Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi

U ovom poglavlju su navedene neke standardne oznake i standardni pojmovi koji se nadalje koriste, kao i neka pomoćna tvrđenja na koja se poziva u narednim poglavljima.

1.1 Standardne oznake, pojmovi i pomoćna tvrđenja

U ovoj sekciji se navode neke standardne oznake, definicije pojmova i poznata tvrđenja relevantna za pojmove i teoreme navedene u narednim poglavljima.

- $\mathbb{N}$ - Skup prirodnih brojeva.
- $\mathbb{Z}$ - Skup celih brojeva.
- $\mathbb{Q}$ - Skup racionalnih brojeva.
- $\mathbb{R}$ - Skup realnih brojeva.
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, \infty]$ - Prošireni skup realnih brojeva, pri čemu na $\mathbb{R}$ podrazumevamo standardni poredak, i još je $-\infty < x < +\infty$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.
- $\mathbb{C}$ - Skup kompleksnih brojeva.
- $A - B = A \setminus B$ - Razlika skupova.
- $\complement_X(A)$ - Komplement skupa A u odnosu na referentni skup X.
- $\complement(A)$ - Komplement skupa A kada je iz konteksta jasno u odnosu na koji referentni skup se uzima komplement.

- $g \circ f$ - Kompozicija funkcija,

  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in X$.

- Za funkciju $f : A \to B$ i $V \subseteq B$ je $f^{-1}(V) = \left\{ x \in A \mid f(x) \in f^{-1}(V) \right\}$.

- χ_E - Karakteristična funkcija skupa E,

  $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in E \\ 0 & , \quad x \notin E \end{cases}.$

- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ - Donja tačka nagomilavanja niza realnih brojeva,

  $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \inf\limits_{k\geq n} a_k \right\}.$

- $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ - Gornja tačka nagomilavanja niza realnih brojeva,

  $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\limits_{k\geq n} a_k \right\}.$

- $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ - Tačkasta donja tačka nagomilavanja niza realnih funkcija,

  $\left(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \right)(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x).$

- $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ - Tačkasta gornja tačka nagomilavanja niza realnih funkcija,

  $\left(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n \right)(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x).$

- $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ - Tačkasti infimum realnih funkcija,

  $\left(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \right)(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$

- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ - Tačkasti supremum realnih funkcija,

  $\left(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \right)(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ - Tačkasta granična vrednost niza kompleksnih (realnih) funkcija,

  $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n \right)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x).$

- f^+ - Pozitivni deo realne funkcije,

  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$

- f^- - Negativni deo realne funkcije,

  $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$

Za prethodno navedene pojmove važe razne osobine. Nadalje su navedene neke od njih, kao i neka pomoćna tvrđenja koja se koriste u dokazima teorema u narednim poglavljima.

Lema 1.1 *Za svaki niz $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ realnih brojeva važi*

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\limsup\limits_{n\to\infty} (-x_n)$,

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\liminf\limits_{n\to\infty} (-x_n)$,

ukoliko navedene tačke nagomilavanja postoje.

Lema 1.2 *Neka je $M \in \mathbb{R}$, neka je $T \neq \emptyset$ proizvoljan skup indeksa, i neka je $a_t \in (-\infty, M]$, $t \in T$ proizvoljna familija realnih brojeva ne većih od M. Tada je*

$$\sup_{t\in T} a_t = -\inf_{t\in T} (-a_t),$$

odnosno

$$\sup_{t\in T} a_t = M - \inf_{t\in T} (M - a_t).$$

Dokaz: Iz $a_t \in (-\infty, M]$, $t \in T$ sledi da postoji $\sup\limits_{t\in T} a_t$. S druge strane, iz $a_t \in (-\infty, M]$, $t \in T$ sledi $-a_t \in [-M, \infty)$, $t \in T$, te postoji $\inf\limits_{t\in T} (-a_t)$. Neka je $\sup\limits_{t\in T} a_t = a$. To znači da je $a_t \le a$ za sve $t \in T$, i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $t_0 \in T$ takvo da je $a_{t_0} > a - \varepsilon$. Iz $a_t \le a$, $t \in T$ sledi da je $-a_t \ge -a$ za sve $t \in T$, a iz $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_0 \in T$, $a_{t_0} > a - \varepsilon$ sledi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_0 \in T$, $-a_{t_0} > -a + \varepsilon$, što znači da je $\inf\limits_{t\in T} (-a_t) = -a$. Time dobijamo

$$-\inf_{t\in T} (-a_t) = a = \sup_{t\in T} a_t,$$

što je i trebalo dokazati. Iz ove jednakosti sledi i

$$\sup_{t\in T} a_t = -\inf_{t\in T} (-a_t) = M - \left(M + \inf_{t\in T} (-a_t) \right) = M - \inf_{t\in T} (M - a_t).$$

□

Lema 1.3 *Za realne brojeve $a_{ij} \ge 0$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ važi*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Od interesa će biti da u proširenom skupu realnih brojeva, tj. na $[0, \infty]$, dodefinišemo množenje sa ∞. Naime, za $a \in [0, \infty]$ definišemo

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & , \quad 0 < a \le \infty \\ 0 & , \quad a = 0 \end{cases}.$$

Za ovako proširenu operaciju množenja na $[0,\infty]$ ostaju očuvani zakoni asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti množenja prema sabiranju, a kancelativni zakon

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c$$

važi za $a \in (0,\infty)$. Takođe za monotono neopadajuće nizove $a_n \in [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ i $b_n \in [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = b\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Značajnu ulogu u daljim razmatranjima će imati konveksne funkcije.

Definicija 1.1 *Realna funkcija $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, gde je $-\infty \leq a < b \leq \infty$, je* ***konveksna*** *ako za svako $x, y \in (a,b)$ i svako $\lambda \in [0,1]$ važi*

$$\varphi\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \tag{1.1}$$

ili, što je ekvivalentno, ako za sve $s, t, u \in (a,b)$ iz $a < s < t < u < b$ sledi

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u-t}. \tag{1.2}$$

Za konveksne funkcije važe sledeće osobine.

Teorema 1.1 *Neka je $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$.*

(a) *Ako je funkcija φ diferencijabilna na (a,b), tada je ona konveksna na (a,b) ako i samo ako za sve $s, t \in (a,b)$ iz $s < t$ sledi $\varphi'(s) \leq \varphi'(t)$.*

(b) *Ako je funkcija φ konveksna na (a,b), tada je ona i neprekidna na (a,b).*

U primerima će biti korišćene poznate formule za zbir članova geometrijskog niza.

Lema 1.4 *Neka je $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ geometrijski niz realnih brojeva, dakle*

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

za neke $b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $q \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \begin{cases} b_1 & , \quad q = 1 \\ 0 & , \quad q = -1 \wedge n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \\ b_1 & , \quad q = -1 \wedge n \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \\ b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & , \quad |q| \neq 1 \end{cases}$$

i

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \begin{cases} b_1 & , \quad q = 1 \\ \textit{oscilira u tačkama } \pm b_1 & , \quad q = -1 \\ \textit{oscilira u tačkama } \pm \infty & , \quad |q| > 1 \\ \dfrac{b_1}{1-q} & , \quad |q| < 1 \end{cases}$$

1.2 Poluprsten

U ovoj sekciji je definisan pojam poluprstena (ili pseudo-prstena) sa svojim tzv. pseudo-operacijama. U sekciji 3.2 je definisana jedna vrsta fazi mere sa vrednostima u poluprstenu, au sekciji 4.2 je definisana i razmotrena jedna vrsta fazi integrala funkcija sa vrednostima u poluprstenu, zasnovanog na pomenutoj fazi meri sa vrednostima u poluprstenu, videti [1, 3, 4, 5, 6, 7].

Nadalje će se u tekstu koristiti konvencija $\infty \cdot 0 = 0$.

Neka je I neki od intervala $I = [a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, ili $I = [a, b) \subseteq [-\infty, \infty)$, ili $I = (a, b] \subseteq (-\infty, \infty]$. Neka su $\oplus$ i $\odot$ binarne operacije na intervalu I, i neka je relacija $\preceq$ linearni poredak $\leq$ ili $\geq$ na intervalu I.

Definicija 1.2 *Uređena trojka* $(I, \oplus, \odot)$ *je* ***poluprsten*** *ukoliko za operacije* $\oplus$ *i* $\odot$ *važe sledeće aksiome.*

(a) (a.1) *Operacija* $\oplus$ *je asocijativna,*

(a.2) *operacija* $\oplus$ *je komutativna,*

(a.3) *operacija* $\oplus$ *je neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$*, tj.*
$\forall x, y, z \in I,\ x \preceq y \ \Rightarrow\ x \oplus z \preceq y \oplus z,$

(a.4) *za operaciju* $\oplus$ *postoji neutralni element (tzv.* ***nula****)* $\mathbf{0} \in I$*, za koju dakle važi* $x \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus x = x$.

(b) (b.1) *Operacija* $\odot$ *je asocijativna,*

(b.2) *operacija* $\odot$ *je komutativna,*

(b.3) *operacija* $\odot$ *je pozitivno neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$*, tj.*
$\forall x, y, z \in I,\ (x \preceq y\ \wedge\ \mathbf{0} \preceq z) \ \Rightarrow\ x \odot z \preceq y \odot z,$

(b.4) *za operaciju* $\odot$ *postoji neutralni element (tzv.* ***jedinica****)* $\mathbf{1} \in I$*, za koju dakle važi* $x \odot \mathbf{1} = \mathbf{1} \odot x = x$.

(c) *Nula* $\mathbf{0}$ *je nilpotentni element operacije* $\odot$*, dakle*
$\forall x \in I,\ \mathbf{0} \odot x = x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

(d) *Operacija* $\odot$ *je distributivna u odnosu na operaciju* $\oplus$*, dakle*
$\forall x, y, z \in I,\ x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot y),$
$\forall x, y, z \in I,\ (y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x).$

Operacije $\oplus$ *i* $\odot$ *nazivamo redom* ***pseudo-sabiranje*** *i* ***pseudo-množenje***.

✎ Nadalje ćemo sa I_+ označavati skup $I_+ = \{x \in I \mid \mathbf{0} \preceq x\}$. U slučaju kada je $\preceq$ standardna relacija $\leq$, tada je $I_+ = \{x \in I \mid \mathbf{0} \leq x\}$. U slučaju $\preceq$ standardna relacija $\geq$, tada je $I_+ = \{x \in I \mid x \leq \mathbf{0}\}$.

Napomena 1.1 *U poluprstenu je često* $\mathbf{0} = a$ *ili* $\mathbf{0} = b$.

Napomena 1.2 *Za bilo koju od pseudo-operacija $\otimes = \oplus$ ili $\otimes = \odot$, zbog njene asocijativnosti, u izrazima oblika*

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$$

(za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in I$) se zagrade mogu podrazumevati bilo gde te se ne moraju pisati. Kako je operacija $\otimes$ pri tome još i komutativna, sledi da je

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n = x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

za proizvoljnu permutaciju σ skupa $\{1, \ldots, n\}$.

✎ Za pseudo-operaciju $\otimes = \oplus$ ili $\otimes = \odot$ ćemo nadalje koristiti uobičajene skraćene zapise

$$\bigotimes_{i=1}^{n} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} x_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \bigotimes_{i=1}^{n} x_i,$$

za sve $x_i \in I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$, ukoliko navedeni limes postoji.

Postoje tri važna tipa poluprstena.

[PPT1] Operacija $\oplus$ je idempotentna (tipično $\oplus = \sup$ ili $\oplus = \inf$), a operacija $\odot$ nije idempotentna.

[PPT1a] Ako je $\oplus = \sup$, a $\odot$ je proizvoljna operacija na intervalu I koja nije idempotentna, tada je $\mathbf{0} = a$, a relacija $\preceq$ je standardna relacija $\leq$. Pri tome je $\mathbf{1} \neq a$. Posebno je važan slučaj kada se pseudo-množenje $\odot$ može predstaviti pomoću tzv. ***generatora*** g, a to je neprekidna, striktno rastuća, sirjektivna funkcija $g : I \to [0, \infty]$ takva da je

$$g(\mathbf{0}) = g(a) = 0,$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)), \quad x, y \in I.$$

[PPT1b] Ako je $\oplus = \inf$, a $\odot$ je proizvoljna operacija na intervalu I koja nije idempotentna, tada je $\mathbf{0} = b$, a relacija $\preceq$ je standardna relacija $\geq$. Pri tome je $\mathbf{1} \neq b$. Posebno je važan slučaj kada se pseudo-množenje $\odot$ može predstaviti pomoću ***generatora*** g, tj. neprekidne, striktno opadajuće, sirjektivne funkcije $g : I \to [0, \infty]$ takve da je

$$g(\mathbf{0}) = g(b) = 0,$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)), \quad x, y \in I.$$

[PPT2] Obe operacije $\oplus$ i $\odot$ su generisane neprekidnom i striktno monotonom funkcijom $g : I \to [0, \infty]$, dakle

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad x, y \in I,$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)), \quad x, y \in I.$$

[PPT2a] U slučaju kada je g monotono rastuća funkcija, tada je $g(\mathbf{0}) = 0$ odnosno $\mathbf{0} = g^{-1}(0)$, relacija $\preceq$ je standardna relacija poretka $\leq$, i $I_+ = \{x \in I \mid \mathbf{0} \leq x\}$.

[PPT2b] U slučaju kada je g monotono opadajuća funkcija, tada je $g(\mathbf{0}) = \infty$ odnosno $\mathbf{0} = g^{-1}(\infty)$, relacija $\preceq$ je standardna relacija poretka $\geq$, i $I_+ = \{x \in I \mid x \leq \mathbf{0}\}$.

Poluprsten ovog tipa se naziva ***g-poluprsten***.

[PPT3] Obe operacije $\oplus$ i $\odot$ su idempotentne, tipično $(I, \oplus, \odot) = (I, \sup, \inf)$ ili $(I, \oplus, \odot) = (I, \inf, \sup)$.

Što se tiče tipa [PPT2], na osnovu Aczel-ove teoreme reprezentacije, za svaku striktno rastuću operaciju $\oplus$ postoji striktno monotona, sirjektivna funkcija tj. ***generator*** $g : I \to [0, \infty]$ operacije $\oplus$ takva da je $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ i $g(\mathbf{0}) = 0$. Ako je $\mathbf{0} = a$, tada je g rastuća funkcija i važi $g(a) = 0$, $g(b) = \infty$, i funkcija g je izomorfizam između $([a, b], \oplus)$ i $([0, \infty], +)$. U slučaju $\mathbf{0} = b$, situacija je obrnuta. Pseudo-množenje definisano sa $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$ je tada takva operacija da je uređena trojka $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten.

Napomena 1.3 *U slučaju pseudo-operacije $\otimes = \oplus$ ili $\otimes = \odot$ generisane neprekidnom, striktno monotonom funkcijom $g : I \to [0, \infty]$ sa*

$$x \otimes y = g^{-1}(g(x) \times g(y)), \quad x, y \in I$$

gde je $\times = +$ za $\otimes = \oplus$ i $\times = \cdot$ za $\otimes = \odot$, primetimo da iz asocijativnosti operacija $\otimes$ i $\times$ sledi (vidi napomenu 1.2)

$$\begin{aligned} x \otimes y \otimes z = (x \otimes y) \otimes z &= g^{-1}(g(x \otimes y) \times g(z)) \\ &= g^{-1}\left(g\left(g^{-1}(g(x) \times g(y))\right) \times g(z)\right) \\ &= g^{-1}((g(x) \times g(y)) \times g(z)) \\ &= g^{-1}(g(x) \times g(y) \times g(z)) \end{aligned}$$

za sve $x, y, z \in I$, a zatim i induktivno

$$\bigotimes_{i=1}^{n} x_i = g^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{n} g(x_i)\right)$$

za sve $x_i \in I$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i svako $n \geq 2$. Koristeći neprekidnost funkcije g, te stoga i funkcije g^{-1}, sledi

$$\begin{aligned} \bigotimes_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \bigotimes_{i=1}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty} g^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{n} g(x_i)\right) &= g^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} \bigtimes_{i=1}^{n} g(x_i)\right) \\ &= g^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} g(x_i)\right) \end{aligned}$$

za sve $x_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$, ukoliko $\lim_{n\to\infty} \bigtimes_{i=1}^{n} g(x_i)$ postoji.

Dakle, za operacije $\oplus$ i $\odot$ pseudo-prstena $(I, \oplus, \odot)$ koje su generisane neprekidnom, striktno monotonom funkcijom $g : I \to [0, \infty]$ sa

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad x, y \in I,$$

odnosno

$$x \odot y = g^{-1}\left(g\left(x\right) \cdot g\left(y\right)\right), \quad x, y \in I,$$

važi da je

$$\bigoplus_{i=1}^{n} x_i = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)\right),$$

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} g\left(x_i\right)\right),$$

odnosno

$$\bigodot_{i=1}^{n} x_i = g^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)\right),$$

$$\bigodot_{i=1}^{\infty} x_i = g^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\infty} g\left(x_i\right)\right),$$

za sve $x_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$, *ukoliko postoji* $\sum_{i=1}^{\infty} g\left(x_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)$ *odnosno* $\prod_{i=1}^{\infty} g\left(x_i\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)$.

Primer 1.1 *Slede primeri za svaki od gore pomenutih tipova poluprstena.*

[PPT1] (a) *Uređena trojka* $\left([-\infty, \infty), \sup, +\right)$ *je poluprsten. Pri tome je u njemu* $\mathbf{0} = -\infty$ *i* $\mathbf{1} = 0$, *a pseudo-množenje* $\odot = +$ *je generisano funkcijom* $g\left(x\right) = e^x$. *Naime, za sve* $x, y \in [-\infty, \infty)$ *je*

$$x \odot y = x + y = g^{-1}\left(g\left(x\right) \cdot g\left(y\right)\right) = \ln\left(e^x \cdot e^y\right) = \ln\left(e^{x+y}\right) = x + y.$$

Uz konvenciju $(-\infty) + (+\infty) = -\infty$, *i* $\left([-\infty, \infty], \sup, +\right)$ *je poluprsten.*

Analogno, uređena trojka $\left((-\infty, \infty], \inf, +\right)$ *je takođe poluprsten.*

(b) *Uređena trojka* $\left([0, \infty], \sup, \cdot\right)$, *uz konvenciju* $0 \cdot \infty = 0$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = 0$ *i* $\mathbf{1} = 1$. *Maksitivna fazi mera iz sekcije* 3.1 *i odgovarajući maksitivni integral iz sekcije* 4.1 *imaju vrednosti u ovom poluprstenu.*

[PPT2] (a) *Za monotono rastući generator* $g : [-\infty, \infty) \to [0, \infty]$, $g\left(x\right) = e^x$, *uz konvencije* $e^{-\infty} = 0$, $\ln 0 = -\infty$ *i* $-\infty + x = -\infty$, $x \in [-\infty, \infty)$, *dobijaju se na intervalu* $[-\infty, \infty)$ *operacije*

$$x \oplus y = \ln\left(e^x + e^y\right), \quad x, y \in [-\infty, \infty),$$

$$x \odot y = x + y, \quad x, y \in [-\infty, \infty).$$

Uređena trojka $\left([-\infty, \infty), \oplus, \odot\right)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = -\infty$ *i* $\mathbf{1} = 0$.

(b) *Za monotono rastući generator* $g : [0, \infty] \to [0, \infty]$, $g\left(x\right) = x^2$, *uz konvencije* $0 \cdot \infty = 0$ *i* $x + \infty = \infty$, $x \in [-\infty, \infty)$, *dobijaju se na intervalu* $[0, \infty]$ *operacije*

$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x, y \in [0, \infty],$$
$$x \odot y = x \cdot y, \quad x, y \in [0, \infty].$$

Uređena trojka $([0, \infty], \oplus, \odot)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = 0$ *i* $\mathbf{1} = 1$.

[PPT3] *Neka je* $a, b \in [-\infty, \infty]$.

(a) *Uređena trojka* $([a, b), \sup, \inf)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = a$ *i* $\mathbf{1} = b$*, a relacija* $\preceq$ *je uobičajeni poreak* $\leq$.

(b) *Uređena trojka* $([a, b), \inf, \sup)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = b$ *i* $\mathbf{1} = a$*, a relacija* $\preceq$ *je uobičajeni obrnuti poredak* $\geq$.

Glava 2

Fazi logika

U ovom poglavlju se razmatraju pojmovi iz fazi logike kao jedan od matematičkih alata koji se primenjuju u fazi teoriji odlučivanja.

2.1 Komponente fazi logičkog sistema

U ovoj sekciji se navode osnovni pojmovi fazi logičkog sistema, i kratak opis njegovih komponenti. Svaki fazi sistem se sastoji iz sledećih komponenti.

- Ulazne

Glava 3

Fazi mere

U ovom poglavlju je prikazana opšta definicija fazi mere, kao i dodatne važne osobine koje ona može da ima. Takođe su prikazani neki specijalni tipovi fazi mera. Na nekim od tih tipova su zasnovani određeni tipovi fazi integrala iz poglavlja 4.

3.1 Maksitivna (idempotentna) mera

U ovoj sekciji je navedena definicija tzv. maksitivne mere, kao i njene osnovne osobine, vidi [3, 8]. Maksitivna mera je jedna vrsta fazi mere u širem smislu. Bazirana je na operaciji max odnosno sup, koje ćemo u daljem tekstu uglavnom označavati sa $\vee$. U odnosu na klasičnu meru, uslov σ-aditivnosti se u definiciji maksitivne mere zamenjuje uslovom „maksitivnosti".

U definiciji maksitivne mere figuriše pojam usmerenog poretka i uopštenog niza. Sledi najpre definicija usmerenog poretka.

Definicija 3.1 *Binarna relacija $\preceq$ skupa $\mathcal{J} \neq \emptyset$ se naziva* ***usmereni poredak*** *ukoliko ima sledeće osobine.*

(1) $\forall x \in \mathcal{J},\ x \preceq x,$ *(refleksivnost)*

(2) $\forall x, y, z \in \mathcal{J},\ (x \preceq y\ \wedge\ y \preceq z)\ \Rightarrow\ x \preceq z,$ *(tranzitivnost)*

(3) *svaki dvočlani skup je ograničen odozgo, tj.*

$\forall x, y \in \mathcal{J},\ \exists z \in \mathcal{J},\ x \preceq z\ \wedge\ y \preceq z.$

Skup A je ***usmereni skup*** *ukoliko je na njemu definisan usmereni poredak.*

Uopšteni niz se definiše u odnosu na usmereni poredak. Elementi uopštenog niza su indeksirani elementima usmerenog skupa.

Definicija 3.2 *Neka je $\preceq$ usmereni poredak na skupu $\mathcal{J} \neq \emptyset$, i neka je $\mathcal{F} \neq \emptyset$ proizvoljan skup.* ***Uopšteni niz*** *elemenata skupa $\mathcal{F}$ je neka funkcija iz skupa $\mathcal{J}$ u skup $\mathcal{F}$.*

✎ Uopšteni niz označavamo sa $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}, \preceq\}$, ili skraćeno sa $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$ ili x_α, $\alpha \in \mathcal{J}$ ako se podrazumeva o kojoj se relaciji usmerenog poretka $\preceq$ na skupu $\mathcal{J}$ radi. Pri tome je $x_\alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathcal{J}$.

Svaki običan niz elemenata bilo kog skupa jeste i uopšteni niz kod koga je indeksni skup, tj. usmereni skup zapravo skup $\mathbb{N}$ opremljen standardnom relacijom poretka $\leq$.

Familiju skupova indeksiranih elementima usmerenog skupa nazivamo ***uopštenim nizom skupova***. Za uopštene nizove skupove definišemo odgovarajuće vrste monotonosti.

Definicija 3.3 *Neka je A_j, $j \in \mathcal{J}$ proizvoljan uopšteni niz nekih skupova.*

(a) *Uopšteni niz skupova A_j, $j \in \mathcal{J}$ je* ***monotono neopadajući*** *ukoliko za sve $j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ iz $j_1 \preceq j_2$ sledi $A_{j_1} \subseteq A_{j_2}$.*

(b) *Uopšteni niz skupova A_j, $j \in \mathcal{J}$ je* ***monotono rastući*** *ukoliko za sve $j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ iz $j_1 \preceq j_2$ sledi $A_{j_1} \subset A_{j_2}$.*

(c) *Uopšteni niz skupova A_j, $j \in \mathcal{J}$ je* ***monotono nerastući*** *ukoliko za sve $j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ iz $j_1 \preceq j_2$ sledi $A_{j_1} \supseteq A_{j_2}$.*

(d) *Uopšteni niz skupova A_j, $j \in \mathcal{J}$ je* ***monotono opadajući*** *ukoliko za sve $j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ iz $j_1 \preceq j_2$ sledi $A_{j_1} \supset A_{j_2}$.*

Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup, i neka je $\preceq$ usmereni poredak na nekom skupu indeksa $\mathcal{J}$.

Definicija 3.4 ***Maksitivna mera****, zvana i* ***idempotentna mera****, je funkcija $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ sa sledećim osobinama.*

[MM1] $\mu(\emptyset) = 0$.

[MM2] $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$.

[MM3] *Za svaki skup indeksa $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, i svaki monotono neopadajući uopšteni niz skupova $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in \mathcal{I}$ (dakle $A_i \subseteq A_j$ za sve $i \preceq j$, $i, j \in \mathcal{I}$) važi*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \mu(A_i).$$

Neka je dalje u $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova skupa X takva da je $\emptyset \in \mathcal{E}$.

Definicija 3.5 *Za maksitivnu meru $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ kažemo da je* ***τ-glatka u odnosu na $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$****, ili skraćeno,* ***$\mathcal{E}$-maksitivna mera*** *ukoliko*

[MMTG] *za svaki skup indeksa* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$*, i svaki monotono nerastući niz skupova* $A_i \in \mathcal{E}$*,* $j \in \mathcal{I}$ *elemenata familije* $\mathcal{E}$ *(dakle* $A_i \supseteq A_j$ *za sve* $i \preceq j$*,* $i, j \in \mathcal{I}$*) važi*

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i\right) = \inf_{i\in\mathcal{I}} \mu(F_i).$$

Definicija 3.6 ***Maksitivna verovatnosna mera****, ili skraćeno* ***maksitivna verovatnoća*** *je maksitivna mera na* X *za koju važi*

[MMP] $\mu(X) = 1$.

Napomena 3.1 *Maksitivna verovatnoća će nadalje biti označavana sa* Π*. Takođe ćemo za* $\mu(\{x\})$ *i* $\Pi(\{x\})$ *koristiti skraćene zapise* $\mu(x)$ *i* $\Pi(x)$ *redom.*

Napomena 3.2 *U teoremi* 3.1 *će biti dokazano da je svaka maksitivna mera monotona skupovna funkcija, te za maksitivnu verovatnoću* Π *iz monotonosti i* $\Pi(X) = 1$ *sledi da je kodomen maksitivne verovatnoće interval* $[0, 1]$*, dakle* $\Pi : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$.

Definicija 3.7 *Za proizvoljnu maksitivnu meru* $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$*, funkcija* $\varphi_\mu : X \to [0, \infty]$ *definisana sa* $\varphi_\mu(x) = \mu(\{x\})$*,* $x \in X$ *(iz napomene* 3.1*) se naziva* ***gustina*** *maksitivne mere* μ*.*

Kao što ćemo videti u teoremama 3.4 i 3.5, gustina φ_μ maksitivne mere μ jednoznačno određuje maksitivnu meru μ u smislu $\mu(A) = \sup_{x\in A} \varphi_\mu(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$. Pri tome, maksitivna mera je fazi mera sa određenim osobinama.

Teorema 3.1 *Maksitivna mera* $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *na* $\mathcal{P}(X)$ *je subaditivna fazi mera u širem smislu. (? UBACITI ? ... i poluneprekidna je odozdo.)*

Dokaz:

[FM01] Po definiciji maksitivne mere je $\mu(\emptyset) = 0$.

[FM02] Neka je $A, B \in \mathcal{P}(X)$ i $A \subseteq B$. Sledi

$$\mu(B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B) \geq \mu(A).$$

[FM05] Neka je $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Zbog [MM2], iz $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$ sledi da je $\mu(A \cup B) \leq \mu(A)$ i $\mu(A \cup B) \leq \mu(B)$, te sabiranjem $[*]$ ove dve nejednakosti dobijamo

$$\mu(A \cup B) \leq 2\mu(A \cup B) \overset{[*]}{\leq} \mu(A) + \mu(B).$$ □

Induktivnom primenom aksiome [MM2] iz definicije 3.4 maksitivne mere se dobija i sledeća njena osobina.

Teorema 3.2 *Neka je $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ maksitivna mera na $\mathcal{P}(X)$, i neka je $A_j \in \mathcal{P}(X)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ proizvoljna konačna familija skupova. Tada je*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \bigvee_{j=1}^{n} \mu(A_j) \tag{3.1}$$

odnosno

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sup_{j\in\{1,\ldots,n\}} \mu(A_j)\,. \tag{3.2}$$

Neka je i nadalje $(\mathcal{J},\preceq)$ usmeren skup. Posledica teoreme 3.2 i aksiome [MM3] iz definicije 3.4 maksitivne mere je i sledeće tvrđenje.

Teorema 3.3 *Neka je $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ maksitivna mera na $\mathcal{P}(X)$, i neka je $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in \mathcal{I}$ proizvoljna familija skupova za proizvoljan skup indeksa $\mathcal{I}$. Tada je*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) = \sup_{i\in\mathcal{I}} \mu(A_i)\,. \tag{3.3}$$

Dokaz: Neka je

$$\mathcal{K}_{\mathcal{I}} = \{\,\{i_1,i_2,\ldots,i_n\} \mid n\in\mathbb{N},\ i_k\in\mathcal{I}, k\in\{1,\ldots,n\}\}$$

skup svih konačnih podskupova skupa indeksa $\mathcal{I}$, i neka je

$$A_K \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in K} A_i, \quad K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}},$$

$$\mathcal{A} = \{\,A_K \mid K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}\}\,.$$

Neka je $\sqsubseteq$ binarna relacija skupa $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ definisana sa

$$K_1 \sqsubseteq K_2 \quad\Leftrightarrow\quad A_{K_1} \subseteq A_{K_2}.$$

Iz refleksivnosti i tranzitivnosti relacije $\subseteq$ sledi refleksivnost i tranzitivnost relacije $\sqsubseteq$, a za proizvoljne $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ očigledno važi $K = K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ i $K_1 \sqsubseteq K$ i $K_1 \sqsubseteq K$. Dakle, $\sqsubseteq$ je usmereni poredak na skupu $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$, a iz same definicije relacije $\sqsubseteq$ sledi da je $\mathcal{A}$ neopadajući uopšteni niz skupova.

Koristeći

$\langle 1\rangle$ aksiomu [MM3] iz definicije 3.4,

$\langle 2\rangle$ teoremu 3.2,

dobijamo

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}} A_K\right) \overset{\langle 1\rangle}{=} \sup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}} \mu(A_K) = \sup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}} \mu\left(\bigcup_{i\in K} A_i\right)$$
$$\overset{\langle 2\rangle}{=} \sup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}} \left(\bigvee_{i\in K} \mu(A_i)\right). \qquad \langle 3\rangle$$

Kako je svako K konačan skup, to za svako K postoji $i(K)\in K$ takvo da je

$$\bigvee_{i\in K}\mu\left(A_i\right)=\mu\left(A_{i(K)}\right),$$

te je stoga

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\right)\overset{\langle 3\rangle}{=}\sup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}\left(\bigvee_{i\in K}\mu\left(A_i\right)\right)=\sup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}\mu\left(A_{i(K)}\right). \qquad \langle 4\rangle$$

Kako je $\tilde{\mathcal{I}}=\{\,i\,(K)\mid K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}\}\subseteq\mathcal{I}$, sledi nejednakost

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\right)\overset{\langle 4\rangle}{=}\sup_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}\mu\left(A_{i(K)}\right)=\sup_{i\in\tilde{\mathcal{I}}}\mu\left(A_i\right)\le\sup_{i\in\mathcal{I}}\mu\left(A_i\right). \qquad \langle 5\rangle$$

S druge strane, zbog monotonosti maksitivne mere (teorema 3.1), iz relacije $\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\supseteq A_j$, $j\in\mathcal{I}$, sledi da je $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\right)\ge\mu\left(A_j\right)$, $j\in\mathcal{I}$. Primenom osobina operacije sup iz poslednjih nejednakosti sledi

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\right)\ge\sup_{j\in\mathcal{I}}\mu\left(A_j\right). \qquad \langle 6\rangle$$

Iz nejednakosti ⟨5⟩ i ⟨6⟩ sledi jednakost (3.3). □

Definicija 3.8 *Osobina maksitivnih mera* (3.3) *iz teoreme* 3.3 *se naziva* ***τ-maksitivnost***.

Sledi jedan jednostavan primer maksitivne mere.

Primer 3.1 *Neka je funkcija* $\Pi:\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\to[0,\infty]$ *definisana sa* $\Pi\left(\emptyset\right)=0$ *i* $\Pi\left(A\right)=1-\dfrac{1}{\sup A}$ *za* $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{N}$.

Funkcija Π *je maksitivna verovatnoća na skupu* $\mathbb{N}$. *Aksioma* [MM1] *važi po definiciji funkcije* Π. *Aksioma* [MM2] *je zadovoljena jer za sve* $A,B\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ *važi*

$$\begin{aligned}\Pi\left(A\cup B\right)&=1-\frac{1}{\sup\left\{A\cup B\right\}}=1-\frac{1}{\max\left\{\sup A,\sup B\right\}}\\&=1-\min\left\{\frac{1}{\sup A},\frac{1}{\sup B}\right\}=\max\left\{1-\frac{1}{\sup A},1-\frac{1}{\sup B}\right\}\\&=\Pi\left(A\right)\vee\Pi\left(B\right).\end{aligned}$$

Dokažimo aksiomu [MM3]. *Neka je* $(\mathcal{J},\preceq)$ *proizvoljan usmeren skup, i neka je* $A_i\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$, $i\in\mathcal{I}\subseteq\mathcal{J}$ *proizvoljan monotono neopadajući niz podskupova skupa* $\mathbb{N}$. *Koristeći osobine operacija* sup *i* inf *dobijamo*

$$\begin{aligned}\Pi\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\right)&=1-\frac{1}{\sup\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}A_i\right)}=1-\frac{1}{\sup_{i\in\mathcal{I}}\left(\sup A_i\right)}=1-\inf_{i\in\mathcal{I}}\left(\frac{1}{\sup A_i}\right)\\&=\sup_{i\in\mathcal{I}}\left(1-\frac{1}{\sup A_i}\right)=\sup_{i\in\mathcal{I}}\Pi\left(A_i\right).\end{aligned}$$

Dakle, Π *je maksitivna mera, i preostaje još da se dokaže da je maksitivna verovatnoća. Trivijalno dobijamo*

$$\Pi(\mathbb{N}) = 1 - \frac{1}{\sup \mathbb{N}} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1,$$

čime je dokaz završen.

Sledeća teorema nam daje jednoznačnu određenost maksitivne mere njenom gustinom.

Teorema 3.4 *Neka je* $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *maksitivna mera na* $\mathcal{P}(X)$*. Tada za njenu gustinu* $\varphi_\mu : X \to [0, \infty]$ *važi da je*

$$\mu(A) = \sup_{x \in A} \varphi_\mu(x) \tag{3.4}$$

za svako $A \in \mathcal{P}(X)$*.*

Dokaz: Kako je $\varphi_\mu(x) = \mu(\{x\})$, $x \in X$, tvrđenje sledi iz teoreme 3.3. $\square$

Sledeća teorema nam daje obrnuto tvrđenje u odnosu na teoremu 3.4, odnosno da je svaka funkcija $\varphi : X \to [0, \infty]$ gustina jedne maksitivne mere.

Teorema 3.5 *Neka je* $\varphi : X \to [0, \infty]$ *proizvoljna funkcija. Tada je skupovna funkcija* $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *definisana sa*

$$\mu(A) = \sup_{x \in A} \varphi(x), \quad A \in \mathcal{P}(X) \tag{3.5}$$

maksitivna mera na $\mathcal{P}(X)$*, čija je gustina funkcija* φ*.*

Dokaz: Dokazujemo aksiome maksitivne mere iz definicije 3.4.

[MM1] $\mu(\emptyset) = 0$ sledi iz konvencije $\sup \emptyset = 0$.

[MM2] Posmatrajmo proizvoljne $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Koristeći osobine supremuma i maksimuma dobijamo

$$\mu(A \cup B) = \sup_{x \in A \cup B} \varphi(x) = \sup_{x \in A} \varphi(x) \vee \sup_{x \in B} \varphi(x) = \mu(A) \vee \mu(B).$$

[MM3] Neka je $(\mathcal{I}, \preceq)$ proizvoljan usmeren skup, i neka je $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in \mathcal{I}$ proizvoljan monotono neopadajući uopšteni niz skupova. Koristeći osobinu supremuma koja važi za proizvoljan skup indeksa $\mathcal{I}$ i proizvoljnu familiju skupova $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in \mathcal{I}$ dobijamo

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \sup_{x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i} \varphi(x) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \left(\sup_{x \in A_i} \varphi(x)\right) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \mu(A_i).$$

$\square$

3.2 Fazi mera sa vrednostima u poluprstenu

U ovoj sekciji je navedena definicija fazi mere sa vrednostima u tzv. poluprstenu, kao i njene osnovne osobine. U zavisnosti od tri moguća tipa poluprstena su navedene odgovarajuće aksiome ove fazi mere. Ova fazi mera je u literaturi poznata još i pod nazivima pseudo-mera, ili $\oplus$-dekompozibilna mera, vidi [2, 3, 5].

Neka je $(I, \oplus, \odot)$ poluprsten, gde je I neki od intervala $[a,b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $[a,b) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ili $(a,b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, sa standardnom relacijom poretka $\leq$, i sa neutralnim elementima $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ redom operacija $\oplus$ i $\odot$. Označimo

$$I_+ = \{\, x \in I \mid \mathbf{0} \leq x \,\}. \tag{3.6}$$

Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup, i neka je $\mathcal{X}$ proizvoljna σ-algebra podskupova skupa X. U odnosu na σ-algebru $\mathcal{X}$, definišemo $\oplus$-dekompozabilnu meru i σ-$\oplus$-dekompozabilnu meru sa vrednostima u poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$.

Definicija 3.9 *Skupovna funkcija $m : \mathcal{X} \to I_+$ je **$\oplus$-dekompozabilna mera** ukoliko ima sledeće osobine.*

[DM1] $m(\emptyset) = \mathbf{0}$.

[DM2] *U zavisnosti od toga da li je $\oplus$ idempotentna operacija ili nije,*

- [DM2a] *ako $\oplus$ nije idempotentna operacija,*
  $\forall A, B \in \mathcal{X},\ \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B),$
- [DM2b] *ako je $\oplus$ idempotentna operacija (tipično* min *ili* max*),*
  $\forall A, B \in \mathcal{X},\ \ m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B).$

*Specijalno, za $\oplus = \max$, funkciju m nazivamo još i **konačno maksitivnom merom**.*

Definicija 3.10 *Neka je $m : \mathcal{X} \to I_+$ proizvoljna $\oplus$-dekompozabilna mera. Kažemo da je m **σ-$\oplus$-dekompozabilna mera** ukoliko, u zavisnosti toga da li je $\oplus$ idempotentna operacija ili nije,*

[DM3a] *ako $\oplus$ nije idempotentna operacija, za svaki niz po parovima disjunktnih skupova $A_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ važi*

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

[DM3b] *ako je $\oplus$ idempotentna operacija, za svaki niz skupova $A_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ važi*

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

*Specijalno, za $\oplus = \max$, funkciju m nazivamo još i **prebrojivo maksitivnom merom**.*

Definicija 3.11 *Za* $\oplus = \max$ *i maksitivnu meru* $m : \mathcal{X} \to I_+$ *kažemo da je* ***kompletno maksitivna***

Definicija 3.12 *Ako je* $\oplus = \max$*, tada je maksitivna mera* $m : \mathcal{X} \to I_+$ ***kompletno maksitivna*** *ako za svaki skup indeksa* J *i svaku familiju skupova* $A_j \in \mathcal{X}$*,* $j \in J$ *sa osobinom* $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{X}$ *važi*

$$m\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \sup_{j\in J} m\left(A_j\right). \tag{3.7}$$

Napomena 3.3 *Kompletno maksitivna mera je zapravo idempotentna mera iz sekcije* 3.1*, i ona je jednoznačno određena svojom gustinom* φ_μ*, vidi teoreme* 3.4 *i* 3.5*, gde se umesto intervala* $[0, \infty]$ *uzima* I_+ *kao skup vrednosti kompletno maksitivne mere i njene gustine. Dakle, za kompletno maksitivnu* sup-*dekompozabilnu meru* $m : \mathcal{X} \to I_+$ *i njenu gustinu* $\varphi_m : X \to I_+$ *definisanu sa* $\varphi_m(x) = m(\{x\})$*,* $x \in X$ *važi da je* $m(S) = \sup_{x\in S} \varphi_m(x)$ *za svako* $S \in \mathcal{X}$*. I obratno, za svaku funkciju* $\varphi : X \to I_+$ *je skupovna funkcija* $m : \mathcal{X} \to I_+$ *definisana sa* $m(S) = \sup_{x\in S} \varphi(x)$*,* $S \in \mathcal{X}$ *jedna kompletno maksitivna* sup-*dekompozabilna mera.*

$\oplus$-dekompozabilnu meru $m : \mathcal{X} \to I_+$ možemo smatrati fazi merom u širem smislu, iako ne strogo u smislu definicije ??????????. Naime, s jedne strane, po definiciji je $m(\emptyset) = \mathbf{0}$. S druge strane, m je monotona funkcija jer iz $A \subseteq B$ sledi $B = A \cup (B \setminus A)$ gde su A i $B \setminus A$ disjunktni skupovi, te iz [DM2] sledi $m(B) = m(A) \oplus m(B \setminus A)$, a kako je $\mathbf{0} \preceq m(B)$, $\mathbf{0} \preceq m(A)$ i $\mathbf{0} \preceq m(B \setminus A)$, sledi da je $m(A) \preceq m(B)$.

Napomena 3.4 *Ako je* m *neka* σ-$\oplus$-*dekompozabilna mera pri čemu je operacija* $\oplus$ *generisana generatorom* g*, tada je* $\mu = g \circ m$ *Lebesgue-ova* σ-*aditivna mera, i pri tome važi* $m = g^{-1} \circ \mu$*, vidi* [5].

Glava 4

Fazi integrali

U ovom poglavlju su prikazani neki tipovi fazi integrala koji su od značaja u fazi teoriji odlučivanja.

Za proizvoljan skup $X \neq \emptyset$ i funkciju $f : X \to [-\infty, \infty]$ uvedimo oznake

$$F_\alpha(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [-\infty, \infty], \tag{4.1}$$

$$F_{\alpha+}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in [-\infty, \infty]. \tag{4.2}$$

Skup $F_\alpha(f)$ se naziva ***α-nivo skup funkcije*** f, ***α-nivo skup funkcije*** a skup $F_{\alpha+}(f)$ se naziva ***strogi α-nivo skup funkcije*** f. ***strogi α-nivo skup funkcije*** Možemo uočiti neke njihove osobine.

Lema 4.1 *Za α-nivoe i stroge α-nivoe funkcije $f : X \to [-\infty, \infty]$ važe sledeće osobine.*

(a) $\forall \alpha, \;\; F_{\alpha+}(f) \supseteq F_\alpha(f)$.

(b) $\alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad (F_\alpha(f) \supseteq F_\beta(f) \;\; \wedge \;\; F_{\alpha+}(f) \supseteq F_{\beta+}(f))$.

(c) $\alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad F_{\alpha+}(f) \supseteq F_\beta(f)$.

Pojmovi α-nivoa i strogog α-niva funkcije f figurišu u definicijama i izračunavanjima nekih tipova fazi integrala.

4.1 Maksitivni (idempotentni) integral

U ovoj sekciji je navedena definicija tzv. maksitivnog integrala zasnovanog na maksitivnoj meri iz sekcije 3.1 mere. Takođe su navedene i osnovne osobine ovog integrala, uz odgovarajuće primere, vidi [3, 8].

Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup, i neka je $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ maksitivna mera (takva da je $\mu(X) < \infty$. Neka je po definiciji $\infty \cdot 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Definicija 4.1 *Za funkciju $f : X \to [0, \infty]$, **maksitivni integral** funkcije f u odnosu na meru μ je*

$$\bigvee_X f d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \{\alpha \cdot \mu (F_\alpha (f))\} . \tag{4.3}$$

Maksitivni integral funkcije f nad skupom $A \subseteq \Omega$ je definisan sa

$$\bigvee_A f d\mu \overset{\text{def}}{=} \bigvee_X f \cdot \chi_A d\mu. \tag{4.4}$$

Iz (4.3) i (4.4) sledi

$$\bigvee_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \{\alpha \cdot \mu (F_\alpha (f \cdot \chi_A))\} . \tag{4.5}$$

i za maksitivni integral po definiciji očigledno važi da je

$$\mu (A) = \bigvee_X \chi_A d\mu = \bigvee_A d\mu. \tag{4.6}$$

Za maksitivni integral se nekad koristi i oznaka $\bigvee_A f (x) d\mu (x)$. U slučaju kada je μ idempotentna verovatnoća, tada se maksitivni integral $\bigvee_X f d\mu$ naziva još i ***maksitivnim očekivanjem funkcije*** f.

Pri izračunavanju maksitivnog integrala mogu biti pogodni i sledeći ekvivalentni načini, odnosno formule za izračunavanje.

Teorema 4.1 *Za funkciju $f : X \to [0, \infty]$ i proizvoljan skup $A \in \mathcal{P} (X)$ je*

$$\bigvee_A f d\mu = \sup_{a \in [0,\infty]} \{a \cdot \mu (F_\alpha (f) \cap A)\} , \tag{4.7}$$

$$\bigvee_A f d\mu = \sup_{a \in [0,\infty]} \{a \cdot \mu (\{ x \in A \mid f (x) = a\})\} , \tag{4.8}$$

$$\bigvee_A f d\mu = \sup_{x \in A} \{f (x) \cdot \varphi_\mu (x)\} , \tag{4.9}$$

gde je $\varphi_\mu (x) = \mu (\{x\})$ gustina maksitivne mere μ.

Iz teoreme 4.1 slede osobine maksitivnog integrala navedene u sledećoj teoremi.

Teorema 4.2 *Za funkcije $f : X \to [0, \infty]$ i $g : X \to [0, \infty]$, i za $c \in [0, \infty]$ važe sledeće osobine.*

(a) $\bigvee_X 0 d\mu = 0.$

(b) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \bigvee_X f d\mu \leq \bigvee_X g d\mu.$

(c) $\bigvee_X (cf)\, d\mu = c \bigvee_X f d\mu.$

(d) $\bigvee_X (f \vee g)\, d\mu = \bigvee_X f d\mu \vee \bigvee_X g d\mu.$

(e) $\bigvee_X (f + g)\, d\mu \leq \bigvee_X f d\mu + \bigvee_X g d\mu.$

(f) $\left| \bigvee_X f d\mu - \bigvee_X g d\mu \right| \leq \bigvee_X |f - g|\, d\mu,$ *ukoliko je vrednost na levoj strani znaka nejednakosti dobro definisana.*

Iste osobine važe i za maksitivni integral nad skupom $A \in \mathcal{P}(X)$.

Primer 4.1 *Neka je* $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$, *i neka je idempotentna (maksitivna) fazi-mera* $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ *određena gustinom* $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. *Izračunajmo* $\mu(S)$ *za* $S = X$ *i* $S = A = \{a, c\}$.

$\mu(X) = \sup_{x \in X} \varphi(x) = \max\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} = \max\{2, 8, 6\} = 8,$

$\mu(A) = \sup_{x \in A} \varphi(x) = \max\{\varphi(a), \varphi(c)\} = \max\{2, 6\} = 6.$

Neka je funkcija $f : X \to [0, \infty)$ *definisana sa* $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 14 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Izračunajmo vrednost idempotentnog (maksitivnog) integrala funkcije* f *nad skupovima* X *i* $A = \{a, c\}$. *Koristeći formulu* (4.9) *dobijamo*

$$\begin{aligned}
\bigvee_X f d\mu &= \sup_{x \in X} \{f(x) \cdot \varphi(x)\} = \max\{f(x) \cdot \varphi(x) \mid x \in X\} \\
&= \max\{f(a) \cdot \varphi(a), f(b) \cdot \varphi(b), f(c) \cdot \varphi(c)\} \\
&= \max\{14 \cdot 2, 1 \cdot 8, 2 \cdot 6\} = \max\{28, 8, 12\} = 28,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigvee_A f d\mu &= \sup_{x \in A} \{f(x) \cdot \varphi(x)\} = \max\{f(x) \cdot \varphi(x) \mid x \in A\} \\
&= \max\{f(a) \cdot \varphi(a), f(c) \cdot \varphi(c)\} \\
&= \max\{14 \cdot 2, 2 \cdot 6\} = \max\{28, 12\} = 28.
\end{aligned}$$

Integral $\bigvee_X f d\mu$ *možemo izračunati i po definiciji, tj. koristeći formulu* (4.3). *Naime, za* $\alpha \in [0, \infty]$ *dobijamo*

$$F_\alpha(f) = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} = \begin{cases} X = \{a,b,c\} & , \quad \alpha \in [0,1] \\ \{a,c\} & , \quad \alpha \in (1,2] \\ \{a\} & , \quad \alpha \in (2,14] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases} ,$$

$$\mu(F_\alpha(f)) = \sup_{x \in F_\alpha(f)} \varphi(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in \{a,b,c\}} \varphi(x) & , \quad \alpha \in [0,1] \\ \sup\limits_{x \in \{a,c\}} \varphi(x) & , \quad \alpha \in (1,2] \\ \sup\limits_{x \in \{a\}} \varphi(x) & , \quad \alpha \in (2,14] \\ \sup\limits_{x \in \emptyset} \varphi(x) & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \max\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} = \max\{2,8,6\} & , \quad \alpha \in [0,1] \\ \max\{\varphi(a), \varphi(c)\} = \max\{2,6\} & , \quad \alpha \in (1,2] \\ \varphi(a) & , \quad \alpha \in (2,14] \\ 0 & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 8 & , \quad \alpha \in [0,1] \\ 6 & , \quad \alpha \in (1,2] \\ 2 & , \quad \alpha \in (2,14] \\ 0 & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases} ,$$

te je

$$\begin{aligned} \bigvee_X f d\mu &= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \{\alpha \cdot \mu(F_\alpha(f))\} \\ &= \max\Big\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \cdot \mu(F_\alpha(f))\}, \sup_{\alpha \in (1,2]} \{\alpha \cdot \mu(F_\alpha(f))\}, \\ &\qquad \sup_{\alpha \in (2,14]} \{\alpha \cdot \mu(F_\alpha(f))\}, \sup_{\alpha \in (14,\infty]} \{\alpha \cdot \mu(F_\alpha(f))\} \Big\} \\ &= \max\Big\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} \{8\alpha\}, \sup_{\alpha \in (1,2]} \{6\alpha\}, \sup_{\alpha \in (2,14]} \{2\alpha\}, \sup_{\alpha \in (14,\infty]} \{0 \cdot \alpha\} \Big\} \\ &= \max\{8, 12, 28, 0\} = 28. \end{aligned}$$

Integral $\bigvee\limits_A f d\mu$ *možemo izračunati i koristeći formulu* (4.7)*. Naime, koristeći dobijene skupove*

$$F_\alpha(f) = \begin{cases} X = \{a,b,c\} & , \quad \alpha \in [0,1] \\ \{a,c\} & , \quad \alpha \in (1,2] \\ \{a\} & , \quad \alpha \in (2,14] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases} ,$$

za $A = \{a,c\}$ *je*

$$F_\alpha(f) \cap A = \begin{cases} \{a,c\} & , \quad \alpha \in [0,1] \\ \{a,c\} & , \quad \alpha \in (1,2] \\ \{a\} & , \quad \alpha \in (2,14] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases} = \begin{cases} \{a,c\} & , \quad \alpha \in [0,2] \\ \{a\} & , \quad \alpha \in (2,14] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (14,\infty] \end{cases} ,$$

$$\mu\left(F_{\alpha}\left(f\right)\cap A\right)=\sup_{x\in F_{\alpha}\left(f\right)\cap A}\varphi\left(x\right)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in\{a,c\}}\varphi\left(x\right) & , \quad \alpha\in[0,2]\\ \sup\limits_{x\in\{a\}} & , \quad \alpha\in(2,14]\\ \sup\limits_{x\in\emptyset}\varphi\left(x\right) & , \quad \alpha\in(14,\infty]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\max\left\{\varphi\left(a\right),\varphi\left(c\right)\right\} & , \quad \alpha\in[0,2]\\ \varphi\left(a\right) & , \quad \alpha\in(2,14]\\ 0 & , \quad \alpha\in(14,\infty]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\max\left\{2,6\right\} & , \quad \alpha\in[0,2]\\ \varphi\left(a\right) & , \quad \alpha\in(2,14]\\ 0 & , \quad \alpha\in(14,\infty]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6 & , \quad \alpha\in[0,2]\\ 2 & , \quad \alpha\in(2,14]\\ 0 & , \quad \alpha\in(14,\infty]\end{cases},$$

te je

$$\bigvee_{A}fd\mu=\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left\{\alpha\cdot\mu\left(F_{\alpha}\left(f\right)\cap A\right)\right\}$$

$$=\max\left\{\sup_{\alpha\in[0,2]}\left\{\alpha\cdot\mu\left(F_{\alpha}\left(f\right)\cap A\right)\right\},\right.$$

$$\left.\sup_{\alpha\in\alpha\in(2,14]}\left\{\alpha\cdot\mu\left(F_{\alpha}\left(f\right)\cap A\right)\right\},\sup_{\alpha\in(14,\infty]}\left\{\alpha\cdot\mu\left(F_{\alpha}\left(f\right)\cap A\right)\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\sup_{\alpha\in[0,2]}\left\{6\alpha\right\},\sup_{\alpha\in(2,14]}\left\{2\alpha\right\},\sup_{\alpha\in(14,\infty]}\left\{0\cdot\alpha\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{12,28,0\right\}=28.$$

Primer 4.2 *Neka je $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}\left(X\right)$, i neka je idempotentna (maksitivna) fazi-mera $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ određena gustinom* $\varphi=\begin{cases}3 & , \quad x\leq-2\\ -x & , \quad -2<x\leq0\\ \sqrt{2x-x^{2}} & , \quad 0<x\leq1\\ 1 & , \quad 1<x\end{cases}$.
Izračunajmo $\mu\left(S\right)$ za skupove $S=A=\{-0.5,0,0.5\}$, $S=B=[-1,1]$ i $S=C=[-5,1]$.

$$\mu\left(A\right)=\sup_{x\in X}\varphi\left(x\right)=\max\left\{\varphi\left(-0.5\right),\varphi\left(0\right),\varphi\left(0.5\right)\right\}$$

$$=\max\left\{0.5,0,\sqrt{2\cdot0.5-0.5^{2}}\right\}=\max\left\{0.5,0,\sqrt{0.75}\right\}=\sqrt{0.75}$$

jer je $\sqrt{0.75}>\sqrt{0.5}>0.5$,

$$\mu\left(B\right)=\sup_{x\in B}\varphi\left(x\right)=\sup_{x\in[-1,1]}\varphi\left(x\right)=\max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\varphi\left(x\right),\sup_{x\in(0,1]}\varphi\left(x\right)\right\}$$

$$= \max\left\{ \sup_{x\in[-1,0]} -x, \sup_{x\in(0,1]} \sqrt{2x-x^2} \right\}$$

$$= \max\left\{ 1, \sup_{x\in(0,1]} \sqrt{2\cdot 1-1^2} \right\} = \max\{1,1\} = 1$$

jer je $-x$, $x\in[-1,0]$ *opadajuća funkcija koja supremum dostiže u levom kraju intervala* $[-1,0]$, *a* $\sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,1]$ *je rastuća funkcija koja supremum dostiže u desnom kraju intervala* $(0,1]$. *Naime, funkcija* $\varphi_1(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,1]$ *je rastuća jer je* $\varphi_1'(x)=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\geq 0$, $x\in(0,1]$.

Nad skupom $B=[-1,1]$ *izračunajmo integral funkcije* $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ *definisane sa* $f(x)=|1-x|$, $x\in\mathbb{R}$. *Kako je*

$$f(x)=|1-x|=\begin{cases} 1-x & , \ 1-x\geq 0 \\ -(1-x) & , \ 1-x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & , \ x\leq 1 \\ x-1 & , \ x>1 \end{cases},$$

sledi da je $f(x)=1-x$, $x\in[-1,1]$. *Koristeći formulu* 4.9 *dobijamo*

$$\bigvee_B f d\mu = \bigvee_{[-1,1]} f d\mu = \sup_{x\in[-1,1]}\{f(x)\cdot\varphi(x)\}$$

$$= \sup\{f(x)\cdot\varphi(x) \mid x\in[-1,1]\}$$

$$= \max\left\{ \sup_{x\in[-1,0]}\{f(x)\cdot\varphi(x)\}, \sup_{x\in(0,1]}\{f(x)\cdot\varphi(x)\} \right\}$$

$$= \max\left\{ \sup_{x\in[-1,0]}\{(1-x)\cdot(-x)\}, \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\} \right\}$$

$$= \max\left\{ \sup_{x\in[-1,0]}\left\{x^2-x\right\}, \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\} \right\}.$$

Za funkciju $g_1(x)=x^2-x$, $x\in[-1,0]$ *je* $g_1'(x)=2x-1<0$, $x\in[-1,0]$. *Sledi da je ona opadajuća na intervalu* $[-1,0]$, *te supremum dostiže u levom kraju intervala. Dakle,* $\sup\limits_{x\in[-1,0]}\left\{x^2-x\right\}=(-1)^2-(-1)=2$.

Za funkciju $g_2(x)=(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,1]$ *dobijamo da je njen izvod*

$$g_2'(x) = -\sqrt{2x-x^2}+(1-x)\cdot\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = -\sqrt{2x-x^2}+\frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \frac{-\left(2x-x^2\right)+(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x^2-4x+1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

za $x\in(0,1]$. *Dalje je*

$$g_2'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

gde je $1+\frac{\sqrt{2}}{2}>1$, *a* $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1]$ *je stacionarna tačka na intervalu* $(0,1]$. *Stoga je*

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,1]} g_2(x) &= \sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\}\\ &= \max\left\{g_2(0),g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),g_2(1)\right\}\\ &= \max\left\{0,g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),0\right\}=g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

jer je $f(x)\geq 0$, $\varphi(x)\geq 0$, *te i* $f(x)\cdot\varphi(x)\geq 0$ *za sve* $x\in X=\mathbb{R}$. *Pri tome je*

$$\begin{aligned}g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left(1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\cdot\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}-\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sledi da je ona opadajuća na intervalu $(0,1]$, *te supremum dostiže u levom kraju intervala. Dakle,*

$$\sup_{x\in(0,1]} g_2(x)=g_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

te je

$$\begin{aligned}\bigvee_B f d\mu &= \max\left\{\sup_{x\in[-1,0]}\left\{x^2-x\right\},\sup_{x\in(0,1]}\left\{(1-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right\}\right\}\\ &= \max\left\{2,\frac{1}{2}\right\}=2.\end{aligned}$$

4.2 Pseudo-integral

U ovoj sekciji je navedena definicija tzv. pseudo integrala, zasnovanog na pseudo meri iz sekcije 3.2. U zavisnosti od tipa odgovarajuće fazi mere tj. poluprstena, razmotrene su osobine pseudo integrala. U primerima je ilustrovano izračunavanje ovakvih integrala.

Neka je, kao u sekciji 3.2, $(I,\oplus,\odot)$ poluprsten, gde je I neki od intervala $[a,b]\subseteq\overline{\mathbb{R}}$, $[a,b)\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ ili $(a,b]\subseteq\overline{\mathbb{R}}$, sa standardnom relacijom poretka $\leq$, i sa neutralnim elementima $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ redom operacija $\oplus$ i $\odot$.

Konstrukcija integrala zasnovanog na σ-$\oplus$-dekompozabilnoj meri (iz sekcije 3.2) sa vrednostima u poluprstenu $(I,\oplus,\odot)$, analogna je konstrukciji Lebesgue-ovog integrala, vidi [5].

Neka je $m:\mathcal{X}\to I_+$ proizvoljna σ-$\oplus$-dekompozabilna mera definisana na σ-algebri $\mathcal{X}$ nekog skupa $X\neq\emptyset$.

Najpre definišimo računske operacije sa vrednostima u poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$.

Definicija 4.2 *Za $c \in I$ i funkcije $f : X \to I$ i $g : X \to I$ je*

$$(c \odot g)(x) = c \odot g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x), \quad x \in X.$$

Sledi definicija merljivih, tj. pseudo-integrabilnih funkcija sa vrednostima u poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$.

Definicija 4.3 *Funkcija $f : X \to I$ je* ***merljiva od dole*** *ukoliko su merljivi, tj. pripadaju σ-algebri $\mathcal{X}$, svi skupovi $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ i $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ za svako $c \in I$. Funkcija $f : X \to I$ je* ***merljiva od gore*** *ukoliko su merljivi, tj. pripadaju σ-algebri $\mathcal{X}$, svi skupovi $\{x \in X \mid f(x) \geq c\}$ i $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ za svako $c \in I$. Funkcija $f : X \to I$ je* ***merljiva*** *ako je merljiva i od dole i od gore.*

Umesto standardne karakteristične funkcije skupa, u definiciji pseudo-integrala figuriše tzv. pseudo-karakteristična funkcija.

Definicija 4.4 ***Pseudo-karakteristična funkcija*** *skupa $A \subseteq X$ je funkcija $\mathcal{K}_A : X \to I$ definisana sa*

$$\mathcal{K}_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad x \notin A \\ \mathbf{1} & , \quad x \in A \end{cases}. \tag{4.10}$$

Elementarnim funkcijama koje figurišu u definiciji Lebegovog integrala, u definici pseudo-integrala odgovaraju pseudo-elementarne funkcije.

Definicija 4.5 *Neka su $A_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ merljivi skupovi koji su disjunktni ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna, i neka su $a_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$ elementi poluprstena $(I, \oplus, \odot)$. Funkcija oblika*

$$e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mathcal{K}_{A_i}, \tag{4.11}$$

odnosno oblika

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mathcal{K}_{A_i}, \tag{4.12}$$

se naziva ***pseudo-elementarna funkcija****.*

Očigledno, pseudo-karakteristična funkcija (4.10) skupa A je merljiva ako i samo ako je A merljiv skup tj. $A \in \mathcal{X}$, a pseudo-elementarne funkcije (4.11) i (4.12) su merljive ako i samo ako su merljivi skupovi A_i, $i \in \mathbb{N}$ tj. $A_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$.

U svrhu definisanja pseudo-integrala merljive funkcije, potrebno je da uvedemo određeni tip konvergencije funkcija. Pretpostavimo dalje da su polugrupe

$(I, \oplus)$ i $(I, \odot)$ ***kompletne mreže sa poretkom***, tj. da za svaki od gore ograničen skup $A \subseteq I$ postoji $\sup A$, i da za svaki od dole ograničen skup $A \subseteq I$ postoji $\inf A$. Takođe, neka je na I definisana metrika $d : I^2 \to [0, \infty]$ sa sledećim osobinama:

(a) kompatibilna je sa supremumom i infimumom, tj. za svaki niz $x_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$ i $x \in I$ važi
$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \ \wedge \ \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = x\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x\right) = 0,$$

(b) monotona je, tj. za sve $x, y, z \in I$ važi
$$x \le z \le y \quad \Rightarrow \quad \max\left\{d\left(x, z\right), d\left(y, z\right)\right\} \le d\left(x, y\right),$$

(c) zadovoljava bar jedan od sledeća dva uslova:

(c.1) $\forall x, x', y, y' \in I, \ \ d\left(x \oplus y, x' \oplus y'\right) \le d\left(x, x'\right) + d\left(y, y'\right)$,

(c.2) $\forall x, x', y, y' \in I, \ \ d\left(x \oplus y, x' \oplus y'\right) \le \max\left\{d\left(x, x'\right), d\left(y, y'\right)\right\}$.

Definicija 4.6 *Neka je $\varepsilon > 0$ i $B \subseteq I$. Niz $l_i^{(\varepsilon)} \in I$, $i \in \mathbb{N}$ je **ε-mreža** skupa B ukoliko za svako $x \in B$ postoji neko $l_i^{(\varepsilon)} \in I$ takvo da je $d\left(l_i^{(\varepsilon)}, x\right) \le \varepsilon$. Ako za svako $x \in B$ postoji $l_i^{(\varepsilon)} \in I$ takvo da je $d\left(l_i^{(\varepsilon)}, x\right) \le \varepsilon$ i $l_i^{(\varepsilon)} \le x$, tada je $l_i^{(\varepsilon)} \in I$, $i \in \mathbb{N}$ **opadajuća ε-mreža** skupa B. Dalje, $l_i^{(\varepsilon)} \in I$, $i \in \mathbb{N}$ je **monotona ε-mreža** ukoliko je $l_i^{(\varepsilon)} \le l_{i+1}^{(\varepsilon)}$ za svako $i \in \mathbb{N}$.*

Teorema 4.3 *Neka je $f : X \to I$ funkcija koja je od dole merljiva ukoliko je $\oplus$ idempotentna operacija, ili je u slučaju neidempotentne operacije merljiva i za svako $\varepsilon > 0$ postoji monotona ε-mreža skupa $f(X)$. Tada postoji niz pseudo-elementarnih funkcija e_n, $n \in \mathbb{N}$ takvih da je*
$$\lim_{n\to\infty} d\left(e_n\left(x\right), f\left(x\right)\right) = 0$$
uniformno po $x \in X$.

Sada možemo definisati pseudo-integral priozvoljne integrabilne funkcije.

Definicija 4.7 *Neka je $\mathcal{X}$ proizvoljna σ-algebra na $X \neq \emptyset$, i neka je $m : \mathcal{X} \to I_+$ proizvoljna σ-$\oplus$-dekompozabilna mera sa vrednostima u poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$. Neka je $a_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$, niz elemenata poluprstena I, neka je $n \in \mathbb{N}$, i neka je $A_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ niz merljivih skupova.*

(a) ***Pseudo-integral*** *pseudo-elementarne funkcije oblika $e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mathcal{K}_{A_i}$, odnosno oblika $e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mathcal{K}_{A_i}$, gde su skupovi A_i disjunktni ukoliko $\oplus$*

nije idempotentna operacija, je definisan sa

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot m(A_i) \tag{4.13}$$

odnosno

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot m(A_i). \tag{4.14}$$

(b) ***Pseudo-integral*** *ograničene, merljive u slučaju neidempotentne operacije* $\oplus$, *odnosno merljive od dole u slučaju idempotentne operacije* $\oplus$, *funkcije* $f : X \to I$, *za koju u slučaju neidempotentne operacije* $\oplus$ *važi da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(X)$, *je definisan sa*

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \mathbb{N}} \int_X^{\oplus} e_n \odot dm, \tag{4.15}$$

gde je e_n, $n \in \mathbb{N}$ *niz elementarnih funkcija iz teoreme* 4.3 *koje uniformno konvergiraju ka funkciji* f.

(c) ***Pseudo-integral*** *ograničene, merljive u slučaju neidempotentne operacije* $\oplus$, *odnosno merljive od dole u slučaju idempotentne operacije* $\oplus$, *funkcije* $f : X \to I$ *nad skupom* $A \in \mathcal{X}$, *za koju u slučaju neidempotentne operacije* $\oplus$ *važi da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(A)$, *je definisan sa*

$$\int_A^{\oplus} f \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \int_X^{\oplus} (f \odot \mathcal{K}_A) \odot dm. \tag{4.16}$$

Napomena 4.1 *Integral definisan sa* (4.15) *ne zavisi od od izbora elementarnih funkcija* e_n.

U sledećoj teoremi su navedene neke najvažnije opšte osobine pseudo-integrala, vidi [5].

Teorema 4.4 *Neka je* $\mathcal{X}$ *proizvoljna* σ*-algebra na nekom skupu* $X \neq \emptyset$, *i neka je* $m : \mathcal{X} \to I_+$ *proizvoljna* σ*-*$\oplus$*-dekompozabilna mera na* $\mathcal{X}$, *sa vrednostima u poluprstenu* $(I, \oplus, \odot)$. *Neka su* $\oplus$ *i* $\odot$ *neprekidne operacije, i neka je* $\oplus$ *beskonačno komutativna operacija. Neka je* $c \in I$, *i neka su* $f : X \to I$ *i* $g : \to I$ *merljive funkcije. Za pseudo-integral iz definicije* 4.7 *važe sledeće osobine, gde je definisan pseudo-integral koji figuriše u navedenim osobinama.*

(a) $m(A) = \int_X^{\oplus} \mathcal{K}_A(x) \odot dm.$

(b) $\int\limits_X^{\oplus} (c \odot f) \odot dm = c \odot \int\limits_X^{\oplus} f \odot dm.$

(c) $\int\limits_X^{\oplus} (f \oplus g) \odot dm = \int\limits_X^{\oplus} f \odot dm \oplus \int\limits_X^{\oplus} g \odot dm.$

(d) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int\limits_X^{\oplus} f \odot dm \leq \int\limits_X^{\oplus} g \odot dm.$

Dokaz: Ilustracije radi dokazujemo osobinu (d), a u sličnom maniru se dokazuju i ostale osobine. Dokažimo prvo da osobina (d) važi za elementarne funkcije f i g.

Neka su f i g elementarne funkcije, odnosno funkcije oblika

$$f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mathcal{K}_{A_i},$$

$$g = \bigoplus_{i=1}^{\infty} b_i \odot \mathcal{K}_{B_i},$$

gde su $A_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ i $B_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ merljivi skupovi koji su po parovima disjunktni ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna. Neka je $C_{i,j} = A_i \cap B_j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Za funkcije f i g važi reprezentacija

$$f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} a_i \odot \mathcal{K}_{C_{i,j}},$$

$$g = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} b_j \odot \mathcal{K}_{C_{i,j}}.$$

Iz relacije $f \leq g$ sledi

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \Omega, \ \ a_i \odot \mathcal{K}_{C_{i,j}}(x) \leq b_j \odot \mathcal{K}_{C_{i,j}}(x),$$

odnosno sledi da za sve $i, j \in \mathbb{N}$ važi $C_{i,j} \neq \emptyset \Rightarrow a_i \leq b_j$ (a slučaj $C_{i,j} = \emptyset$ je očigledan), te kako je $\odot$ pozitivno neopadajuća operacija, sledi da je

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \ \ a_i \odot m(C_{i,j}) \leq b_j \odot m(C_{i,j}),$$

odakle (operacija $\oplus$ je takođe neopadajuća) sledi tvrđenje

$$\int\limits_X^{\oplus} f \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} a_i \odot m(C_{i,j}) \leq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} b_j \odot m(C_{i,j}) = \int\limits_X^{\oplus} g \odot dm.$$

Neka su sada f i g proizvoljne merljive funkcije u slučaju neidempotentne operacije $\oplus$, odnosno od dole merljive funkcije u slučaju idempotentne operacije $\oplus$, i neka su φ_n, $n \in \mathbb{N}$ i ψ_n, $n \in \mathbb{N}$ nizovi elementarnih funkcija iz teoreme 4.3 koji odgovaraju funkcijama f i g redom, tj. takve da uniformno po $x \in X$ važi

$$\lim_{n\to\mathbb{N}} d\left(\varphi_n\left(x\right), f\left(x\right)\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\mathbb{N}} d\left(\psi_n\left(x\right), g\left(x\right)\right) = 0. \qquad \langle 1 \rangle$$

Neka su funkcije θ_n, $n \in \mathbb{N}$ definisane sa

$$\theta_n\left(x\right) \overset{\text{def}}{=} \max\left\{\varphi_n\left(x\right), \psi_n\left(x\right)\right\}, \quad x \in X.$$

Očigledno je

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \ \varphi_n\left(x\right) \le \theta_n\left(x\right).$$

Kako su navedene konvergencije uniformne po $x \in X$, s obzirom na napomenu 4.1, iz $\langle 1 \rangle$ i relacije $f \le g$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\theta_n\left(x\right), g\left(x\right)\right) = 0$$

i

$$\int_X^{\oplus} g \odot dm = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \theta_n\left(x\right) \odot dm,$$

odakle se dobija

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n\left(x\right) \odot dm \le \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \theta_n\left(x\right) \odot dm = \int_X^{\oplus} g \odot dm.$$

Time je dokaz završen. □

Razmotrimo dalje neke tipove pseudo-integrala u zavisnosti od tipa poluprstena $(I, \oplus, \odot)$, vidi stranu 6 u sekciji 1.2, u kojem uzimaju vrednosti σ-$\oplus$-dekompozabilna mera m i podintegralna funkcija f iz definicije 4.7.

4.2.1 Pseudo integral tipa sup-$\odot$

Za neki od intervala tipa $I = [a, b) \subseteq [-\infty, \infty]$ ili $I = [a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, posmatrajmo poluprsten $(I, \sup, \odot)$ tipa [PPT1a], vidi stranu 6, gde je $\odot$ neidempotentna operacija. Neutralni element operacije sup je tada $\mathbf{0} = a$ i $I_+ = I$, a sup-dekompozabina mera $m : \mathcal{X} \to I$ (gde je $I = I_+$) je određena svojom gustinom $\varphi : X \to I$, vidi napomenu 3.3, dakle

$$m\left(S\right) = \sup_{x\in S} \varphi\left(x\right), \quad S \in \mathcal{X}.$$

Tada se, za $S \in \mathcal{X}$ i merljivu funkciju $f : X \to I$, pseudo-integral iz definicije 4.7 svodi na

$$\int_S^{\sup} f \odot dm = \sup_{x\in S} \left(f\left(x\right) \odot \varphi\left(x\right)\right). \tag{4.17}$$

Na primer, posmatrajmo poluprsten $([-\infty, \infty), \sup, +)$ gde je $\mathbf{0} = -\infty$ i $\mathbf{1} = 0$. Posmatrajmo proizvoljnu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$. Neka je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borel-ova σ-algebra na skupu $\mathbb{R}$. Funkcija $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [-\infty, \infty)$ definisana sa

$$m\left(A\right) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in A} \varphi\left(x\right), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

je sup-dekompozabilna mera na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Za pseudo-operacije $\oplus = \sup$ i $\odot = +$, odgovarajući pseudo-integral na skupu $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ neke od gore ograničene (dakle merljive) funkcije $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ se izračunava sa

$$\int_S^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x \in S} (f(x) + \varphi(x)).$$

Primer 4.3 *Neka je* $([-\infty, \infty), \oplus, \odot)$ *poluprsten gde je* $\oplus = \sup$ *i* $\odot = +$*, i gde je tada* $\mathbf{0} = -\infty$*,* $\mathbf{1} = 0$ *i* $I_+ = [-\infty, \infty)$*.*

Neka je funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ *definisana sa*

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\infty & , \quad x = -\infty \\ -x^2 + 4 & , \quad -\infty < x \leq 1 \\ 6 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

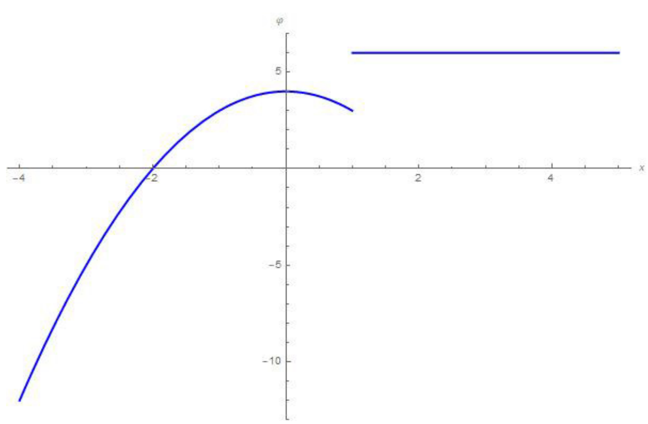
(a) *Neka je skupovna funkcija* $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [-\infty, \infty)$ *definisana sa*

$$m(S) = \sup_{x \in S} \varphi(x), \qquad S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Funkcija m je kompletno maksitivna sup-dekompozabilna mera, vidi napomenu 3.3*. Izračunajmo* $m(S)$ *za sledeće skupove* S*:*

$A = [-\infty, -3)$, $\quad B = (-1, 0)$,
$C = (-1, 0.5]$, $\quad D = [-1, 2)$,
$E = (-0.5, -0.8) \cup (0.1, 0.4)$, $\quad F = [-0.5, 0.5) \cup \{3\}$,
$G = \{x \in (-\infty, \infty) \mid \varphi(x) > x + 3\}$, $\quad H = \mathbb{N}$,
$K = \left\{x \in (-\infty, \infty) \mid \varphi(x) > x^2 + 3\right\}$, $\quad M = [-1, 0.5) \cap \mathbb{I}$.

Kako je $\varphi_1(x) = -x^2+4$*,* $x \leq 1$ *deo konkavne parabole sa temenom u tački* $(0, 4)$ *i* $\varphi_1(1) = 3$*, a* $\varphi_2(x) = 5$*,* $x > 5$ *poluprava paralelna sa* x*-osom, dobijamo sledeći grafik funkcije* $\varphi(x)$ *prikazan na slici* 4.1



Slika 4.1: Grafik gustine φ iz primera 4.3.

(A) *Na skupu* $A = [-\infty, -3)$ *je* φ *rastuća funkcija* $\varphi_1(x) = -x^2 + 4$, *te je*
$$m(A) = \sup_{x\in A} \varphi(x) = \sup\left\{ -x^2 + 4 \;\middle|\; x \in [-\infty, -3) \right\} = \varphi(-3) = -5.$$

(B) *Na skupu* $B = (-1, 0)$ *je* φ *rastuća funkcija* $\varphi_1(x) = -x^2 + 4$, *te je*
$$m(B) = \sup_{x\in B} \varphi(x) = \sup\left\{ -x^2 + 4 \;\middle|\; x \in (-1, 0) \right\} = \varphi(0) = 4.$$

(C) *Na skupu* $C = (-1, 0.5]$ *funkcija* φ *dostiže maksimum u temenu parabole* $\varphi_1(x) = -x^2 + 4$, *te je*
$$m(C) = \sup_{x\in C} \varphi(x) = \varphi(0) = 4.$$

(D)

(E)

(F)

(G)

(H)

(K)

(M)

(b) *Na poluprstenu* $([-\infty, \infty), \sup, +)$ *izračunajmo pseudo-integral funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definisane sa* $f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, *nad skupovima* $X = \mathbb{R}$, A, C *i* D.

(c) *Na poluprstenu* $([-\infty, \infty), \sup, +)$ *izračunajmo pseudo-integral funkcije* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definisane sa* $g(x) = x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, *nad skupovima* $X = \mathbb{R}$, A, C *i* D.

4.2.2 g-pseudo integral

U slučaju poluprstena generisanog monotonim generatorom, vidi sekciju 1.2 - poluprsten tipa [PPT2] na strani 6, pseudo-integral se svodi na Lebegov integral, vidi [5]. Pod dodatnim uslovima o merljivosti skupova nad kojim se integral izračunava i merljivosti podintegralne funkcije, ovaj integral može da se svede na Rimanov integral.

Neka je i nadalje I neki od intervala $[a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $[a, b) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ili $(a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ opremljen standardnom relacijom poretka $\leq$, i neka je $\mathcal{X}$ neka σ-algebra na skupu $X \neq \emptyset$.

Teorema 4.5 *Neka je* $g : I \to [0, \infty]$ *neprekidna i striktno monotona funkcija. Neka su na intervalu* I *operacije* $\oplus$ *i* $\odot$ *generisane funkcijom (generatorom)* g, *dakle*
$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad x, y \in I,$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)), \quad x, y \in I,$$

gde je tada $(I, \oplus, \odot)$ *poluprsten tipa* [PPT2].

Neka je $m : \mathcal{X} \to I_+$ *skupovna funkcija koja je* σ-$\oplus$-*dekompozabilna mera na* $\mathcal{X}$. *Tada je* $\lambda = g \circ m : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ *Lebegova mera na* $\mathcal{X}$, *i za svaku merljivu funkciju* $f : X \to I$ *i merljiv skup* $S \in \mathcal{X}$ *važi*

$$\int_S^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_S (g \circ f) \cdot d\lambda\right), \tag{4.18}$$

gde je $d\lambda = d(g \circ m)$.

Napomena 4.2 *U teoremi* 4.5, *iz* $\lambda = g \circ m$ *sledi da je*

$$m = g^{-1} \circ \lambda : \mathcal{X} \to I_+, \tag{4.19}$$

što znači da je σ-$\oplus$-*dekompozabilna mera* m *jednoznačno određena generatorom* g *i Lebegovom merom* λ *ukoliko je ona zadana.*

Pri tome, ako je za $n \in \mathbb{N}$

- $X = \mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{X} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^n$ *Borelova* σ-*algebra na* $\mathbb{R}^n$,
- $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^n$ *Riman-merljiv skup,*
- *a* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je Riman-integrabilna funkcija,*

tada se integral $\int_S (g \circ f) \cdot d\lambda$ *u* (4.18) *svodi na Rimanov integral.*

Primena teoreme 4.5 je ilustrovana sledećim primerom.

Primer 4.4 *Neka je funkcija* $g : [-\infty, \infty] \to [0, \infty]$ *definisana sa*

$g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, $x \in [-\infty, \infty]$,

pri čemu je tada inverzna funkcija $g^{-1} : [0, \infty] \to [-\infty, \infty]$ *definisana sa*

$g^{-1}(x) = -2 \ln x$, $x \in [0, \infty]$.

Neka je

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)) = -2 \ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{y}{2}}\right),$$

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) = -2 \ln\left(e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}\right) = -2 \ln\left(e^{-\frac{x+y}{2}}\right)$$
$$= -2\left(-\frac{x+y}{2}\right) = x + y,$$

za sve $x, y \in [-\infty, \infty]$. *Dakle, za* $I = [-\infty, \infty]$ *je* $(I, \oplus, \odot)$ *poluprsten tipa* [PPT2b] *(vidi stranu* 6*) čije su operacije* $\oplus$ *i* $\odot$ *generisane opadajućom funkcijom* g. *U ovom slučaju je* $\mathbf{0} = \infty$ *jer za sve* $x \in I$ *važi*

$$\mathbf{0} \oplus x = -2\ln\left(e^{-\frac{\infty}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) = -2\ln\left(0 + e^{-\frac{x}{2}}\right) = -2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) = -2\left(-\frac{x}{2}\right)$$
$$= x$$

i takođe $x \oplus \mathbf{0} = x$*. Relacija* $\preceq$ *je pri tome standardna relacija* $\geq$*, te je stoga* $I_+ = \{x \in I \mid \mathbf{0} \preceq x\} = \{x \in I \mid \infty \geq x\} = I$*.*

(a) *Neka je* λ *Rimanova mera na* $\mathbb{R}$*, i neka je* $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to I_+$ *skupovna funkcija definisana sa* $m = g^{-1} \circ \lambda$*. Na osnovu 4.2 za* m *sledi da je* σ*-*$\oplus$*-dekompozabilna mera na* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*. Primetimo da je*

$m(\emptyset) = g^{-1}(\lambda(\emptyset)) = g^{-1}(0) = \mathbf{0} = \infty.$

Izračunajmo $m(S)$ *za*

$$S = A = (-2,3) \cup (4,6] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \qquad S = B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n, n + \frac{1}{2^n}\right) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Za Rimanovu (Lebegovu) meru λ *je*

$\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = b - a.$

Skupovi A *i* B *su unije disjunktnih intervala, te koristeći da*

$\langle 1 \rangle$ *- fazi-mera* m *je* σ*-aditivna i* $\oplus$*-*σ*-aditivna,*

dobijamo

$$\begin{aligned} m(A) &\overset{\langle 1\rangle}{=} m((-2,3)) \oplus m((4,6]) \overset{(4.19)}{=} \left(g^{-1}\circ\lambda\right)((-2,3)) \oplus \left(g^{-1}\circ\lambda\right)((4,6]) \\ &= g^{-1}(\lambda((-2,3))) \oplus g^{-1}(\lambda((4,6])) \\ &= g^{-1}((3-(-2))) \oplus g^{-1}((6-4)) = g^{-1}(5) \oplus g^{-1}(2) \\ &= (-2\ln 5) \oplus (-2\ln 2) = -2\ln\left(e^{-\frac{-2\ln 5}{2}} + e^{-\frac{-2\ln 2}{2}}\right) \\ &= -2\ln\left(e^{\ln 5} + e^{\ln 2}\right) = -2\ln(5+2) = -2\ln 7. \end{aligned}$$

Koristeći $\langle 1 \rangle$ *i*

$\langle 2 \rangle$ *napomenu 1.3,*

$\langle 3 \rangle$ *lemu 1.4,*

dobijamo

$$\begin{aligned} m(B) &\overset{\langle 1\rangle}{=} \bigoplus_{n=1}^{\infty} m\left(\left(n, n+\frac{1}{2^n}\right)\right) \overset{(4.19)}{=} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(g^{-1}\circ\lambda\right)\left(\left(n, n+\frac{1}{2^n}\right)\right) \\ &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\lambda\left(\left(n, n+\frac{1}{2^n}\right)\right)\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(n + \frac{1}{2^n} - n\right) \\ &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\left(-2\ln\frac{1}{2^n}\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(2n\ln 2) \\ &\overset{\langle 2\rangle}{=} g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(2n\ln 2)\right) = g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2n\ln 2}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\ln 2}\right) = g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\ln 2}\right)^{-n}\right) = g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\right)$$
$$\overset{\langle 3\rangle}{=} g^{-1}(1) = -2\ln 1 = 0.$$

(b) *Izračunajmo integral funkcije*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 4, \; x \in \mathbb{R}$

nad intervalom $[-1, 2] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. *Funkcija* f *je očigledno merljiva odnosno integrabilna, te primenom* (4.18) *i napomene* 4.2 *dobijamo*

$$\int_{[-1,2]}^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_{[-1,2]} (g \circ f) \cdot d\lambda\right) = g^{-1}\left(\int_{-1}^{2} g(f(\lambda))\, d\lambda\right)$$
$$= g^{-1}\left(\int_{-1}^{2} e^{-\frac{2\lambda-4}{2}}\, d\lambda\right) = g^{-1}\left(\int_{-1}^{2} e^{-\lambda+2}\, d\lambda\right) = \ldots$$

$\langle 4\rangle$ *smenom* $t = -\lambda + 2$, $\lambda = -dt$, *sa promenama granica* $\lambda = -1$ *u* $t = -(-1) + 2 = 3$, *i* $\lambda = 2$ *u* $t = -2 + 2 = 0$.

$$\cdots = g^{-1}\left(-\int_{3}^{0} e^{t}\, dt\right) = g^{-1}\left(e^{3} - 1\right) = -2\ln\left(e^{3} - 1\right).$$

4.2.3 max-min-pseudo integral

Za interval oblika $I = [a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, posmatrajmo poluprsten $(I, \sup, \inf)$ tipa [PPT3], vidi stranu 7, gde su i sup i inf idempotentne operacije. Neutralni element operacije sup je tada $\mathbf{0} = a$ i $I_+ = I$, neutralni element operacije inf je $\mathbf{1} = b$, a $\oplus$-dekompozabina mera $m : \mathcal{X} \to I$ (gde je $I = I_+$) je određena svojom gustinom $\varphi : X \to I$, vidi napomenu 3.3, dakle

$$m(S) = \sup_{x \in S} \varphi(x), \quad S \in \mathcal{X}.$$

Tada se, za $S \in \mathcal{X}$ i merljivu funkciju $f : X \to I$, pseudo-integral iz definicije 4.7, sa $\oplus = \sup$ i $\odot = \inf$ svodi na

$$\int_{S}^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x \in S} \left(\inf\left(f(x), \varphi(x)\right)\right) = \sup_{x \in S} \left(\min\left\{f(x), \varphi(x)\right\}\right). \tag{4.20}$$

Primer 4.5 *Neka je* $I = [-1, \infty]$. *U poluprstenu* $(I, \sup, \inf)$ *je tada* $\mathbf{0} = -1$ *i* $\mathbf{1} = \infty$. *Neka je* $X = \{a, b, c\}$ *i* $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$. *Neka je* $m : \mathcal{P}(X) \to I$ *maksitivna mera određena gustinom* $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -0.2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Na konačnim skupovima* X *i* $\mathcal{X}$ *je* $\sup = \max$ *i* $\inf = \min$.

(a) *Izračunajmo vrednosti* $m(S)$ *za sve*

$S \in \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Za $S = \emptyset$ *je* $m(\emptyset) = \mathbf{0} = -1$, *a za konačne skupove* $S \neq \emptyset$ *primenom*

$$m(S) = \sup_{x \in S} \varphi(x) = \max\{\varphi(x) \mid x \in S\}$$

dobijamo vrednosti prikazane u tabeli 4.1.

S	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$m(S)$	-1	-0.2	3	4	3	4	4	4

Tabela 4.1: Vrednosti sup-mere m iz primera 4.5.

(b) *Neka je funkcija* $f : X \to I$ *definisana sa* $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2.2 & -0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$.
Izračunajmo sup-inf, *odnosno* max-min *integral funkcije* f *nad skupovima* $X = \{a,b,c\}$ *i* $A = \{a,b\}$.

(X) *Primenom formule* 4.20 *dobijamo*

$$\begin{aligned}\int_X^{\oplus} f \odot dm &= \sup_{x \in X} (\min\{f(x), \varphi(x)\}) \\ &= \max\{\min\{f(a), \varphi(a)\}, \min\{f(b), \varphi(b)\}, \min\{f(c), \varphi(c)\}\} \\ &= \max\{\min\{2.2, -0.2\}, \min\{-0.8, 3\}, \min\{0.2, 4\}\} \\ &= \max\{-0.2, -0.8, 0.2\} = 0.2.\end{aligned}$$

(A) *Primenom formule* 4.20 *dobijamo*

$$\begin{aligned}\int_A^{\oplus} f \odot dm &= \sup_{x \in A} (\min\{f(x), \varphi(x)\}) \\ &= \max\{\min\{f(a), \varphi(a)\}, \min\{f(b), \varphi(b)\}\} \\ &= \max\{\min\{2.2, -0.2\}, \min\{-0.8, 3\}\} \\ &= \max\{-0.2, -0.8\} = -0.2.\end{aligned}$$

4.3 Sugenov integral

U ovoj sekciji je razmotren još jedan tip fazi-integrala, Sugenov integral, vidi [9]. Sugenov integral je zasnovan na fazi meri u užem smislu, tj. na neprekidnoj fayi meri - vidi poglavlje 3. Navedene su neke ekvivalentne definicije Sugenovog integrala, kao i njegove glavne osobine. U primerima je ilustrovano izračunavanje ovakvih integrala.

Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neka σ-algebra na X, tj. neka je $(X, \mathcal{X})$ merljiv prostor. Neka je $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ proizvoljna fazi-mera u užem smislu, vidi definiciju ?????.

Definicija 4.8 *Neka je $S \in \mathcal{X}$ merljiv skup, i neka je $f : X \to [0, \infty)$ proizvoljna merljiva funkcija.* ***Sugenov integral*** *funkcije f nad skupom S je definisan sa*

$$\text{(S)} \int_S f d\mu = \{ \alpha \wedge \mu (S \cap F_\alpha (f)) \mid \alpha \in [0, \infty] \} . \tag{4.21}$$

Kako je $F_\alpha (f) \subseteq X$ odnosno $X \cap F_\alpha (f) = F_\alpha (f)$ za svako $\alpha \in [0, \infty]$, to se integral nad celim skupom X svodi na

$$\text{(S)} \int_X f d\mu = \{ \alpha \wedge \mu (F_\alpha (f)) \mid \alpha \in [0, \infty] \} . \tag{4.22}$$

Primer 4.6 *Neka je $X = \{a, b, c\}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. Na merljivom prostoru $(X, \mathcal{P}(X))$, fazi-mera $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ u širem smislu je definisana sa*

$$\mu (E) = \begin{cases} |E| & , \quad E \neq \{a, b\} \\ 3 & , \quad E = \{a, b\} \end{cases} , \qquad E \in \mathcal{P}(X).$$

Neka je funkcija $f : X \to [0, \infty)$ definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2.5 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunajmo Sugenov integral funkcije f nad skupovima X i $A = \{b, c\}$.

Za $\alpha \in [0, \infty]$ je

$$F_\alpha (f) = \{ x \in X \mid f (x) \geq \alpha \} = \begin{cases} X & , \quad \alpha \in [0, 2] \\ \{a, b\} & , \quad \alpha \in (2, 2.5] \\ \{a\} & , \quad \alpha \in (2.5, 3] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (3, \infty] \end{cases} .$$

$[X]$ *Primenom* (4.22) *dobijamo*

$$\begin{aligned} \text{(S)} \int_X f d\mu &= \{ \alpha \wedge \mu (F_\alpha (f)) \mid \alpha \in [0, \infty] \} \\ &= \max \left\{ X_{[0,2]}, X_{(2,2.5]}, X_{(2.5,3]}, X_{(3,\infty]} \right\}, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} X_{[0,2]} &= \sup \{ \alpha \wedge \mu (F_\alpha (f)) \mid \alpha \in [0, 2] \} \\ &= \sup \{ \alpha \wedge \mu (X) \mid \alpha \in [0, 2] \} = \sup \{ \alpha \wedge 3 \mid \alpha \in [0, 2] \} \\ &= \sup \{ \alpha \mid \alpha \in [0, 2] \} = 2, \\ X_{(2,2.5]} &= \sup \{ \alpha \wedge \mu (F_\alpha (f)) \mid \alpha \in (2, 2.5] \} \\ &= \sup \{ \alpha \wedge \mu (\{a, b\}) \mid \alpha \in (2, 2.5] \} = \sup \{ \alpha \wedge 3 \mid \alpha \in (2, 2.5] \} \\ &= \sup \{ \alpha \mid \alpha \in (2, 2.5] \} = 2.5, \\ X_{(2.5,3]} &= \sup \{ \alpha \wedge \mu (F_\alpha (f)) \mid \alpha \in (2.5, 3] \} \\ &= \sup \{ \alpha \wedge \mu (\{a\}) \mid \alpha \in (2.5, 3] \} = \sup \{ \alpha \wedge 1 \mid \alpha \in (2.5, 3] \} \\ &= \sup \{ 1 \mid \alpha \in (2.5, 3] \} = 1, \end{aligned}$$

$$X_{(3,\infty]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (3,\infty]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(\emptyset) \mid \alpha \in (3,\infty]\} = \sup\{\alpha \wedge 0 \mid \alpha \in (3,\infty]\}$$
$$= \sup\{0 \mid \alpha \in (3,\infty]\} = 0,$$

dakle

$$\text{(S)}\int_X f d\mu = \max\{2, 2.5, 1, 0\} = 2.5.$$

[A] *Primenom* (4.21) *dobijamo*

$$\text{(S)}\int_A f d\mu = \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in [0,\infty]\}$$

$$= \max\left\{A_{[0,2]}, A_{(2,2.5]}, A_{(2.5,3]}, A_{(3,\infty]}\right\},$$

gde je

$$A_{[0,2]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in [0,2]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in [0,2]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap X) \mid \alpha \in [0,2]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(\{b,c\}) \mid \alpha \in [0,2]\} = \sup\{\alpha \wedge 2 \mid \alpha \in [0,2]\}$$
$$= \sup\{\alpha \mid \alpha \in [0,2]\} = 2,$$

$$A_{(2,2.5]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2,2.5]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2,2.5]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap \{a,b\}) \mid \alpha \in (2,2.5]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(\{b\}) \mid \alpha \in (2,2.5]\} = \sup\{\alpha \wedge 1 \mid \alpha \in (2,2.5]\}$$
$$= \sup\{1 \mid \alpha \in (2,2.5]\} = 1,$$

$$A_{(2.5,3]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2.5,3]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (2.5,3]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap \{a\}) \mid \alpha \in (2.5,3]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(\emptyset) \mid \alpha \in (2.5,3]\} = \sup\{\alpha \wedge 0 \mid \alpha \in (2.5,3]\}$$
$$= \sup\{0 \mid \alpha \in (2.5,3]\} = 0,$$

$$A_{(3,\infty]} = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (3,\infty]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha(f)) \mid \alpha \in (3,\infty]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(A \cap \emptyset) \mid \alpha \in (3,\infty]\}$$
$$= \sup\{\alpha \wedge \mu(\emptyset) \mid \alpha \in (3,\infty]\} = \sup\{\alpha \wedge 0 \mid \alpha \in (3,\infty]\}$$
$$= \sup\{0 \mid \alpha \in (3,\infty]\} = 0,$$

dakle

$$\text{(S)}\int_A f d\mu = \max\{2, 1, 0, 0\} = 2.$$

Primer 4.7 *Neka je* $X = [0,3]$, *i neka je* $\mathcal{B}_X$ *skup svih Borelovih skupova na skupu* X. *Neka je* ℓ *Lebegova mera na merljivom prostoru* $(X, \mathcal{B}_X)$, *i neka je funkcija* $m : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ *definisana sa*

$$m(S) = \ell^2(S), \qquad S \in \mathcal{B}_X.$$

(a) *Dokažimo da je* m *fazi mera u užem smislu.*

[FM01] $m(\emptyset) = \ell^2(\emptyset) = 0^2 = 0.$

[FM01] *Za* $A \subseteq B$, $A, B \in \mathcal{B}_X$ *je* $0 \le \ell(S) \le \ell(B)$, *te je* $m(A) = \ell^2(A) \le \ell^2(B) = m(B)$.

[FM03] *Neka su skupovi* $A_n \in \mathcal{B}_X$, $n \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, *pri čemu je i* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_X$. *Lebegova mera je neprekidna od dole, odnosno*

$$\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \ell(A_n),$$

te je (kvadratna funkcija je neprekidna te se pod nju može ući sa limesom)

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \left(\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \ell(A_n)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \ell^2(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m(A_n),$$

tj. fazi mera m *je neprekidna od dole.*

[FM04] *Neka su skupovi* $A_n \in \mathcal{B}_X$, $n \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, *pri čemu je i* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_X$. *Pri tome za svako* $A_n \in \mathcal{B}_X$, $n \in \mathbb{N}$ *važi* $\ell(A_n) \le \ell(X) = 3$, *te je* $m(A_n) = \ell^2(A_n) \le 3^2 = 9$, *dakle* $m(A_n) < \infty$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$. *Lebegova mera je neprekidna i od gore, te na isti način kao za* [FM03] *dobijamo* $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$, *tj. fazi mera* m *je neprekidna od gore.*

(b) *Izračunajmo Sugenov integral nad* $X = [0,3]$ *funkcije* $f : X \to [0,\infty)$ *definisane sa* $f(x) = 2x + 3$, $x \in X$, *u odnosu na fazi meru* μ.

Za $\alpha \in [0,\infty]$ *je*

$$F_\alpha(f) = \{x \in X \mid f(x) \ge \alpha\} = \{x \in X \mid 2x + 3 \ge \alpha\}$$

$$= \left\{x \in X \mid x \ge \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right\} = \begin{cases} X = [0,3] & , \quad \alpha \in [0,3] \\ \left[\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}, 3\right] & , \quad \alpha \in (3,9] \\ \emptyset & , \quad \alpha \in (9,\infty] \end{cases},$$

$$\mu\left(F_\alpha(f)\right)=\ell^2\left(F_\alpha(f)\right)$$

$$=\begin{cases}(3-0)^2 & , \quad \alpha\in[0,3]\\ \left(3-\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{2}\right)\right)^2 & , \quad \alpha\in(3,9]\\ 0^2 & , \quad \alpha\in(9,\infty]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}9 & , \quad \alpha\in[0,3]\\ \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)^2 & , \quad \alpha\in(3,9]\\ 0 & , \quad \alpha\in(9,\infty]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}9 & , \quad \alpha\in[0,3]\\ \frac{81}{4}-\frac{9}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2 & , \quad \alpha\in(3,9]\\ 0 & , \quad \alpha\in(9,\infty]\end{cases} ,$$

te je primenom (4.22)

$$(\mathrm{S})\int_X f d\mu=\sup\left\{\alpha\wedge\mu\left(F_\alpha(f)\right)\mid\alpha\in[0,\infty]\right\}$$

$$=\max\left\{X_{[0,3]},X_{(3,9]},X_{(9,\infty]}\right\},$$

gde je

$$X_{[0,3]}=\sup\left\{\alpha\wedge\mu\left(F_\alpha(f)\right)\mid\alpha\in[0,3]\right\}=\sup\left\{\alpha\wedge 9\mid\alpha\in[0,3]\right\}$$
$$=3\wedge 9=3,$$
$$X_{(9,\infty]}=\sup\left\{\alpha\wedge\mu\left(F_\alpha(f)\right)\mid\alpha\in(9,\infty]\right\}=\sup\left\{\alpha\wedge 0\mid\alpha\in(9,\infty]\right\}$$
$$=\infty\wedge 0=0,$$
$$X_{(3,9]}=\sup\left\{\alpha\wedge\mu\left(F_\alpha(f)\right)\mid\alpha\in(3,9]\right\}$$
$$=\sup\left\{\alpha\wedge\left(\frac{81}{4}-\frac{9}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2\right)\;\middle|\;\alpha\in(3,9]\right\}.$$

Zarad izračunavanja minimuma vrednosti linearne funkcije $g_1(\alpha)=\alpha$, $\alpha\in(3,9]$ *i kvadratne konveksne funkcije* $g_2(\alpha)=\frac{81}{4}-\frac{9}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2$, $\alpha\in(3,9]$ *nađimo presek grafika ovih funkcija na intervalu* $(3,9]$.

$$g_1(\alpha)=g_2(\alpha)\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=\frac{81}{4}-\frac{9}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2\quad\Leftrightarrow\quad\alpha^2-22\alpha+81=0$$
$$\Leftrightarrow\quad\alpha_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{484+7128}}{2}=11\pm\frac{\sqrt{7612}}{2}$$
$$\approx 11\pm 43.6234.$$

Kako je $\alpha_1 = 11 - \frac{\sqrt{7612}}{2} < 3$ *i* $\alpha_2 = 11 + \frac{\sqrt{7612}}{2} > 9$, *sledi da za neprekidne funkcije* g_1 *i* g_2 *važi* $g_1(\alpha) \neq g_2(\alpha)$, $\alpha \in (3,9]$, *odnosno* $g_1(\alpha) < g_2(\alpha)$, $\alpha \in (3,9]$ *ili* $g_1(\alpha) > g_2(\alpha)$, $\alpha \in (3,9]$. *Kako je npr.*

$$g_1(9) = 9 > g_2(9) = \frac{81}{4} - \frac{81}{2} + \frac{81}{4} = 0,$$

sledi da je $g_1(\alpha) > g_2(\alpha)$, $\alpha \in (3,9]$, *čime dobijamo*

$$\begin{aligned} X_{(3,9]} &= \sup\left\{ \alpha \wedge \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 \right) \;\middle|\; \alpha \in (3,9] \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{81}{4} - \frac{9}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 \;\middle|\; \alpha \in (3,9] \right\}. \end{aligned}$$

Kako je $g_2'(\alpha) = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha$, $\alpha \in (3,9]$ *i pri tome*

$$-\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 9,$$

sledi da je funkcija $g_2(\alpha) = \frac{81}{4} - \frac{9}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2$ *monotono nerastuća na intervalu* $(3,9]$, *te svoj supremum dostiže u levom kraju* 3 *intervala* $(3,9]$. *Sledi da je*

$$X_{(3,9]} = \sup\left\{ \frac{81}{4} - \frac{9}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 \;\middle|\; \alpha \in (3,9] \right\} = g_2(3) = 9.$$

Tako konačno dobijamo

$$\text{(S)} \int_X f d\mu = \max\left\{ X_{[0,3]}, X_{(3,9]}, X_{(9,\infty]} \right\} = \max\{3, 9, 0\} = 9.$$

Indeks

Bibliografija

[1] Vassili N. Kolokoltsov and Victor P. Maslov. *Idempotent Analysis and Its Applications*. Mathematics and Its Applications. Springer Dordrecht, 1997.

[2] Radko Mesiar and Endre Pap. Idempotent integral as limit of g-integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(3):385–392, 1999.

[3] Ljubo Nedović, Nebojša M. Ralević, and Tatjana Grbić. Large deviation principle with generated pseudo measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 155(1):65–76, 2005. Measures and conditioning.

[4] Endre Pap. An integral generated by decomposable measure. *Univ. Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat. Fak. Ser. Mat.*, 20(1):135–144, 1990.

[5] Endre Pap. *Null-additive set functions*, volume 337 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1995.

[6] Endre Pap. Pseudo-analysis as a mathematical base for soft computing. *Soft Computing*, 1:61–68, 1997.

[7] Endre Pap. *Handbook of measure theory*. Elsevier B.V., Sara Burgerhartstraat 25; Amsterdam, 1055 KV, 2002.

[8] Anatolii Puhalskii. *Large Deviations and Idempotent Probability*. Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics; 119. Chapman & Hall/CRC, 05 2001.

[9] Zhenyuan Wang and George J. Klir. *Generalized measure theory*. IFSR international series in systems science and systems engineering. Springer US, 2009.