FTN, Informacioni inženjering,
Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 1**
Prezime, ime, br. indeksa: ____________________ **18.05.2021.**

PREDISPITNE OBAVEZE 1

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(6n+2)}{3n+1} = \underline{\ 0\ }$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{4n^2+1}\right) = \underline{\ -\infty\ }$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{3x-3} = \underline{\ \frac{1}{3}\ }$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^3}{x^2+x+1} = \underline{\ \infty\ }$
- Napisati jednačinu tangente na grafik funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+1$ u tački $x_0=\frac{\pi}{3}$:

  $y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\pi}{6}$
- Ako je niz realnih brojeva monotono rastući, mogući broj njegovih tačaka nagomilavanja u $\mathbb{R}$ je:

  $\boxed{\mathbf{1)}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2)}}$ 1 **3)** 2 **4)** 3 **5)** ∞
- Funkcija $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-1)}{\ln x} &, \ x\neq 1\\ A &, \ x=1\end{cases}$ je neprekidna u na svojoj oblasti definisanosti za $A\in\underline{\ \{1\}\ }$
- Desna kosa asimptota funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+4}{x-2}$ je $\underline{\ y=2x+4\ }$
- Napisati jedna jednačine vertikalnih asimptota, ako postoje, funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}$:

  $\underline{\ x=2\ }$
- Napisati prve izvode datih funkcija

  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\sqrt{2x}}$, $\quad f'(x)=\underline{\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}}$

  $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\cos(1-3x^2)}{\sqrt{2x-1}}$, $\quad g'(x)=\underline{\dfrac{6x\sin\left(1-3x^2\right)\sqrt{2x-1}-\frac{\cos(1-3x^2)}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1}}$

  $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\sin^2 x$, $\quad g'(x)=\underline{\ \sin^2 x+2x\sin x\cos x\ }$
- Stacionarne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ su: $\underline{\ -1\ }$
- Napisati Lagranžovu funkciju za nalaženje uslovnih (vezanih) ekstrema funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+e^{xy}+y^2}$ uz uslove $\sqrt{x^2+y^2}=3$ i $x+2y=5$:

  $$L(x,y;\lambda,\theta)=\frac{xy}{x^2+e^{xy}+y^2}+\lambda\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)+\theta(x+2y-5)$$
- Prvi parcijalni izvodi funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2-5x}-4y$ su

  $f_x(x,y)=\dfrac{y^3\left(x^2-5x\right)-y^3\left(2x^2-5x\right)}{\left(x^2-5x\right)^2}$ $\quad f_y(x,y)=\underline{\dfrac{3xy^2}{x^2-5x}-4}$

ZADACI

1. Razviti u stepeni red funkciju $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ i odrediti oblast konvergencije tog reda.
2. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=\begin{cases}x^2\ln^2 x &, \ x>0\\ (A-x)^2-9 &, \ x\le 0\end{cases}$. Ispitati za koje $A\in\mathbb{R}$ je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$.
3. Ispitati funkciju $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-1}$, bez ispitivanja konveksnosti i konkavnosti. Izračunati drugi izvod funkcije.
4. Odrediti ekstreme funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $z=f(x,y)=x+2ey-e^x-e^{2y}$.

REŠENJA ZADATAKA - KOLOKVIJUM 1

1. Razviti u stepeni red funkciju $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ i odrediti oblast konvergencije tog reda.

Rešenje: Kako je

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)),$$

koristeći razvoje funkcija $\ln(1+x)$ i $\ln(1-x)$ dobijamo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x \in (-1,1],$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x \in [-1,1),$$

te je

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)\frac{x^n}{n}$$

na oblasti konvergencije $x \in (-1,1) = (-1,1] \cap (-1,1]$. Za parne brojeve $n = 2m$ je $(-1)^{n-1}+1 = 0$ a za neparne $n = 2m-1$ je $(-1)^{n-1}+1 = 2$. Sledi

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{x^{2m-1}}{2m-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}x^{2m-1}.$$

2. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \begin{cases} x^2\ln^2 x & , \ x > 0 \\ (A-x)^2 - 9 & , \ x \le 0 \end{cases}$. Ispitati za koje $A \in \mathbb{R}$ je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rešenje: Kvadratna funkcija $f_1(x) = (A-x)^2 - 9$, $x \le 0$ je neprekidna na $(-\infty, 0]$, i pri tome je $f_1(0) = A^2 - 9$. Funkcija $f_2(x) = x^2\ln^2 x$, $x > 0$ je, kao kompozicija neprekidnih funkcija, neprekidna na $(0,\infty)$, i pri tome je

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\ln^2 x = 0\cdot(-\infty),$$

što je neodređen izraz. Primenom Lopitalovog pravila (2 puta) dobijamo

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln^2 x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}$$

$$= -\frac{-\infty}{\infty} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^2 = 0.$$

Funkcija f je neprekidna ako i samo ako je $f_1(0) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x)$ odnosno $A^2 - 9 = 0$, dakle za $A \in \{-3, 3\}$.

3. Ispitati funkciju $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$, bez ispitivanja konveksnosti i konkavnosti. Izračunati drugi izvod funkcije.

Rešenje:

(a) *Domen funkcije* je skup $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(b) *Nule funkcije*:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

(c) *Znak funkcije*: imamo da je

$$2x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2},$$

$$x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty),$$

te dobijamo

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{-1} & \multicolumn{1}{c}{\tfrac{1}{2}} & \multicolumn{1}{c}{1} \\
\hline
2x-1 & - & - & + & + \\
\hline
x^2-1 & + & - & - & + \\
\hline
f(x) & - & + & - & + \\
\end{array}.$$

Dakle,

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty),$$

$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

(d) Funkcija nije ni parna ni neparna jer je npr. $f(-2) = \frac{-5}{3} \neq f(2) = 1$ i $f(-2) = \frac{-5}{3} \neq -f(2) = -1$.

(e) *Monotonost i lokalni ekstremi funkcije*:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)' = \frac{2\left(x^2-1\right) - (2x-1)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = -2\frac{x^2-x+1}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R},$$

te je i $x^2 - x + 1 > 0$ (konveksna kvadratna funkcija koja nema realnih korena) i $\left(x^2-1\right)^2 > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}$. Sledi da je $f'(x) = -2\frac{x^2-x+1}{\left(x^2-1\right)^2} < 0$ za sve $x \in \mathcal{D}$, što znači da je funkcija f monotono opadajuća na celom domenu $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, i nema ekstremnih tačaka.

(f) *Drugi izvod funkcije*:

$$f''(x) = \left(-2\frac{x^2-x+1}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' =$$

$$= -2\frac{(2x-1)\left(x^2-1\right)^2 - \left(x^2-x+1\right)2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= -2\frac{\left(x^2-1\right)\left((2x-1)\left(x^2-1\right) - \left(x^2-x+1\right)\cdot 4x\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= -2\frac{-2x^3+3x^2-6x+1}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

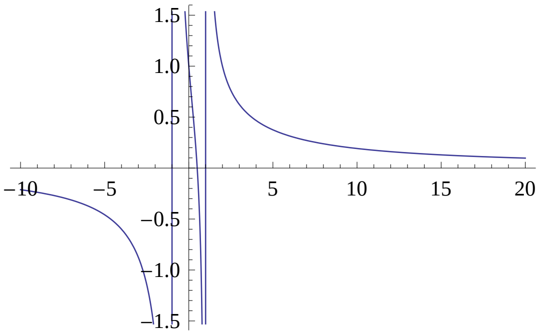
(g) *Vertikalne asimptote funkcije*: s obzirom na domen $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ funkcije f, moguće vertikalne asimptote su prave $x = -1$ i $x = 1$. Kako je $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = \infty$, sledi da je prava $x = -1$ i leva i desna vertikalna asimptota funkcije f. Iz $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$ sledi da je prava $x = 1$ takođe i leva i desna vertikalna asimptota funkcije f.

(h) *Horizontalna / kosa asimptota funkcije*: kako je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-1} \begin{array}{l} :x^2 \\ :x^2 \end{array} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0,$$

sledi da je prava $y = 0$ (x-osa) i leva i desna horizontalna asimptota funkcije f.

(i) *Grafik funkcije*:



4. Odrediti ekstreme funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $z=f(x,y)=x+2ey-e^x-e^{2y}$.

Rešenje: Prvi i drugi parcijalni izvodi funkcije f su redom

$f_x(x,y)=1-e^x,\qquad f_y(x,y)=2e-2e^{2y},$

$f_{xx}(x,y)=-e^x,\qquad f_{yy}(x,y)=-4e^{2y},\qquad f_{xy}(x,y)=0.$

Nalazimo stacionarne tačke.

$$\begin{array}{l} f_x(x,y)=1-e^x=0\\ f_y(x,y)=2e-2e^{2y}=0\end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{l} e^x=1\\ e^{2y}=e\end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{l} x=0\\ 2y=1\end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{l} x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{array}.$$

Dakle, jedina stacionarna tačka je $T\big(0,\frac{1}{2}\big)$. Za nju je

$$r=f_{xx}\left(0,\frac{1}{2}\right)=-1,\quad t=f_{yy}\left(0,\frac{1}{2}\right)=-4e,\quad s=f_{xy}\left(0,\frac{1}{2}\right)=0,$$

te je $rt-s^2=4e>0$, pri čemu je $t=-1<0$, što znači da funkcija f u tački T ima lokalni maksimum, i ta maksimalna vrednost funkcije iznosi

$$z_{max}=f\left(0,\frac{1}{2}\right)=0+2e\frac{1}{2}-e^0-e^{2\frac{1}{2}}=f\left(0,\frac{1}{2}\right)=e-1-e=-1.$$