FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1
Pitanja za usmeni ispit

TEORIJA (ZA VISOKU OCENU)

1. Navesti primer niza realnih brojeva koji ima tačno jednu tačku nagomilavanja, a nema graničnu vrednost.

2. *Od sledeća dva pitanja birati jedno.*

   (a) Dokazati:
   Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takvo da je $f(x_0) = 0$. Tačka $x_0 \in [a, b]$ za koju je $f(x_0) = 0$ ne mora biti jedinstvena.

   (b) Dokazati:
   Neka funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u tački $M \in \mathbb{R}^n$ ima lokalnu ekstremnu vrednost. Ako funkcija f u tački $M \in \mathbb{R}^n$ ima sve prve parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tada je $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M) = 0$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3. *Od sledeća dva pitanja birati jedno.*

   (a) Napisati definiciju i vrste nesvojstvenih integrala.

   (b) Dokazati:
   Ako funkcije $y_i(x)$, $x \in I$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ čine fundamentalni skup rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine
   $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$
   nad intervalom (a, b) (definisati pojam skupa fundamentalnih rešenja navedene jednačine), tada je
   $$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x), \quad x \in (a, b),$$
   za $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ opšte rešenje navedene homogene linearne diferencijalne jednačine.

ZADACI

1. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ i nacrtati njen grafik (bez ispitivanja konveksnosti).

2. Izračunati $I = \int (x^2 - 3x) \sin x dx$.

Rešenja:

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{x^3}{(x-1)(x+1)}$,

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - 2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2-1\right)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2 - 4x\left(x^4-3x^2\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4} \\ &= \frac{2x\left(\left(2x^2-3\right)\left(x^2-1\right) - 2\left(x^4-3x^2\right)\right)}{\left(x^2-1\right)^3} \\ &= \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(x-1)^3(x+1)^3}. \end{aligned}$$

(a) *Domen funkcije*: očigledno je domen funkcije $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(b) *Parnost/neparnost funkcije*: funkcija f je neparna jer je

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x),$$

te je funkciju dovoljno ispitivati za $x \geq 0$ jer je grafik centralno-simetričan u odnosu na koordinatni početak.

(c) *Nule i znak funkcije*:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

	-1	0	1	
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Dakle, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, i $f(x) > 0$ za $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

(d) *Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije*: kako u

$$f'(x) = \frac{x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2-1\right)^2},$$

važi da je $x^2 \geq 0$ i $\left(x^2-1\right)^2 > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, dobijamo

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x < -\sqrt{3} \;\vee\; x > \sqrt{3}\right).$$

Dakle,

* funkcija f je monotono rastuća za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
* funkcija f je monotono opadajuća za $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$;
* u $-\sqrt{3}$ funkcija f ima lokalni maksimum gde je $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, a u $\sqrt{3}$ funkcija f ima lokalni minimum pri čemu je $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(e) *Konveksnost / konkavnost funkcije*: kako u

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

važi da je $x^2+3 > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, dobijamo

	-1	0	1	
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

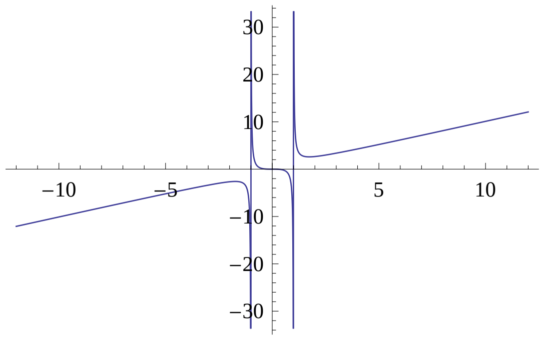
Prema tome, funkcija f je konveksna za $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, pri čemu su -1, 0 i 1 prevojne tačke.

(f) *Vertikalne asimptote funkcije*: neprekidna funkcija f vertikalne asimptote može imati u tačkama -1 i 1 (u rubovima svog domena). Kako je

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{\pm 0} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$
tako da su prave $x=-1$ i $x=1$ s obe strane vertikalne asimptote funkcije f.

(g) *Horizontalna / kosa asimptota funkcije*: Kako je
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1}\frac{:x^2}{:x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} +\infty &, \quad x\to+\infty \\ -\infty &, \quad x\to-\infty \end{cases},$$
funkcija nema ni levu ni desnu horizontalnu asimptotu. Kako je
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1}\frac{:x^2}{:x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - nx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - (x^2-1)x}{x^2-1} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1}\frac{:x}{:x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = 0,$$
sledi da je prava $y=x$ i leva i desna kosa asimptota funkcije.

(h) *Grafik funkcije*:



2. Izračunati $I = \int (x^2 - 3x)\sin x dx$.