FTN, Informacioni inženjering,
Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 2**
Prezime, ime, br. indeksa: ____ **26.06.2022.**

PREDISPITNE OBAVEZE 2

- Zaokružiti osobine integrala (za proizvoljne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, i $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$)

  1) $\int f(x)dx = F(x)+c \;\Leftrightarrow\; F'(x)=f(x)$ **2)** $\int f(x)dx = F(x)+c \;\Leftrightarrow\; f'(x)=\int F(x)dx$

  3) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ **4)** $\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx$

  5) $\int \alpha f(x)dx = (\alpha+1)\int f(x)dx$ **6)** $\int (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$

- Ako je $\int f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+c$, tada je $f(x) =$ ____________________

- Izračunati:

  1) $\int\limits_0^1 (1-e^x)dx =$ ____________________ **2)** $\int\limits_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx =$ ____________________

  3) $\int\limits_0^1 (1-3x)^2dx =$ ____________________ **4)** $\int\limits_{-2}^3 \left(x^2+1\right)dx =$ ____________________

- Izračunati:

  1) $\int \frac{\sin x}{\cos x - 2}dx =$ ____________________ **2)** $\int x\sin x dx =$ ____________________

- Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ gde je $a<b$. Zaokružiti tačne iskaze.

  1) Ako je f neprekidna, tada je f integrabilna na (a,b), **2)** Ako je f integrabilna, tada je f neprekidna na (a,b), **3)** Ako je f ograničena na (a,b), tada je f integrabilna na (a,b), **4)** Ako je f integrabilna na (a,b), tada je f ograničena na (a,b).

- Napisati formulu za dužinu luka krive $y=f(x)$, $x\in[1,2]$:

  $\ell =$ ____

- Ako je 3 dvostruki karakteristični koren homogene linearne jednačine, tada se među njenim fundamentalnim rešenjima nalaze i funkcije:

- Opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'=y$ je: ________________________________

- Zaokruži rešenja diferencijalne jednačine $y''+y=y'$:

  1) $y(x)=\cos^2 x$ **2)** $y(x)=e^x$ **3)** $y(x)=1$ **4)** $y(x)=0$ **5)** $y(x)=x$

ZADACI

1. Izračunati $I = \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$.
2. Izračunati zatvorenu površinu koju zaklapa kružnica $x^2+y^2=2$ sa parabolom $y(x)=x^2$, i to onu zatvorenu površinu koja se nalazi iznad parabole.
3. Dokazati da je $(x+y+1)dx + \left(x-y^2+3\right)dy = 0$, jednačina totalnog diferencijala, rešiti je, i naći ono partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(1)=0$.

REŠENJA ZADATAKA 2

1. Smenom $x = t^6$, pri čemu je tada $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, dobijamo
$$I = \int \frac{t^3}{1-t^2} 6t^5 dt = -6 \int \frac{t^8}{t^2-1} dt,$$
što je integral racionalne funkcije. Deljenjem polinoma t^8 sa $t^2 - 1$ dobijamo količnik $t^6 + t^4 + t^2 + 1$ i ostatak 1, te je dalje
$$\begin{aligned} I &= -6 \int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\ &= -6 \int t^6 dt - 6 \int t^4 dt - 6 \int t^2 dt - 6 \int dt - 6 \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= -\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 6t - 6 \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt. \end{aligned}$$
Pri tome je
$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t + A - B}{(t-1)(t+1)}$$
odakle sledi da je $A + B = 0$ i $A - B = 1$. Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo $A = \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$, te je dalje
$$\begin{aligned} I &= -\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 6t - 6 \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt \\ &= -\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 6t - 3 \int \frac{1}{t-1} dt + 3 \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= -\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 6t - 3 \ln|t-1| dt + 3 \ln|t+1| \\ &= -\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 6t + 3 \ln\left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \end{aligned}$$
Vraćanjem smene $x = t^6$ odnosno $t = \sqrt[6]{x}$ konačno dobijamo
$$I = -\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln\left| \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1} \right| + c.$$

2. Preseke parabole sa kružnicom nalayimo rešavanje sistema njihovih jednačina.
$$\begin{matrix} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} y = x^2 \\ y + y^2 = 2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} y = x^2 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} y = x^2 \\ y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \{-2, 1\} \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \big((y = -2 \ \wedge \ x^2 = -2) \ \vee \ (y = 1 \ \wedge \ x^2 = 1) \big) \quad \Leftrightarrow \quad (y = 1 \ \wedge \ x^2 = 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad (y = 1 \ \wedge \ x \in \{-1, 1\}).$$
Dakle, tačke preseka su $(-1, 1)$ i $(1, 1)$, što su tačke na gornjoj polukružnici kružnice $x^2 + y^2 = 2$, dakle na polukružnici $y(x) = +\sqrt{2 - x^2}$. Stoga je tražena površina
$$P = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2 \right) dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} dx = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}} dx - \frac{1}{3}(1-(-1)) dx = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}} dx - \frac{2}{3}.$$
Rešenje poslednjeg neodređenog integrala tražimo u obliku
$$\int \frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}} dx = (Ax + B)\sqrt{2-x^2} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx.$$

Diferenciranjem prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}} &= A\sqrt{2-x^2}+(Ax+B)\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\\ &= A\sqrt{2-x^2}-(Ax+B)\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{2-x^2}},\end{aligned}$$

i množenjem prethodne sa $\sqrt{2-x^2}$ dobijamo

$$x^2-2=A\big(2-x^2\big)-\big(Ax^2+Bx\big)+\lambda=-2Ax^2-Bx+2A+\lambda.$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma dobijamo i rešavamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2A & & & & & = & 1\\ & - & B & & & = & 0\\ 2A & & & + & \lambda & = & -2 \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l} A=-\frac{1}{2}\\ B=0\\ \lambda=-1 \end{array}.$$

Odatle dobijamo

$$\int\frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}dx=-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}-\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx=-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+c,$$

i njegovim uvrštavanjem konačno dobijamo

$$\begin{aligned}P &= -\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{3}\\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2-1^2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(-1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2-(-1)^2}+\arcsin\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{2}{3}\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. Za funkcije $P(x,y)=x+y+1$ i $Q(x,y)=x-y^2+3$ imamo da je $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=1=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$, te data diferencijalna jednačina jeste jednačina totalnog diferencijala. Nalazimo funkciju $F(x,y)$ čiji je totalni diferencijal data diferencijalna jednačina. Iz $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=P(x,y)$ sledi

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int P(x,y)dx+s(y)=\int(x+y+1)dx+s(y)\\ &= \int xdx+(y+1)\int dx+s(y)=\frac{1}{2}x^2+(y+1)x+s(y)\\ &= \frac{1}{2}x^2+x+xy+s(y).\end{aligned} \qquad [*]$$

Iz $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=Q(x,y)$ sledi

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=x+s'(y)=Q(x,y)=x-y^2+3$$

dobijamo

$$x+s'(y)=x-y^2+3 \quad\Rightarrow\quad s'(y)=-y^2+3 \quad\Rightarrow\quad s(y)=\int\big(-y^2+3\big)dy$$

$$\Rightarrow\quad s(y)=-\int y^2dy+3\int dy=-\frac{1}{3}y^3+3y+c.$$

Uvrštavanjem $s(y)$ u [*] dobijamo $F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y+c$, te je sa

$$\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y+c=0$$

implicitno određeno opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine. Uvrštavanjem početnog uslova $y(1)=0$, odnosno za $x=1$ i $y=0$ dobijamo $\frac{1}{2}\cdot 1+1+c=0$ odnosno $c=-\frac{3}{2}$, te je sa

$$\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y-\frac{3}{2}=0$$

implicitno određeno ono partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(1)=0$.