1. Neka je $X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(X)$, i neka je idempotentna (odnosno maksitivna) fazi-mera $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ određena gustinom $\varphi=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.
   (a) Izračunati $\mu(S)$ za $S=X$ i $S=A=\{a,c\}$.
   (b) Neka je funkcija $f:X\to[0,\infty)$ definisana sa $f=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 14 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunati vrednost idempotentnog (maksitivnog) integrala funkcije f nad skupovima X i $A=\{a,c\}$.
2. Neka je funkcija $g:[0,\infty]\to[0,\infty]$ definisana sa $g(x)=x^2$, $x\in[0,\infty]$, i neka je
   $$x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y)),\qquad x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y)),\qquad x,y\in[0,\infty].$$
   (a) Neka je $m:\mathcal{B}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]_+$ skupovna funkcija koja je σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Za skup $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n,n+\frac{1}{2^n}\right]$ izračunati $m(S)$.
   (b) Izračunati σ-$\oplus$-$\odot$ pseudo-integral funkcije
   $f:[0,\infty]\to[0,\infty],\ f(x)=2x-4,\ x\in[0,\infty]$
   nad intervalom $[1,4]\in\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, u odnosu na σ-$\oplus$-dekompozabilnu fazi meru $m:\mathcal{B}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]$.
3. Neka je $I=[-2,10]$, $\oplus=\sup$, $\odot=\inf$ i $X=\{a,b,c,d\}$. Neka je funkcija $\varphi:X\to I$ definisana sa $\varphi=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Neka je skupovna funkcija $m:\mathcal{P}(X)\to I$ definisana sa $m(\emptyset)=-2$ i $m(S)=\sup_{x\in S}\varphi(x)$ za $S\in\mathcal{P}(X)$, $S\neq\emptyset$.
   (a) Po $x\in I$ rešiti nejednačinu $3\odot\mathbf{1}\le 4\oplus x$, gde je $\mathbf{1}$ neutralni element operacije $\odot$.
   (b) Za $S=\{a,b,c\}$ izračunati $m(S)$.
   (c) Za $S=\{a,b,c\}$ i funkciju $f:X\to I$, $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 6 & -0.5 & 7 \end{pmatrix}$ izračunati $\int_S^{\oplus} f\odot dm$.

FTN, MAS, Fazi modeli odlučivanja, KOLOKVIJUM 1 **decembar 2022.**

1. Neka je $X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(X)$, i neka je idempotentna (odnosno maksitivna) fazi-mera $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ određena gustinom $\varphi=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.
   (a) Izračunati $\mu(S)$ za $S=X$ i $S=A=\{a,c\}$.
   (b) Neka je funkcija $f:X\to[0,\infty)$ definisana sa $f=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 14 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunati vrednost idempotentnog (maksitivnog) integrala funkcije f nad skupovima X i $A=\{a,c\}$.
2. Neka je funkcija $g:[0,\infty]\to[0,\infty]$ definisana sa $g(x)=x^2$, $x\in[0,\infty]$, i neka je
   $$x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y)),\qquad x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y)),\qquad x,y\in[0,\infty].$$
   (a) Neka je $m:\mathcal{B}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]_+$ skupovna funkcija koja je σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Za skup $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n,n+\frac{1}{2^n}\right]$ izračunati $m(S)$.
   (b) Izračunati σ-$\oplus$-$\odot$ pseudo-integral funkcije
   $f:[0,\infty]\to[0,\infty],\ f(x)=2x-4,\ x\in[0,\infty]$
   nad intervalom $[1,4]\in\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, u odnosu na σ-$\oplus$-dekompozabilnu fazi meru $m:\mathcal{B}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]$.
3. Neka je $I=[-2,10]$, $\oplus=\sup$, $\odot=\inf$ i $X=\{a,b,c,d\}$. Neka je funkcija $\varphi:X\to I$ definisana sa $\varphi=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Neka je skupovna funkcija $m:\mathcal{P}(X)\to I$ definisana sa $m(\emptyset)=-2$ i $m(S)=\sup_{x\in S}\varphi(x)$ za $S\in\mathcal{P}(X)$, $S\neq\emptyset$.
   (a) Po $x\in I$ rešiti nejednačinu $3\odot\mathbf{1}\le 4\oplus x$, gde je $\mathbf{1}$ neutralni element operacije $\odot$.
   (b) Za $S=\{a,b,c\}$ izračunati $m(S)$.
   (c) Za $S=\{a,b,c\}$ i funkciju $f:X\to I$, $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 6 & -0.5 & 7 \end{pmatrix}$ izračunati $\int_S^{\oplus} f\odot dm$.

REŠENJA

1. (a) $\mu(X) = \sup\limits_{x\in X}\varphi(x) = \max\{\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)\} = \max\{2,8,6\} = 8,$

$\mu(A) = \sup\limits_{x\in A}\varphi(x) = \max\{\varphi(a),\varphi(c)\} = \max\{2,6\} = 6.$

(b) $\bigvee\limits_X f d\mu = \sup\limits_{x\in X}\{f(x)\cdot\varphi(x)\} = \max\{f(x)\cdot\varphi(x) \mid x\in X\} = \max\{f(a)\cdot\varphi(a), f(b)\cdot\varphi(b), f(c)\cdot\varphi(c)\}$

$= \max\{14\cdot 2, 1\cdot 8, 2\cdot 6\} = \max\{28,8,12\} = 28,$

$\bigvee\limits_A f d\mu = \sup\limits_{x\in A}\{f(x)\cdot\varphi(x)\} = \max\{f(x)\cdot\varphi(x) \mid x\in A\} = \max\{f(a)\cdot\varphi(a), f(c)\cdot\varphi(c)\}$

$= \max\{14\cdot 2, 2\cdot 6\} = \max\{28,12\} = 28.$

<u>Drugi način:</u>

Za datu funkciju f i $\alpha\in[0,\infty]$ je

$$F_\alpha = \{x\in X \mid f(x)\geq\alpha\} = \begin{cases} X=\{a,b,c\} & , \quad \alpha\in[0,1] \\ \{a,c\} & , \quad \alpha\in(1,2] \\ \{a\} & , \quad \alpha\in(2,14] \\ \emptyset & , \quad \alpha\in(14,\infty] \end{cases},$$

$$\mu(F_\alpha) = \sup_{x\in F_\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in\{a,b,c\}}\varphi(x) = \max\{\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)\} = \max\{2,8,6\} = 8 & , \quad \alpha\in[0,1] \\ \sup\limits_{x\in\{a,c\}}\varphi(x) = \max\{\varphi(a),\varphi(c)\} = \max\{2,6\} = 6 & , \quad \alpha\in(1,2] \\ \sup\limits_{x\in\{a\}}\varphi(x) = \varphi(a) = 2 & , \quad \alpha\in(2,14] \\ \sup\limits_{x\in\emptyset}\varphi(x) = 0 & , \quad \alpha\in(14,\infty] \end{cases},$$

te je

$$\bigvee_X f d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]}\{\alpha\cdot\mu(F_\alpha)\}$$

$$= \max\left\{\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\cdot\mu(F_\alpha)\}, \sup_{\alpha\in(1,2]}\{\alpha\cdot\mu(F_\alpha)\}, \sup_{\alpha\in(2,14]}\{\alpha\cdot\mu(F_\alpha)\}, \sup_{\alpha\in(14,\infty]}\{\alpha\cdot\mu(F_\alpha)\}\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{\alpha\in[0,1]}\{8\alpha\}, \sup_{\alpha\in(1,2]}\{6\alpha\}, \sup_{\alpha\in(2,14]}\{2\alpha\}, \sup_{\alpha\in(14,\infty]}\{0\cdot\alpha\}\right\} = \max\{8,12,28,0\} = 28.$$

Za skup $A=\{a,c\}$ je $f\cdot\chi_A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, te je za $\alpha\in[0,\infty]$

$$(F\cdot\chi_A)_\alpha = \{x\in X \mid (f\cdot\chi_A)(x)\geq\alpha\} = \begin{cases} X=\{a,b,c\} & , \quad \alpha=0 \\ \{a,c\} & , \quad \alpha\in(0,2] \\ \{a\} & , \quad \alpha\in(2,14] \\ \emptyset & , \quad \alpha\in(14,\infty] \end{cases},$$

$$\mu((F\cdot\chi_A)_\alpha) = \sup_{x\in(F\cdot\chi_A)_\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in\{a,b,c\}}\varphi(x) = \max\{\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)\} = \max\{2,8,6\} = 8 & , \quad \alpha=0 \\ \sup\limits_{x\in\{a,c\}}\varphi(x) = \max\{\varphi(a),\varphi(c)\} = \max\{2,6\} = 6 & , \quad \alpha\in(0,2] \\ \sup\limits_{x\in\{a\}}\varphi(x) = \varphi(a) = 2 & , \quad \alpha\in(2,14] \\ \sup\limits_{x\in\emptyset}\varphi(x) = 0 & , \quad \alpha\in(14,\infty] \end{cases},$$

te je

$$\bigvee_A f d\mu = \bigvee_X f\cdot\chi_A d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]}\{\alpha\cdot\mu((F\cdot\chi_A)_\alpha)\}$$

$$= \max\left\{\sup_{\alpha\in\{0\}}\{\alpha\cdot\mu((F\cdot\chi_A)_\alpha)\}, \sup_{\alpha\in(0,2]}\{\alpha\cdot\mu((F\cdot\chi_A)_\alpha)\}, \sup_{\alpha\in\alpha\in(2,14]}\{\alpha\cdot\mu((F\cdot\chi_A)_\alpha)\}, \sup_{\alpha\in(14,\infty]}\{\alpha\cdot\mu((F\cdot\chi_A)_\alpha)\}\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{\alpha\in\{0\}}\{8\alpha\}, \sup_{\alpha\in(0,2]}\{6\alpha\}, \sup_{\alpha\in(2,14]}\{2\alpha\}, \sup_{\alpha\in(14,\infty]}\{0\cdot\alpha\}\right\} = \max\{0,12,28,0\} = 28.$$

2. Inverzna funkcija funkcije g je gunkcija $g^{-1}:[0,\infty]\to[0,\infty]$ definisana sa $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty]$. Sledi da je

$x\oplus y = g^{-1}(g(x)+g(y)) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad x\odot y = g^{-1}(g(x)\cdot g(y)) = \sqrt{x^2\cdot y^2} = xy$

za sve $x,y\in[0,\infty]$. Dakle, za $I=[0,\infty]$ je $(I,\oplus,\odot)$ poluprsten tipa [PPT2b] čije su operacije $\oplus$ i $\odot$ generisane rastućom funkcijom g. U ovom slučaju je $\mathbf{0}=0$ jer za sve $x\in I$ važi $\mathbf{0}\oplus x = 0\oplus x = \sqrt{0^2+x^2} = x$ i takođe $x\oplus\mathbf{0} = x$. Relacija $\preceq$ je pri tome standardna relacija $\leq$ te je $I_+ = \{x\in I \mid \mathbf{0}\preceq x\} = \{x\in I \mid 0\leq x\} = I$. Kako je $x\odot y = xy$, $x,y\in I=[0,\infty]$, sledi da je $\mathbf{1}=1$.

(a) Za σ-$\oplus$-dekompozabilnu meru $m : \mathcal{B}_{[0,\infty]} \to [0,\infty]_+$, gde je operacija $\oplus$ generisana funkcijom g, važi da je $\lambda = g \circ m$ Lebegova (Rimanova), i pri tome je $m = g^{-1} \circ \lambda$, i $[0,\infty]_+ = [0,\infty]$. Za $a_i \in [0,\infty]$, $i \in \mathbb{N}$ je

$$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = (a_1 \oplus a_2) \oplus a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \oplus a_3 = \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

i induktivno dobijamo

$\langle 1 \rangle$ - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

Za Lebegovu (Rimanovu) meru λ

$\langle 2 \rangle$ - je $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = b - a$.

Skup S je unija disjunktnih intervala, te koristeći da

$\langle 3 \rangle$ - fazi-mera m je $\oplus$-σ-aditivna,

$\langle 4 \rangle$ formulu za zbir članova geometrijskog reda,

i $S \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}$, dobijamo

$$m(S) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right]\right) \overset{\langle 3 \rangle}{=} \bigoplus_{n=1}^{\infty} m\left(\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right]\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (g^{-1} \circ \lambda)\left(\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right]\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\lambda\left(\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right]\right)\right)$$

$$\overset{\langle 2 \rangle}{=} \bigoplus_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(n + \frac{1}{2^n} - n\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{2^i}} \overset{\langle 1 \rangle}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{1}{2^i}}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}} \overset{\langle 4 \rangle}{=} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = 1.$$

(b) Funkcija $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$, $f(x) = 2x - 4$, $x \in [0,\infty]$ je očigledno merljiva odnosno integrabilna nad $[1,4]$. Pri tome je $\lambda = g \circ m : \mathcal{B}_{[0,\infty]} \to [0,\infty]$ Lebegova mera na $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, te dobijamo

$$\int_{[1,4]}^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_{[1,4]} (g \circ f) \cdot d\lambda\right) = g^{-1}\left(\int_1^4 g(f(\lambda)) d\lambda\right) = g^{-1}\left(\int_1^4 (2\lambda - 4)^2 d\lambda\right)$$

$$= g^{-1}\left(\int_1^4 \left(4\lambda^2 - 16\lambda + 16\right)^2 d\lambda\right) = g^{-1}\left(4\int_1^4 \lambda^2 d\lambda - 16\int_1^4 \lambda d\lambda + 16\int_1^4 d\lambda\right) = g^{-1}\left(4\frac{\lambda^3}{3}\Big|_1^4 - 16\frac{\lambda^2}{2}\Big|_1^4 + 16\lambda\Big|_1^4\right)$$

$$= g^{-1}\left(\frac{4}{3}\left(4^3 - 1\right) - 8\left(4^2 - 1\right) + 16(4 - 1)\right) = g^{-1}(12) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

3. Uređena trojka $(I, \sup, \inf)$ je poluprsten tipa [PPT3] gde je $\mathbf{0} = -2$, $\mathbf{1} = 10$ i $I_+ = I = [-2, 10]$, a funkcija m je maksitivna fazi-mera sa vrednostima u poluprstenu $(I, \sup, \inf)$.

(a) $3 \odot \mathbf{1} \leq 4 \oplus x \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq \max\{4, x\}$.

Kako je $3 < 4 \leq \max\{4, x\}$ za svako $x \in I$, to je svako $x \in I$ rešenje posmatrane nejednačine.

(b) $m(\{a,b,c\}) = \sup\limits_{x \in \{a,b,c\}} \varphi(x) = \max\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\}$

$= \max\{3, -1, 8\} = 8.$

(c) $\displaystyle\int_S^{\oplus} f \odot dm = \sup\{f(x) \wedge \varphi(x) \mid x \in S\}$

$= \max\{f(a) \wedge \varphi(a), f(b) \wedge \varphi(b), f(c) \wedge \varphi(c)\}$

$= \max\{0 \wedge 3, 6 \wedge -1, -0.5 \wedge 8\} = \max\{0, -1, -0.5\} = 0.$