c.$$

2. *Izračunati površinu između krivih* $y = \dfrac{1}{\sin x}$ *i* $y = \operatorname{ctg} x$, *i pravih* $x = \dfrac{\pi}{3}$ *i* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

REŠENJE: Za $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, gde je $\sin x > 0$, važi

$$1 > \cos x \ / : \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin x} > \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

te je tražena površina

$$P = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\sin x} dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos x)\sin x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos x)\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \ldots$$

smenom $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$, uz promenu granica $x = \frac{\pi}{3} \mapsto t = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2} \mapsto t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, dobijamo dalje

$$P = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1 - t}{1 - t^2} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1 - t}{(1 - t)(1 + t)} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{1 + t} dt = \ldots$$

te sada smenom $1 + t = z$, $dt = dz$, uz promenu granica $t = \frac{1}{2} \mapsto z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ i $t = 0 \mapsto z = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dobijamo dalje

$$P = -\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz = -\ln z \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln 3.$$

3. *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

REŠENJE:

$$y' = \frac{x + y}{x - y} \ / \frac{: x}{: x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

U pitanju je homogena jednačina, koja uvođenjem smene $t = \dfrac{y}{x}$, $y = xt$, $y' = t + xt'$ postaje

$$t + xt' = \frac{1 + t}{1 - t} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{1 + t}{1 - t} - t = \frac{t^2 + 1}{1 - t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - t}{t^2 + 1} dt = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1 - t}{t^2 + 1} dt = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \ln|x| + c.$$

Prvi integral je tablični, a drugi rešavamo smenom $z = t^2 + 1$, $dt = \frac{1}{2} dt$ te je

$$\int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln|z| = \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + 1\right) = \ln\sqrt{t^2 + 1}.$$

Tako dobijamo

$$\operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{t^2 + 1} = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg} t = \ln|x| + \ln\sqrt{t^2 + 1} + c = \ln\left(|x|\sqrt{t^2 + 1}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(|x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}\right) + c = \ln\left(|x|\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + c,$$

čime je implicitno određeno rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine.