Teoreme koje je potrebno znati dokazati na usmenom ispitu za visoku ocenu (9 i 10)*

FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1

18. maj 2018

1 Metrički prostori, nizovi i konvergencija nizova

Theorema 1.1 *U metričkom prostoru (X,d), za svake dve različite tačke $a,b \in X$ postoje $\varepsilon_a > 0$ i $\varepsilon_b > 0$ za koje su lopte $L(a,\varepsilon_a)$ i $L(b,\varepsilon_b)$ disjunktne.*

Theorema 1.2 *U metričkom prostoru, svaki konvergentan niz je ograničen.*

Theorema 1.3 *U skupu realnih brojeva, konvergentan niz ima jedistvenu graničnu vrednost.*

Theorema 1.4 *Ako za nizove realnih brojeva a_n, $n \in \mathbb{N}$, b_n, $n \in \mathbb{N}$ i c_n, $n \in \mathbb{N}$ važi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le b_n \le c_n$, tada*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = p \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = p.$$

Theorema 1.5 *Neka za nizove realnih brojeva a_n, $n \in \mathbb{N}$ i b_n, $n \in \mathbb{N}$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Tada:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Theorema 1.6 *U skupu realnih brojeva, svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

Theorema 1.7 *Neka za niz zatvorenih intervala $[a_n,b_n] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ važi $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Tada postoji jedinstveno $c \in \mathbb{R}$ takvo da je $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = c$.*

Theorema 1.8 *Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

2 Granične vrednosti i neprekidnost funkcija

Theorema 2.1 *Ako za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji granična vrednost u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, tada je ta granična vrednost jedinstvena.*

*Napred navedena pitanja su podložna malim promenama.

Theorema 2.2 *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Tada je* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ *ako i samo ako za svaki niz realnih brojeva* a_n, $n \in \mathbb{N}$ *važi*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A.$$

Theorema 2.3 *Ako su funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidne na* $\mathbb{R}$, *tada su i funkcije* $f \cdot g$ *i* $f \circ g$ *neprekidne na* $\mathbb{R}$.

Theorema 2.4 *Ako je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[a,b]$, *tada je* f *i ograničena na* $[a,b]$.

Theorema 2.5 *Ako je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[a,b]$ *i ako je* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *tada postoji* $x_0 \in [a,b]$ *takvo da je* $f(x_0) = 0$. *Tačka* $x_0 \in [a,b]$ *za koju je* $f(x_0) = 0$ *ne mora biti jedinstvena.*

3 Izvodi i diferencijalni račun funkcija jedne realne promenljive, i njihova primena

Theorema 3.1 *Ako funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *imaju izvod u tački* $x_0 \in \mathbb{R}$, *tada i funkcija* $f \cdot g$ *ima izvod u tački* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i pri tome je* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Theorema 3.2 *Ako funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *imaju izvod u svakoj tački* $x \in \mathbb{R}$, *tada i funkcija* $f \circ g$ *ima izvod u svakoj tački* $x \in \mathbb{R}$ *i pri tome je* $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Zadatak 3.1 *Po definiciji izračunati izvod funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Theorema 3.3 (Rolova teorema) *Neka je funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a,b]$ *i ima izvod nad* (a,b). *Ako je* $f(a) = f(b)$, *tada postoji* $x_0 \in (a,b)$ *takvo da je* $f'(x_0) = 0$.

Theorema 3.4 (Košijeva teorema) *Neka su funkcije* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne nad* $[a,b]$, *imaju izvode nad* (a,b), *i neka je* $g'(x) \neq 0$ *za sve* $x \in (a,b)$. *Tada postoji tačka* $x_0 \in (a,b)$ *takva da je* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Theorema 3.5 (Lopitalovo pravilo) *Neka su funkcije* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *i* $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* (a,b), *neka je* $g'(x) \neq 0$ *za sve* $x \in (a,b)$, *i neka je* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$. *Ako postoji* $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, *tada postoji i* $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$, *i pri tome je* $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Theorema 3.6 (Tejlorova teorema) *Neka su funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *i svi njeni izvodi do* $(n-1)$*-og reda neprekidne funkcije nad* $[a,b]$, *i neka funkcija* f *ima n-ti izvod nad* (a,b). *Neka je* $x_0 \in [a,b]$. *Tada za svako* $x \in [a,b]$ *postoji* $\xi \in (a,b)$ *takvo da je*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Theorema 3.7 *Neka funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *ima prvi izvod nad intervalom* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je funkcija* f *monotono neopadajuća nad* I, *tada je* $f'(x) \geq 0$ *za sve* $x \in I$.

Theorema 3.8 *Neka funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ima lokalni minimum ili lokalni maksimum u tački* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Ako postoji* $f'(x_0)$, *tada je* $f'(x_0) = 0$.

4 Limesi, neprekidnost, izvodi i diferencijabilnost funkcija više realnih promenljivih, i njihova primena na određivanje ekstremnih vrednost funkcija

Theorema 4.1 *Ako je funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferencijabilna u tački $M\in\mathbb{R}^n$ i ako je $df(M)=\sum_{i=1}^{n} D_i\Delta x_i$ njen prvi diferencijal u tački $M\in\mathbb{R}^n$ za neke $D_i\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, tada važe sledeća tvrđenja.*

(a) *Funkcija f je neprekidna u tački $M\in\mathbb{R}^n$.*

(b) *Postoje prvi parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i\in\{1,\dots,n\}$ funkcije f u $M\in\mathbb{R}^n$, i pri tome je $D_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$ za sve $i\in\{1,\dots,n\}$.*

Theorema 4.2 *Ako funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ima sve prve parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i\in\{1,\dots,n\}$ u nekoj okolini tačke $M\in\mathbb{R}^n$ i ako su svi ti prvi parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ neprekidni u tački $M\in\mathbb{R}^n$, tada je funkcija f diferencijabilna u tački $M\in\mathbb{R}^n$.*

Theorema 4.3 *Neka funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ u tački $M\in\mathbb{R}^n$ ima lokalnu ekstremnu vrednost. Ako funkcija f u tački $M\in\mathbb{R}^n$ ima sve prve parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, tada je $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)=0$ za sve $i\in\{1,\dots,n\}$.*

Zadatak 4.1 *Definisati i objasniti Lagranžov medot za nalaženje uslovnih ekstremnih vrednosti funkcije $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.*

5 Neodređeni integral, određeni integral i njegova primena

Zadatak 5.1 *Formulisati i dokazati formulu uvođenje smene u neodređeni integral.*

Zadatak 5.2 *Formulisati i dokazati formulu parcijalnu integraciju u neodređenom integralu.*

Zadatak 5.3 *Opisati rešavanje neodređenog integrala racionalnih funkcija.*

Theorema 5.1 *Ako za funkciju $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ postoji $\int\limits_a^b f(x)dx$, tada je funkcija f ograničena nad $[a,b]$.*

Theorema 5.2 (Njutn-Lajbnicova formula) *Ako za funkciju $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ postoji $\int\limits_a^b f(x)dx$, i ako za funkciju f postoji primitivna funkcija $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, tada je $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.*

Theorema 5.3 (Teorema o srednjoj vrednosti) *Neka za funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ i $g:[a,b]\to[0,\infty)$ postoje $\int\limits_a^b f(x)dx$ i $\int\limits_a^b g(x)dx$, i neka postoje $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)\in\mathbb{R}$ i $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\in\mathbb{R}$. Tada postoji $T\in[m,M]$ takvo da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = T\int_a^b g(x)dx.$$

Zadatak 5.4 *Napisati formulu za izračunavanje dužine luka krive pomoću određenog integrala uz formulaciju uslova za njenu primenu, kada je kriva definisana funkcijom $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, i kada je kriva zadana parametarski tj. u obliku $y = y(t)$, $x = x(t)$, $t \in [a,b]$. Objasniti postupak izvođenja formule.*

Zadatak 5.5 *Napisati definiciju i vrste nesvojstvenih integrala.*

6 Diferencijalne jednačine

Zadatak 6.1 *Formulisati teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja početnog problema*

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

na zatvorenom domenu $G = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ funkcije F.

Zadatak 6.2 *Formulisati uslove dovoljne da diferencijalna jednačina*

$$P(x,y) + y'\,Q(x,y) = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala, i opisati postupak njenog rešavanja.

Theorema 6.1 *Da bi funkcije $y_i(x)$, $x \in I$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ bile linearno nezavisna rešenja nad (a,b) homogene linearne diferencijalne jednačine*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

potrebno je i dovoljno da je

$$\forall x \in I, \quad W_{y_1,\ldots,y_n}(x) \neq 0,$$

gde je $W_{y_1,\ldots,y_n}(x)$ determinanta Wronskog. Definisati determinantu Wronskog.

Theorema 6.2 *Ako funkcije $y_i(x)$, $x \in I$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ čine fundamentalni skup rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

nad intervalom (a,b) (definisati pojam skupa fundamentalnih rešenja navedene jednačine), tada je

$$y(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x), \quad x \in (a,b),$$

za $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ opšte rešenje navedene homogene linearne diferencijalne jednačine.

Zadatak 6.3 *Za homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$$

sa konstantnim koeficijentima, opisati postupak formiranja njenog opšteg rešenja.