**FTN, MAS, Fazi modeli odlučivanja, KOLOKVIJUM 1** **? 2023.**

1. Neka je $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(X)$, i neka je idempotentna (maksitivna) fazi-mera $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ određena gustinom
$$\varphi=\begin{cases} 3 & , \quad x\le -2 \\ -x & , \quad -2<x\le 0 \\ \sqrt{2x-x^2} & , \quad 0<x\le 1 \\ 1 & , \quad 1<x \end{cases}.$$
   (a) Izračunati $\mu(S)$ za skupove $S=A=\{-0.5,0,0.5\}$, $S=B=[-1,1]$ i $S=C=[-5,1]$.
   (b) Nad skupom $B=[-1,1]$ izračunati integral funkcije $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ definisane sa $f(x)=|1-x|$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Neka je funkcija $g:[0,\infty]\to[0,\infty]$ definisana sa $g(x)=x^2$, $x\in[0,\infty]$, i neka je
$$x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y)),\qquad x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y)),\qquad x,y\in[0,\infty].$$
   (a) Po $x,y\in[0,\infty]$ rešiti jednačinu $x^2\oplus(2\odot x)\oplus\mathbf{1}=\mathbf{0}$, gde su $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ redom neutralni elementi operacija $\oplus$ i $\odot$, i gde je $x^n\overset{\text{def}}{=}\underbrace{x\odot x\odot\ldots\odot x}_{n}$ za sve $n\in\mathbb{N}$ i $x\in[0,\infty]$.
   (b) Izračunati $\sigma$-$\oplus$-$\odot$ pseudo-integral funkcije
   $f:[0,\infty]\to[0,\infty],\ f(x)=\sqrt{x}e^x,\ x\in[0,\infty]$
   nad intervalom $[0,3]\in\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, u odnosu na $\sigma$-$\oplus$-dekompozabilnu fazi meru $m:\mathcal{B}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]$.

3. Neka je $I=[0,\infty]$, $\oplus=\sup$ i $\odot=\inf$. Neka je funkcija $\varphi:\mathbb{R}\to I$ definisana sa $\varphi(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le -2 \\ x+2 & , \quad -2<x\le 0 \\ -\frac{1}{2}x+2 & , \quad 0<x\le 4 \\ 1 & , \quad 4<x \end{cases}$. Neka je skupovna funkcija $m:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to I$ definisana sa $m(\emptyset)=0$ i $m(S)=\sup\limits_{x\in S}\varphi(x)$ za $S\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $S\neq\emptyset$.
   (a) Za $S=[1,5]$ izračunati $m(S)$.
   (b) Za $S=[-3,5]$ i funkciju $f:\mathbb{R}\to I$ definisanu sa $f(x)=\begin{cases} 0.5 & , \quad x\le 0 \\ \frac{1}{4}x & , \quad 0<x \end{cases}$, izračunati $\int\limits_S^{\oplus} f\odot dm$.

**FTN, MAS, Fazi modeli odlučivanja, KOLOKVIJUM 2** **? 2023.**

1. Neka je $X=\{a,b,c\}$ i $\mathcal{F}=\mathcal{P}(X)$. Na merljivom prostoru $(X,\mathcal{P}(X))$, fazi-mera $\mu:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ u širem smislu je definisana sa $\mu(E)=\begin{cases} |E| & , \quad E\neq\{a,b\} \\ 3 & , \quad E=\{a,b\} \end{cases}$, $E\in\mathcal{P}(X)$. Neka je funkcija $f:X\to[0,\infty)$ definisana sa $f=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2.5 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunati Sugenov integral funkcije $f$ nad skupom $A=\{b,c\}$.

2. Neka je funkcija $A_{[2]}:[0,1]^2\to[0,1]$ definisana sa
$A_{[2]}(a_1,a_2)=a_1^2a_2^3,\quad a_1,a_2\in[0,1].$
Dokazati da je $A_{[2]}$ funkcija agregacije. Ispitati da li je idempotentna. Ispitati da li je subaditivna.

3. Neka su funkcije $d_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ i $d_2:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ definisane sa
$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad d_1(x,y)=|x-y|,$
$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad d_2(x,y)=[|x-y|],$
gde je funkcija $[\cdot]:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ definisana sa
$\forall t\in\mathbb{R},\quad [t]=k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\quad\Leftrightarrow\quad k\le|t|<k+1.$
Neka je funkcija agregacije $A_{[2]}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definisana sa
$\forall a,b\in[0,\infty),\quad A_{[2]}(a,b)=a^2\cdot b^3,$
i neka je funkcija $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ definisana sa
$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad d(x,y)=A_{[2]}(d_1(x,y),d_2(x,y)).$
   (a) Dokazati da je funkcija $d$ funkcija rastojanja.
   (b) Dokazati da za funkciju rastojanja $d$ ne važi nejednakost trougla.
   (c) Dokazati da za funkciju $d$ ne važi ultrametrička nejednakost.

1. (a) $\mu(A) = \sup\limits_{x\in X}\varphi(x) = \max\{\varphi(-0.5), \varphi(0), \varphi(0.5)\} = \max\left\{0.5, 0, \sqrt{2\cdot 0.5 - 0.5^2}\right\} = \max\left\{0.5, 0, \sqrt{0.75}\right\} = \sqrt{0.75}$

jer je $\sqrt{0.75} > \sqrt{0.5} > 0.5$,

$$\mu(B) = \sup_{x\in B}\varphi(x) = \sup_{x\in[-1,1]}\varphi(x) = \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\varphi(x),\ \sup_{x\in(0,1]}\varphi(x)\right\} = \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]} -x,\ \sup_{x\in(0,1]}\sqrt{2x-x^2}\right\}$$

$$= \max\left\{1,\ \sup_{x\in(0,1]}\sqrt{2\cdot 1 - 1^2}\right\} = \max\{1,1\} = 1$$

jer je $-x$, $x\in[-1,0]$ opadajuća funkcija koja supremum dostiže u levom kraju intervala $[-1,0]$, a $\sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,1]$ je rastuća funkcija koja supremum dostiže u desnom kraju intervala $(0,1]$. Naime, funkcija $\varphi_1(x) = \sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,1]$ je rastuća jer je $\varphi_1'(x) = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \geq 0$, $x\in(0,1]$.

(b) Kako je

$$f(x) = |1-x| = \begin{cases} 1-x & , \quad 1-x\geq 0 \\ -(1-x) & , \quad 1-x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & , \quad x\leq 1 \\ x-1 & , \quad x>1 \end{cases},$$

sledi da je $f(x) = 1-x$, $x\in[-1,1]$. Dobijamo

$$\bigvee_B f d\mu = \bigvee_{[-1,1]} f d\mu = \sup_{x\in[-1,1]}\{f(x)\cdot\varphi(x)\} = \sup\{f(x)\cdot\varphi(x) \mid x\in[-1,1]\}$$

$$= \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\{f(x)\cdot\varphi(x)\},\ \sup_{x\in(0,1]}\{f(x)\cdot\varphi(x)\}\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\{(1-x)\cdot(-x)\},\ \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\}\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\left\{x^2-x\right\},\ \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\}\right\}.$$

Za funkciju $g_1(x) = x^2-x$, $x\in[-1,0]$ je $g_1'(x) = 2x-1<0$, $x\in[-1,0]$. Sledi da je ona opadajuća na intervalu $[-1,0]$, te supremum dostiže u levom kraju intervala. Dakle, $\sup\limits_{x\in[-1,0]}\left\{x^2-x\right\} = (-1)^2-(-1) = 2$.

Za funkciju $g_2(x) = (1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,1]$ dobijamo da je njen izvod

$$g_2'(x) = -\sqrt{2x-x^2} + (1-x)\cdot\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = -\sqrt{2x-x^2} + \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{-\left(2x-x^2\right)+(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x^2-4x+1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

za $x\in(0,1]$. Dalje je

$$g_2'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-4x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4} = 1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

gde je $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1$, a $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1]$ je stacionarna tačka na intervalu $(0,1]$. Stoga je

$$\sup_{x\in(0,1]} g_2(x) = \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\} = \max\left\{g_2(0), g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), g_2(1)\right\}$$

$$= \max\left\{0, g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0\right\} = g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

jer je $f(x)\geq 0$, $\varphi(x)\geq 0$, te i $f(x)\cdot\varphi(x)\geq 0$ za sve $x\in X=\mathbb{R}$. Pri tome je

$$g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\cdot\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}-\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Sledi da je ona opadajuća na intervalu $(0,1]$, te supremum dostiže u levom kraju intervala. Dakle,

$$\sup_{x\in(0,1]} g_2(x) = g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

te je

$$\bigvee_B f d\mu = \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\left\{x^2-x\right\},\ \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\}\right\} = \max\left\{2,\frac{1}{2}\right\} = 2.$$

2. Inverzna funkcija funkcije $g$ je gunkcija $g^{-1}:[0,\infty]\to[0,\infty]$ definisana sa $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty]$. Sledi da je

$$x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y))=\sqrt{x^2+y^2},\qquad x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y))=\sqrt{x^2\cdot y^2}=xy\qquad x,y\in[0,\infty].$$

Dakle, za $I=[0,\infty]$ je $(I,\oplus,\odot)$ poluprsten tipa [PPT2b] čije su operacije $\oplus$ i $\odot$ generisane rastućom funkcijom $g$. U ovom slučaju je $\mathbf{0}=0$ jer za sve $x\in I$ važi $\mathbf{0}\oplus x=0\oplus x=\sqrt{0^2+x^2}=x$ i takođe $x\oplus\mathbf{0}=x$. Relacija $\preceq$ je pri tome standardna relacija $\leq$ te je $I_+=\{x\in I\mid\mathbf{0}\preceq x\}=\{x\in I\mid 0\leq x\}=I$. Kako je $x\odot y=xy$, $x,y\in I=[0,\infty]$, sledi da je $\mathbf{1}=1$.

(a) Kako za sve $x\in[0,\infty]$ važi $a=x^2\in\mathbb{R}$, $b=2\odot x\in\mathbb{R}$, $\mathbf{0}=0$ i $\mathbf{1}=1$, dobijamo da je

$$x^2\oplus(2\odot x)\oplus\mathbf{1}=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad a\oplus b\oplus 1=0\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{a^2+b^2}\oplus 1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+1^2}=0\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{a^2+b^2+1}=0\quad\Leftrightarrow\quad a^2+b^2+1=0,$$

te je jasno da polazna jednačina nema rešenja u skupu $I=[0,\infty]$.

(b) Funkcija $f:[0,\infty]\to[0,\infty]$, $f(x)=\sqrt{x}e^x$, $x\in[0,\infty]$ je očigledno merljiva odnosno integrabilna nad $[0,3]$. Pri tome je $\lambda=g\circ m:\mathcal{B}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]$ Lebegova mera na $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, te dobijamo

$$\int_{[0,3]}^{\oplus}f\odot dm=g^{-1}\left(\int_{[0,3]}(g\circ f)\cdot d\lambda\right)=g^{-1}\left(\int_0^3 g(f(\lambda))d\lambda\right)=g^{-1}\left(\int_0^3 g\left(\sqrt{\lambda}e^{\lambda}\right)d\lambda\right)=g^{-1}\left(\int_0^3\lambda e^{2\lambda}d\lambda\right).$$

Primenom formule za parcijalnu integraciju sa $u=\lambda$, $du=d\lambda$ i $dv=e^{2\lambda}d\lambda$, gde uz smenu $2\lambda=t$, $d\lambda=\frac{1}{2}dt$ dobijamo $v=\int e^{2\lambda}d\lambda=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t=\frac{1}{2}e^{2\lambda}$, sledi

$$\int_0^3\lambda e^{2\lambda}d\lambda=\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3 e^{2\lambda}d\lambda=\left(\frac{3}{2}e^6-0\right)-\frac{1}{4}e^{2\lambda}\Big|_0^3=\frac{3}{2}e^6-\left(\frac{1}{4}e^6-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^6.$$

Time konačno dobijamo

$$\int_{[0,3]}^{\oplus}f\odot dm=g^{-1}\left(\int_0^3\lambda e^{2\lambda}d\lambda\right)=g^{-1}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^6\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^6}.$$

3. Uređena trojka $(I,\sup,\inf)$ je poluprsten tipa [PPT3] gde je $\mathbf{0}=0$, $\mathbf{1}=\infty$ i $I_+=I=[0,\infty]$, a funkcija $m$ je maksitivna fazi-mera sa vrednostima u poluprstenu $(I,\sup,\inf)$.

(a) $m([1,5])=\sup\limits_{x\in[1,5]}\varphi(x)=\max\left\{\sup\limits_{x\in[1,4]}\varphi(x),\ \sup\limits_{x\in[4,5]}\varphi(x)\right\}=\max\left\{\sup\left\{-\frac{1}{2}x+2\ \middle|\ x\in[1,4]\right\},\ \sup\limits_{x\in[4,5]}1\right\}.$

Očigledno je $\sup\limits_{x\in[4,5]}1=1$, a $h(x)=-\frac{1}{2}x+2$, $x\in[1,4]$ je monotono opadajuća funkcija na $[1,4]$ koja svoj maksimum (supremum) dostiže u levom kraju intervala, te je $\sup\left\{-\frac{1}{2}x+2\ \middle|\ x\in[1,4]\right\}=h(1)=\frac{3}{2}$. Sledi da je

$$m([1,5])=\max\left\{\frac{3}{2},1\right\}=\frac{3}{2}.$$

(b) $\int\limits_{[-3,5]}^{\oplus}f\odot dm=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in[-3,5]\}=\max\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$,

gde je

$b_1=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in[-3,-2]\}$, $\qquad b_2=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in(-2,0]\}$,

$b_3=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in(0,4]\}$, $\qquad b_4=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in(4,5]\}$.

(b.1) $b_1=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in[-3,-2]\}=\sup\limits_{x\in[-3,-2]}\min\{f(x),\varphi(x)\}=\sup\limits_{x\in[-3,-2]}\min\{0.5,0\}=\sup\limits_{x\in[-3,-2]}0=0.$

(b.2) $b_2=\sup\{f(x)\wedge\varphi(x)\mid x\in(-2,0]\}=\sup\limits_{x\in(-2,0]}\min\{f(x),\varphi(x)\}=\sup\limits_{x\in(-2,0]}\min\{0.5,x+2\}$

$$=\max\left\{\sup_{x\in(-2,-1.5]}\min\{0.5,x+2\},\ \sup_{x\in(-1.5,0]}\min\{0.5,x+2\}\right\}$$

$$=\max\left\{\sup_{x\in(-2,-1.5]}\{x+2\},\ \sup_{x\in(-1.5,0]}0.5\right\}=\max\{0.5,0.5\}=0.5.$$

(b.3) $b_3 = \sup\{ f(x) \wedge \varphi(x) \mid x \in (0,4]\} = \sup\limits_{x\in(0,4]} \min\{f(x), \varphi(x)\} = \sup\limits_{x\in(0,4]} \min\left\{\frac{1}{4}x, -\frac{1}{2}x+2\right\}.$

Kako na $(0,4]$ važi

$\frac{1}{4}x \leq -\frac{1}{2}x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -2x+8 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leq 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{8}{3} \in (0,4],$

dalje dobijamo

$$b_3 = \max\left\{ \sup_{x\in\left(0,\frac{8}{3}\right]} \min\left\{\frac{1}{4}x, -\frac{1}{2}x+2\right\}, \sup_{x\in\left(\frac{8}{3},4\right]} \min\left\{\frac{1}{4}x, -\frac{1}{2}x+2\right\}\right\} = \max\left\{ \sup_{x\in\left(0,\frac{8}{3}\right]} \left\{\frac{1}{4}x\right\}, \sup_{x\in\left(\frac{8}{3},4\right]} \left\{-\frac{1}{2}x+2\right\}\right\}.$$

Funkcija $h_1(x) = \frac{1}{4}x$, $x \in \left(0, \frac{8}{3}\right]$ je monotono rastuća te svoj supremum dostiže u desnom kraju intervala, dakle

$$\sup_{x\in\left(0,\frac{8}{3}\right]} \left\{\frac{1}{4}x\right\} = h_1\left(\frac{8}{3}\right) = 6.$$

Funkcija $h_2(x) = -\frac{1}{2}x+2$, $x \in \left(\frac{8}{3}, 4\right]$ je monotono opadajuća te svoj supremum dostiže u levom kraju intervala, dakle

$$\sup_{x\in\left(\frac{8}{3},4\right]} \left\{-\frac{1}{2}x+2\right\} = h_2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Sledi da je

$$b_3 = \max\left\{6, \frac{2}{3}\right\} = 6.$$

(b.4) $b_4 = \sup\{ f(x) \wedge \varphi(x) \mid x \in (4,5]\} = \sup\limits_{x\in(4,5]} \min\{f(x), \varphi(x)\} = \sup\limits_{x\in(4,5]} \min\left\{\frac{1}{4}x, 1\right\}.$

Kako je $\frac{1}{4}x \geq 1$ za sve $x \in (4,5]$, dobijamo

$$b_4 = \sup_{x\in(4,5]} 1 = 1.$$

Konačno dobijamo

$$\int_{[-3,5]}^{\oplus} f \odot dm = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \max\{0, 0.5, 6, 1\} = 6.$$

REŠENJA - KOLOKVIJUM 2

1. Za $\alpha \in [0,\infty]$ je: $\quad F_\alpha(f) = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} = \begin{cases} X & , \quad \alpha \in [0,2] \\ \{a,b\} & , \quad \alpha \in (2,2.5] \\ \{a\} & , \quad \alpha \in (2.5,3] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (3,\infty] \end{cases}$.

   Primenom definicije Sugenovog integrala dobijamo

   $(\mathrm{S})\int\limits_A f d\mu = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in [0,\infty]\} = \max\{A_{[0,2]}, A_{(2,2.5]}, A_{(2.5,3]}, A_{(3,\infty]}\}$,

   gde je

   $A_{[0,2]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in [0,2]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in [0,2]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap X) \mid \alpha \in [0,2]\}$
   $= \sup\{\alpha \wedge \mu(\{b,c\}) \mid \alpha \in [0,2]\} = \sup\{\alpha \wedge 2 \mid \alpha \in [0,2]\} = \sup\{\alpha \mid \alpha \in [0,2]\} = 2$,

   $A_{(2,2.5]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2,2.5]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2,2.5]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap \{a,b\}) \mid \alpha \in (2,2.5]\}$
   $= \sup\{\alpha \wedge \mu(\{b\}) \mid \alpha \in (2,2.5]\} = \sup\{\alpha \wedge 1 \mid \alpha \in (2,2.5]\} = \sup\{1 \mid \alpha \in (2,2.5]\} = 1$,

   $A_{(2.5,3]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2.5,3]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2.5,3]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap \{a\}) \mid \alpha \in (2.5,3]\}$
   $= \sup\{\alpha \wedge \mu(\emptyset) \mid \alpha \in (2.5,3]\} = \sup\{\alpha \wedge 0 \mid \alpha \in (2.5,3]\} = \sup\{0 \mid \alpha \in (2.5,3]\} = 0$,

   $A_{(3,\infty]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (3,\infty]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (3,\infty]\} = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap \emptyset) \mid \alpha \in (3,\infty]\}$
   $= \sup\{\alpha \wedge \mu(\emptyset) \mid \alpha \in (3,\infty]\} = \sup\{\alpha \wedge 0 \mid \alpha \in (3,\infty]\} = \sup\{0 \mid \alpha \in (3,\infty]\} = 0$,

   dakle: $\quad (\mathrm{S})\int\limits_A f d\mu = \max\{2,1,0,0\} = 2.$

2. (a) Dokazujemo da funkcija $A_{[2]}$ jeste funkcija agregacije.
   - (a01) Granični uslovi važe jer je
     $A_{[2]}(0,0) = 0^2 \cdot 0^3 = 0, \qquad A_{[2]}(1,1) = 1^2 \cdot 1^3 = 1.$
   - (a02) Funkcija $A_{[2]}$ je monotono neopadajuća po obe komponente jer su stepene funkcije i množenje nenegativne funkcije na domenu nenegativnih realnih brojeva. Naime, neka su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$ takvi da je $a_1 \leq b_1$ i $a_2 \leq b_2$. Tada je $a_1^2 \leq b_1^2$ i $a_2^3 \leq b_2^3$, te je i
     $A_{[2]}(a_1,a_2) = a_1^2 a_2^3 \leq b_1^2 b_2^3 = A_{[2]}(b_1,b_2).$

   (b) Funkcija $A_{[2]}$ nije idempotentna jer je npr.
   $A_{[2]}(0.1,0.1) = 0.1^2 \cdot 0.1^3 = 0.00001 \neq 0.1.$

   (c) Dokazaćemo navođenjem kontraprimera da $A_{[2]}$ nije subaditivna funkcija agregacije. Za $(a_1,a_2) = (0.3,0.2) \in [0,1]^2$ i $(b_1,b_2) = (0.2,0.4) \in [0,1]^2$, pri čemu je $(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (0.5,0.6) \in [0,1]^2$, dobijamo
   $A_{[2]}(a_1+b_1, a_2+b_2) = A_{[2]}(0.5,0.6) = 0.5^2 \cdot 0.6^3 = 0.054$,
   $A_{[2]}(a_1,a_2) + A_{[2]}(b_1,b_2) = A_{[2]}(0.3,0.2) + A_{[2]}(0.2,0.4) = 0.3^2 \cdot 0.2^3 + 0.2^2 \cdot 0.4^3 = 0.00072 + 0.00256 = 0.00328$,
   dakle $A_{[2]}(a_1+b_1, a_2+b_2) > A_{[2]}(a_1,a_2) + A_{[2]}(b_1,b_2)$.

3. U razvijenom obliku je
   $d(x,y) = A_{[2]}(d_1(x,y), d_2(x,y)) = |x-y|^2 \cdot [|x-y|]^3.$
   za sve $x,y \in \mathbb{R}$.

   (a) Primenom funkcije agregacije na funkcije rastojanja se dobija funkcija rastojanja, te je dovoljno dokazati da su $d_1$ i $d_2$ funkcije rastojanja. Funkcija $d_1$ je dobro poznata $L_1$ metrika, te time i funkcija rastojanja. Dokažimo da i za funkciju $d_2$ važe aksiome funkcije rastojanja.
   - (d01) Za svako $x \in \mathbb{R}$ je $d_2(x,x) = 0$ jer je $0 \leq 0 = [|x-x|] = [0] < 1$.
   - (d02) Za svako $x,y \in \mathbb{R}$ jednakost $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ sledi iz $|x-y| = |y-x|$ odnosno $[|x-y|] = [|y-x|]$.

   (b) Neka je $x = 0.1$, $y = 0.9$ i $z = 1.5$. Tada je
   $d(x,z) = |x-z|^2 \cdot [|x-z|]^3 = 1.4^2 \cdot [1.4]^3 = 1.4^2 \cdot 1^3 = 1.4^2$,
   $$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= |x-y|^2 \cdot [|x-y|]^3 + |y-z|^2 \cdot [|y-z|]^3 \\ &= 0.8^2 \cdot [0.8]^3 + 0.6^2 \cdot [0.6]^3 = 0.8^2 \cdot 0^3 + 0.6^2 \cdot 0^3 \\ &= 0 < 1.4^2 = d(x,z). \end{aligned}$$

   (c) Za funkciju $d$ ne važi ultrametrička nejednakost jer za nju ne važi nejednakost trougla. Naime, za $x_0, y_0, z_0$ za koje ne važi nejednakost trougla (vidi primer pod (b)), ne važi ni ultrametrička nejednakost jer je
   $d(x_0,z_0) > d(x_0,y_0) + d(y_0,z_0) \geq \max\{d(x_0,y_0), d(y_0,z_0)\}$
   ($d(x_0,z_0)$, $d(x_0,y_0)$ i $d(y_0,z_0)$ su nenegativni realni brojevi).