Predgovor

U teoriji verovatnoće, oblast istraživanja principa velikih devijacija je relativno savremena grana verovatnoće. Proistekla je iz istraživanja konvergencije slučajnih promenljivih i verovatnosnih mera, tj. graničnih teorema u verovatnoći. Teorija se bavi „veoma malim” verovatnoćama, odnosno događajima čije verovatnoće eksponencijalnom brzinom konvergiraju ka nuli, i utvrđuje uslove za konvergenciju i precizni stepen te konvergencije. Danas se intenzivno primenjuje u raznim drugim fundamentalnim, kao i inženjerskim disciplinama. U poslednjih dvadesetak godina, teorija velikih devijacija je razvijana i primenjivana i u odnosu na skupovne funkcije koje nisu klasične mere (zasnovane na operaciji sabiranja pozitivnih brojeva), već skupovne funkcije koje su zasnovane na operacijama kao što je npr. maksimum. Ova magistarska teza se bavi upravo takvim pristupom teoriji velikih devijacija.

U atraktivnu teoriju nestandardnih mera kao i u teoriju velikih devijacija uputio me moj mentor, prof. dr Endre Pap, od koga sam dobio i ideje i veliku pomoć pri istraživanju. Pored prof. dr Endrea Papa, ogromnu i nesebičnu pomoć mi je pružio doc. dr Nebojša Ralević, kome se zbog toga posebno zahvaljujem.

Novi Sad, 07.12.2004. Ljubo Nedović

Sadržaj

Oznake

$\mathcal{D}(f)$ - domen funkcije f.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ - prošireni skup realnih brojeva.

$\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

$\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty]$.

Γ^{C} - komplement skupa Γ.

$\overline{\Gamma}$ - zatvaranje skupa Γ.

$\overset{\circ}{\Gamma}$ - unutrašnjost skupa Γ.

$\partial\Gamma$ - rub skupa Γ.

$\mathrm{ri}(\Gamma)$ - relativna unutrašnjost skupa Γ.

$B(x, r)$ - otvorena lopta u metričkom prostoru sa centrom u x i poluprečnika $r > 0$.

$B_r(x)$ - zatvorena lopta u metričkom prostoru sa centrom u x i poluprečnika $r > 0$.

$\langle x, y \rangle$ - Euklidski skalarni proizvod vektora u $\mathbb{R}^d$.

$\|x\|$ - Euklidska norma vektora $x \in \mathbb{R}^d$.

$\|f\|_p$ - L^p norma funkcije $f \in L^p(\mu)$.

χ_A - karakteristična funkcija skupa A.

κ_A - pseudo-karakteristična funkcija skupa A.

I_A - indikator iskaza ili događaja A ($I_A = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & , & A \\ 0 & , & \neg A \end{array} \right.$).

P - verovatnoća.

P_X - verovatnoća generisana slučajnom promenljivom X.

F_X - funkcija raspodele slučajne promenljive X.

φ_X - gustina raspodele slučajne promenljive X.

E - matematičko očekivanje.

D - disperzija.

$\mathsf{Cov}(X, Y)$ - kovarijansa slučajnih promenljivih X i Y.

$\rho_{X,Y}$ - koeficijent korelacije slučajnih promenljivih X i Y.

$\mathcal{P}o(\theta)$ - Poisson-ova raspodela sa parametrom θ.

$\mathcal{E}(a)$ - eksponencijala raspodela sa parametrom a.

$\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ - normalna raspodela sa parametrima m i σ.
i.i.d. - „nezavisne, jednako raspodeljene” slučajne promenljive.
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} X$ - konvergencija u verovatnoći niza slučajnih promenljivih X_n, $n \in \mathbb{N}$ ka slučajnoj promenljivoj X.
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ - konvergencija u raspodeli niza slučajnih promenljivih X_n, $n \in \mathbb{N}$ ka slučajnoj promenljivoj X.
S_n - suma slučajnih promenljivih $X_1,\ldots,X_n$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
$\hat{S}_n$ - srednja vrednost slučajnih promenljivih $X_1,\ldots,X_n$, $\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
$\mathcal{B}_E$ - Borel-ovo σ-polje na topološkom prostoru E.
$M_1(E)$ - skup svih verovatnosnih mera na nekom merljivom prostoru $(E,\mathcal{B})$.
$\mathcal{D}_f$ - efektivni domen funkcije $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.
$\psi_f(\alpha)$ - nivo-skup funkcije $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.
I - funkcija stope.
I^{δ} - δ-funkcija stope.
$\mathcal{L}_n$ - skup svih tipova sekvenci dužine n.
$T_n(\nu)$ - klasa tipa $\nu \in \mathcal{L}_n$.
$H(\nu)$ - entropija verovatnosnog vektora ν.
$H(\nu \mid \mu)$ - relativna entropija verovatnosnog vektora ν u odnosu na verovatnosni vektor μ.
Λ_μ, Λ_X - generatorna funkcija logaritamskog momenta.
$\Lambda_\mu^*, \Lambda_X^*$ - Fenchel-Legendre-ova transformacija funkcije Λ.
$\vee$ - maksimum, odnosno supremum ($a \vee b = \max\{a,b\}$).
$\wedge$ - minimum, odnosno infimum ($a \wedge b = \min\{a,b\}$).
$S(f)$ - idempotentni integral od f u odnosu na idempotentnu verovatnoću μ.
$C_b^+(E)$ - familija ograničenih, neprekidnih funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$.
$\overline{C}_b^+(E)$ - familija ograničenih, od gore poluneprekidnih funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$.
$\underline{C}_b^+(E)$ - familija ograničenih, od dole poluneprekidnih funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$.
$C_{\mathcal{K}}^+(E)$ - familija ograničenih, neprekidnih funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$ sa kompaktnim nosačem.
$\xrightarrow{\mu-a.e.}$ - konvergencija skoro svuda u odnosu na meru μ.
$\xrightarrow{\mu}$ - konvergencija u meri μ.
$\xrightarrow{ld}$ - konvergencija LDP.
$\xrightarrow{iw}$ - konvergencija u slaboj topologiji.
$I\mathcal{M}(E)$ - skup svih $\mathcal{F}$-idempotentnih verovatnosnih mera na topološkom prostoru E.

Glava 1

Uvod

Princip velikih devijacija (eng. ***Large deviation principle***, skraćeno LDP) izučava verovatnoće „veoma retkih događaja”, tj. familije događaja čije verovatnoće eksponencijalno konvergiraju ka nuli, i utvrđuje preciznije, ako je moguće, stepen te konvergencije.

Savremenu teoriju LDP su uobličili S.R.S. Varadhan, Donsker, Freidlin i Wentzell (vidi [DeZe98], [DeSt98], [VaSRS66]), ali su temelji teorije postavljeni još početkom dvadesetog veka u sklopu izučavanja graničnih teorema u verovatnoći. Princip velikih devijacija je našao svoju veliku primenu u raznim oblastima prirodnih i tehničkih nauka, kao npr. u informatici, teoriji kodiranja, obradi slika, statističkoj mehanici, rešavanju diferencijalnih jednačina, slučajnim procesima itd. (vidi [DeZe98], [DeSt98], [BoElTu99], [SeYu01], [VaSRS66], [FoFa99], [Fo00], [Ac90], [DoVa85], [FrWe84]). Kao motivacija za teoriju velikih devijacija može da posluži sledeći jednostavan primer. Neka je X_n, $n \in \mathbb{N}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa normalnim $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelama. Tada njihova srednja vrednost $\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ima normalnu $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{n}\right)$ raspodelu, odnosno za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\hat{S}_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \tag{1.1}$$

i za svaki interval $[a,b]$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(a \leq \sqrt{n}\hat{S}_n \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Jednakost (1.1) se može zapisati u duhu LDP na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\mathsf{P}\left(\left|\hat{S}_n\right| \geq \varepsilon\right)\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{1.2}$$

Iz poslednje jednakosti se vidi da slučajna promenljiva $\left|\hat{S}_n\right|$ uzima relativno velike vrednosti sa malim verovatnoćama reda $e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$. Kada slučajne promenljive X_n imaju neke druge raspodele, tada je drugačijeg oblika i granična vrednost (1.2). U sekciji 2.4.1 su prikazani primeri sa nekim važnim tipovima raspodela. Glavni zadaci u teoriji velikih devijacija su:

1. formulacija potrebnih i/ili dovoljnih uslova da neka familija verovatnosnih mera konvergira u smislu velikih devijacija,

2. konstrukcija tzv. funkcije stope kojom se meri brzina tj. stepen gorepomenute konvergencije.

U glavi 2, dat je delimičan prikaz klasične LDP teorije sa verovatnosnim merama definisanim na vektorsko-topološkim prostorima $\mathbb{R}^n$. Navedena su dva pristupa, pri čemu su kao glavni izvori korišćene knjige [DeZe98] i [DeSt98] u kojima se nalaze i dokazi navedenih teorema, ali su u ovoj tezi dokazi detaljnije razrađeni. Prvi je pristup preko entropija (teoreme Sanov-a i Cramér-a za konačne alfabete), a drugi je opštiji topološki pristup u $\mathbb{R}^n$ preko generatorne funkcije logaritamskog momenta i njene Fenchel-Legendre-ove transformacije (teoreme Cramér-a i Gärtner-Ellis). U pristupu preko entropija, razmatra se niz Y_n, $n \in \mathbb{N}$ nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakim raspodelama određenim verovatnosnom merom μ, pri čemu je skup mogućih vrednosti tih slučajnih promenljivih konačan. Teorema Sanov-a utvrđuje konvergenciju u smislu velikih devijacija (skraćeno „LD konvergencija") srednjih vrednosti slučajnih promenljivih Y_n, $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je odgovarajuća funkcija stope konstruisana kao relativna entropija verovatnosnih mera u odnosu na meru μ. Teorema Cramér-a predstavlja reformulaciju teoreme Sanov-a, gde se funkcija stope konstruiše korišćenjem Fenchel-Legendre-ove transformacije. Pristup preko generatorne funkcije logaritamskog momenta i njene Fenchel-Legendre-ove transformacije daje uopštenje za slučajne promenljive Y_n, $n \in \mathbb{N}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, pri čemu se odgovarajuća funkcija stope konstruiše preko generatorne funkcije logaritamskog momenta i njene Fenchel-Legendre-ove transformacije. Teorema Cramér-a razmatra slučaj nezavisnih slučajnih promenljivih Y_n, $n \in \mathbb{N}$ sa jednakim raspodelama, dok teorema Gärtner-Ellis daje uopštenje za situaciju kada slučajne promenljive Y_n, $n \in \mathbb{N}$ nisu nezavisne i sa jednakim raspodelama. Za nekoliko važnih raspodela je izračunata generatorna funkcija logaritamskog momenta i odgovarajuća Fenchel-Legendre-ova transformacija, pri čemu je za izračunavanje ovih funkcija i za iscrtavanje njihovih grafika korišćen programski paket MATHEMATICA. Na kraju glave 2 dat je kratak prikaz jedne primene teorije velikih devijacija na lance Markov-a.

U glavi 3 dat je prikaz teorije idempotentnih verovatnosnih mera. Tačnije, reč je o maksitivnim tj. sup-merama, o specijalnim tipovima ovakvih mera, tipovima konvergencija idempotentnih mera, o odgovarajućem integralu zasnovanom na operacijama sup i $\cdot$, njegovim osobinama, kao i o topološkom prostoru idempotentnih verovatnosnih mera. Dat je prikaz uslovnih verovatnoća u odnosu na idempotentne verovatnosne mere, osvrt na metrike koje se mogu razmatrati na skupu idempotentnih verovatnosnih mera, a koje su značajne sa stanovišta teorije velikih devijacija, navedene su i teoreme koje su analogoni leme Fatou-a, Lebesgue-ove teoreme monotone konvergencije, Lebesgue-ove teoreme dominantne konvergencije, Riesz-ove teoreme reprezentacije, itd. U poslednjoj sekciji je prikazan jedan od pristupa LDP teoriji u kojem se koriste idempotente mere, tj. mere zasnovane na operacijama sup i $\cdot$. Razmatra se LD konvergencija standardnih verovatnosnih mera ka idempotentnoj, tj. maksitivnoj verovatnosnoj meri, odnosno konvergencija standardnih integrala ka integralu zasnovanom na idempotentnoj, tj. maksitivnoj verovatnosnoj meri. Teorema Portmanteau-a daje nekoliko ekvivalentnih iskaza koji opisuju ovakvu LD konvergenciju. Kao glavni izvor je korišćena knjiga [Pu01].

U glavi 4 se uvodi originalni pristup teoriji velikih devijacija. Prvo je dat prikaz strukture poluprstena $([a,b],\oplus,\odot)$, osobina operacija $\oplus$ i $\odot$, kao i najvažnijih tipova poluprstena. Zatim su izloženi pojmovi mera i integrala zasnovanih na poluprstenu, tj. sa vrednostima u poluprstenu $([a,b],\oplus,\odot)$. Izučavanju strukture poluprstena $([a,b],\oplus,\odot)$ kao i mera i integrala zasnovanih na tzv. pseudo-sabiranju $\oplus$ i pseudo-množenju $\odot$, veliki doprinos su dali E. Pap, E. P. Klement, R. Mesiar, V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, S. N. Samborskij, B. Schwizer, A. Sklar, J. Aczél i drugi (vidi npr. [Acz66], [KMP00], [KoMa89], [MaSa92], [MePa99], [Pa90], [Pa93], [Pa02] i [ScSk83]). Ovaj originalni pristup teoriji velikih devijacija se zasniva na uvođenju pojma LD konvergencije $\oplus$-dekompozabilnih mera ka maksitivnoj meri, odnosno LD konvergencije integrala baziranih na $\oplus$-dekompozabilnim merama ka integralu baziranom na maksitivnoj meri. Kao motivacija za ovakav pristup je poslužio rad [MePa99]. U teoremi 4.8 je prikazana jedna karakterizacija ove vrste LD konvergencije. Preciznije, u teoremi je dokazano da iz LD konvergencije integrala sledi konvergencija odgovarajućih „verovatnoća”, analogno tvrđenju iz teoreme Portmanteau-a (vidi [Pu01]).

Glava 2

Princip velikih devijacija

2.1 Pomoćna tvrđenja i pojmovi

U ovom odeljku se ukratko navode neka tvrđenja i pojmovi iz teorije mere, integrala i konveksne analize koji su neophodni u dokazima teorema LDP teorije. O ovoj temi možete detaljnije naći npr. u [Pa82], [RuWa87], [HaOl90] i [MaJo89].

Definicija 2.1 *Za neprazan, konveksan skup Γ u vektorsko-topološkom prostoru nad poljem $\mathbb{R}$, **relativna unutrašnjost** skupa Γ (eng. **relative interior**), u oznaci $\mathrm{ri}(\Gamma)$, je skup*

$$\mathrm{ri}(\Gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \Gamma \mid \forall y \in \Gamma,\ \exists \varepsilon > 0,\ \ x - \varepsilon(y - x) \in \Gamma\}.$$

Nejednakost Jensen-a će biti korišćena u nekom od sledeća tri oblika.

Teorema 2.1 (Nejednakost Jensen-a) *Neka je $\mathcal{M}$ σ-algebra na Ω, i neka je μ pozitivna mera na $\mathcal{M}$ takva da je $\mu(\Omega) = 1$.*

(a) *Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija iz $L^1(\mu)$ takva da je $f(\Omega) \subseteq (a,b) \subseteq (-\infty,\infty)$, i ako je $\varphi : ((,a),b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, tada važi*

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu.$$

Specijalno:

(b) *za realnu funkciju $f \in L^1(\mu)$ nad skupom Ω važi*

$$\exp\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \exp(f) d\mu,$$

(c) *za pozitivnu realnu funkciju $f \in L^1(\mu)$ nad skupom Ω važi*

$$\exp\left(\int_{\Omega} \ln f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} f d\mu.$$

U dokazu teoreme Cramér-a se koristi sledeće tvrđenje i nejednakosti.

Lema 2.1 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\{(a_1(\varepsilon), \ldots, a_n(\varepsilon)) \mid \varepsilon \in (0, \infty)\}$ familija n-torki nenegativnih realnih brojeva ($a_i(\varepsilon) \geq 0$). Tada važi*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \left(\varepsilon \ln \sum_{i=1}^{n} a_i(\varepsilon)\right) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} (\varepsilon \ln a_i(\varepsilon)).$$

Teorema 2.2 *Za slučajne promenljive X i Y, kao Borel-merljive funkcije, ukoliko postoje odgovarajuća (konačna) matematička očekivanja, važe sledeće nejednakosti:*

(a) ***Nejednakost Schwarz-a (Cauchy-Bunyakovskii)****: ako postoje konačni momenti drugog reda slučajnih promenljivih X i Y, tada je $\mathsf{E}(|XY|)$ konačno i važi*

$$(\mathsf{E}(|XY|))^2 \leq \mathsf{E}\left(X^2\right) \mathsf{E}\left(Y^2\right).$$

(b) ***Nejednakost Lyapunov-a****: za $0 < p < q$ je*

$$(\mathsf{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} \leq (\mathsf{E}(|X|^q))^{\frac{1}{q}}.$$

(c) ***Nejednakost Hölder-a****: za $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ je*

$$\mathsf{E}(|XY|) \leq (\mathsf{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (\mathsf{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}.$$

(d) ***Nejednakost Minkowski-a****: za $p \geq 1$ je*

$$(\mathsf{E}(|X+Y|^p))^{\frac{1}{p}} \leq (\mathsf{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} + (\mathsf{E}(|Y|^p))^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 2.3 *Neka je X slučajna promenljiva i neka je g nenegativna, parna Borel-merljiva funkcija sa vrednostima u $\mathbb{R}$, koja je neopadajuća na $[0, \infty)$ i takva da postoji $\mathsf{E}(g(X))$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi*

$$\mathsf{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{E}(g(X))}{g(\varepsilon)}.$$

Specijalno, za $g(x) = |x|^r$, gde je $r > 0$, dobijamo

(a) ***nejednakost Markov-a****:*

$$\mathsf{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r},$$

(b) ***nejednakost Chebyshev-a****:*

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{E}\left([X - \mathsf{E}(X)]^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathsf{D}(X)}{\varepsilon^2},$$

Teorema 2.4 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive i neka je $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

(a) *Ako je* $p > 0$ *i postoje* $\mathsf{E}(|X_i|^p) \in \overline{\mathbb{R}}$, *tada*

(a.1) *za* $0 < p \le 1$ *važi*

$$\mathsf{E}(|S_n|^p) \le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(|X_i|^p),$$

(a.2) *za* $1 < p$ *važi*

$$\mathsf{E}(|S_n|^p) \le n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(|X_i|^p).$$

(b) *Za svako* $t > 0$ *važi* ***nejednakost Chebyshev-a****:*

$$\mathsf{P}(S_n \ge x) \le e^{-tx}\mathsf{E}\left(e^{tS_n}\right)$$

(odnosno $\mathsf{P}\left(e^{tS_n} \ge e^{tx}\right) \le e^{-tx}\mathsf{E}\left(e^{tS_n}\right)$*).*

U ovoj magistarskoj tezi, biće u ovoj glavi prikazana konvergencija u smislu velikih devijacija klasičnih verovatnosnih mera definisanih na vektorsko-topološkom prostoru $\mathbb{R}^d$, koji je vrsta tzv. Poljskog metričkog prostora (vidi [DeSt98]). U glavi 3 će biti prikazan pristup sa idempotentnim verovatnosnim merama koje su definisane na topološkom prostoru Tikhonov-a (vidi [Pu01]).

Definicija 2.2 ***Poljski prostor*** *je kompletan, separabilan metrički prostor.*

Definicija 2.3 ***Prostor Tikhonov-a*** *je topološki prostor* E *u kojem je svaki konačan skup zatvoren, i u kome za svaki zatvoren skup* F *i svaku tačku* $x_0 \in E \setminus F$ *postoji neprekidna funkcionela* $f : E \to \mathbb{R}$ *takva da je* $f(x_0) = 0$ *i* $f(x) = 1, x \in F$.

2.2 Osnovne definicije i tvrđenja o LDP

Neka je E topološki prostor i neka je $(E, \mathcal{B})$ merljiv prostor. Neka je $M_1(E)$ skup svih verovatnosnih mera na $(E, \mathcal{B})$. Označimo sa $\mathcal{B}_E$ Borel-ovu σ-algebru na E. Smatraćemo da su svi verovatnosni prostori koji se pojavljuju kompletni, pa ćemo tako i za $\mathcal{B}_E$ smatrati da je kompletirana Borel-ova σ-algebra na E.[1] Najčešće će se razmatraju Poljski prostori E, i situacija kada je $\mathcal{B}_E \subseteq \mathcal{B}$. Ovde ćemo se ograničiti na vektorsko topološke prostore E.

Za funkciju $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ definišemo ***nivo - skupove***

$$\psi_f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid f(x) \le \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R},$$

i ***efektivni domen***

$$\mathcal{D}_f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid f(x) < \infty\}.$$

U teoriji velikih devijacija, osim formulacije potrebnih i/ili dovoljnih uslova da neka familija verovatnosnih mera konvergira u smislu velikih devijacija, zadatak je i odrediti „brzinu” te konvergencije. Meru LD konvergencije predstavlja funkcija stope, za koju se u teoremi 2.5 pokazuje da je jedinstvena, ukoliko postoji.

[1] Razmatrane verovatnosne mere su kompletne.

Definicija 2.4 *Funkcija $I : E \to [0,\infty]$ je* ***funkcija stope*** *(eng.* ***rate function****) ako je od dole poluneprekidna (dakle, ako su nivo skupovi $\psi_I(\alpha)$ zatvoreni potskupovi u E za svako $\alpha \in [0,\infty)$). Funkcija $I : E \to [0,\infty]$ je* ***dobra funkcija stope*** *(eng.* ***good rate function****) ako su nivo skupovi $\psi_I(\alpha)$ kompaktni podskupovi u E za svako $\alpha \in [0,\infty)$).*

Napomena 2.1 *Pošto posmatramo samo metričke prostore E, poluneprekidnost odozdo neke funkcije $f : E \to [0,\infty]$ može da se proverava pomoću nizova, tj. f je poluneprekidna odozdo ako i samo ako je $\liminf\limits_{x_n \to x} f(x_n) \geq f(x)$ za svako $x \in E$ i svaki niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ elemenata prostora E koji konvergira ka x.*

Kao pomoćni alat u dokazivanju nekih od narednih teorema se koristi δ-funkciju stope, koja u opštem slučaju nije funkcija stope.

Definicija 2.5 *Za svaku funkciju stope I i svako $\delta > 0$ definišemo* ***δ-funkciju stope*** *(eng.* ***δ-rate function****) $I^\delta : E \to [0,\infty)$ sa*

$$I^\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{I(x) - \delta, \tfrac{1}{\delta}\right\},\ x \in E$$

Napomena 2.2 *Smatraćemo da je infimum funkcije f nad praznim skupom jednak ∞ ($\inf\limits_{x\in\emptyset} f(x) = \infty$).*

Nadalje u tekstu sa $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ označavamo familiju verovatnosnih mera na E, dakle $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$, pri čemu familija ne mora biti indeksirana sa $\varepsilon > 0$, već se može posmatrati bilo koji skup pozitivnih indeksa čija adherencija sadrži nulu. Sledi glavna definicija u teoriji velikih devijacija.

Definicija 2.6 *Kažemo da $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$* ***zadovoljava princip velikih devijacija sa funkcijom stope*** *I (eng.* ***satisfies large deviation principle with rate function*** *I), skraćeno $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$* ***zadovoljava*** **LDP**, *ako za svako $\Gamma \in \mathcal{B}$ važi*

$$-\inf_{x\in\overset{\circ}{\Gamma}} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)) \leq -\inf_{x\in\overline{\Gamma}} I(x). \tag{2.1}$$

Vrednosti $-\inf\limits_{x\in\overset{\circ}{\Gamma}} I(x)$ i $-\inf\limits_{x\in\overline{\Gamma}} I(x)$ ćemo skraćeno zvati i označavati kao levu granicu (LB) *odnosno desnu granicu* (UB) *nejednakosti* (2.1).

Za skup $\Gamma \in \mathcal{B}$ kažemo da je ***I-skup neprekidnosti*** (eng. ***I-continuity set***) ako je

$$\inf_{x\in\overset{\circ}{\Gamma}} I(x) = \inf_{x\in\overline{\Gamma}} I(x) \stackrel{\text{def}}{=} I_\Gamma. \tag{2.2}$$

Napomena 2.3 *Funkcija I^δ nije funkcija stope, ali se koristi pri ispitivanju* (UB) *jer za svaki skup Γ važi $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \inf\limits_{x\in\Gamma} I^\delta(x) = \inf\limits_{x\in\Gamma} I(x)$, odakle sledi da je* (UB) *u* (2.1) *zadovoljeno ako i samo za svako $\delta > 0$ i svaki merljiv skup Γ važi*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)) \leq -\inf_{x\in\overline{\Gamma}} I^\delta(x).$$

Ukoliko familija verovatnosnih mera LD konvergira, funkcija stope kojom se meri stepen te konvergencije je jednoznačno određena, što je tvrđenje sledeće teoreme (vidi npr. [DeSt98]).

Teorema 2.5 *Ako $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ zadovoljava princip velikih devijacija sa nekom funkcijom stope, tada je ta funkcija stope jednoznačno određena.*

Dokaz: Pretpostavimo da $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ zadovoljava princip velikih devijacija sa dve funkcije stope I_1 i I_2, i dokažimo da je $I_1(x) = I_2(x)$ za proizvoljno $x \in E$.

Korak 1: Pošto su I_k, $k \in \{1,2\}$ od dole poluneprekidne funkcije, za njih važi $I_k(x) = \lim_{r\to 0^+} \inf_{B(x,r)} I_k$. Naime, ako pretpostavimo da je $I_k(x) > A = \lim_{r\to 0^+} \inf_{B(x,r)} I_k$, tada za svako $r_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ postoji neko $x_n \in B(x, r_n)$, pri čemu je tada $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ali nije $\liminf_{x_n \to x} I_k(x_n) \geq I_k(x)$ (drugim rečima, npr. $\psi_{I_k}\left(\frac{I_k(x)+A}{2}\right)$ nije zatvoren skup), što ne može biti jer je I_k, kao funkcija stope, poluneprekidna od dole.

Korak 2: Realne funkcije $g_k : (0,\infty) \to [0,\infty]$, $g_k(r) = \inf_{B(x,r)} I_k$ su monotono nerastuće, te stoga mogu imati najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida.

Korak 3: U svakoj tački r neprekidnosti funkcije g_k važi $\inf_{B(x,r)} I_k = \inf_{\overline{B(x,r)}} I_k$, odnosno za svaku tačku r neprekidnosti funkcije g_k je $B(x,r)$ skup neprekidnosti funkcije I_k, te u svakoj tački r u kojoj su obe funkcije g_k neprekidne važi

$$\inf_{B(x,r)} I_1 = -\lim_{\varepsilon\to\infty} \varepsilon \ln(\mu_\varepsilon(B(x,r))) = \inf_{B(x,r)} I_2.$$

Korak 4: Pošto je $\inf_{B(x,r)} I_1 = \inf_{B(x,r)} I_2$ u svakoj tački neprekidnosti obe funkcije g_k, a taj skup tačaka neprekidnosti je gust u $(0,\infty)$ (tj. postoji niz tačaka r_n, $n \in \mathbb{N}$ u kojima su obe g_k neprekidne i $\lim_{n\to 0^+} r_n = 0$), sledi $\lim_{r\to 0^+} \inf_{B(x,r)} I_1 = \lim_{r\to 0^+} \inf_{B(x,r)} I_2$, odakle, za proizvoljno odabrano $x \in E$, na osnovu koraka 1 sledi $I_1(x) = I_2(x)$. $\square$

Kao što će se kasnije videti, iako je funkcija stope jednoznačno određena, ona se može konstruisati na više načina.

Pri ispitivanju ili dokazivanju LDP često se koristi sledeća teorema.

Teorema 2.6 *Familija verovatnosnih mera $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ zadovoljava princip velikih devijacija sa funkcijom stope I ako i samo ako*

(UB) *za svako $\alpha < \infty$ i svaki merljivi skup Γ za koje je $\overline{\Gamma} \subset \psi_I(\alpha)^{\complement}$ važi*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)) \leq -\alpha, \tag{2.3}$$

(LB) *za svako $x \in \mathcal{D}_I$ i svaki merljivi skup Γ za koji je $x \in \overset{\circ}{\Gamma}$ važi*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)) \geq -I(x). \tag{2.4}$$

Još češće se, pod određenim uslovima, dokaz nejednakosti (2.1) izvodi tako što se, s jedne strane samo za zatvorene skupove dokazuje prva nejednakost u (2.1), i s druge strane samo za otvorene skupove dokazuje poslednja nejednakost u (2.1). Opravdanje za takav postupak daje sledeća teorema.

Teorema 2.7 *U tipičnom slučaju $\mathcal{B}_E \subseteq \mathcal{B}$, familija $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ zadovoljava* LDP *sa funkcijom stope I ako i samo ako*

(UB) *za svaki zatvoren skup $F \subseteq E$ važi*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon (F)) \leq -\inf_{x\in F} I(x), \tag{2.5}$$

(LB) *za svaki otvoren skup $G \subseteq E$ važi*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon \ln \mu_\varepsilon (G)) \geq -\inf_{x\in G} I(x). \tag{2.6}$$

Kao što je izloženo u narednoj definiciji, moguće je govoriti i o LD konvergenciji u nešto slabijem smislu od onog iz osnovne definicije (2.1).

Definicija 2.7 *Pretpostavimo da svi kompaktni podskupovi od E pripadaju $\mathcal{B}$. Kažemo da familija $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$* ***zadovoljava slabi*** **LDP** ***sa funkcijom stope*** *I (eng.* ***satisfies weak*** **LDP** ***with rate function*** *I), skraćeno $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$* ***zadovoljava slabi*** **LDP**, *ako* (UB) *u* (2.3) *važi za svako $\alpha < \infty$ i svaki kompaktan podskup od $\psi_I(\alpha)^{\mathsf{C}}$, a* (LB) *u* (2.4) *važi za svaki merljiv skup.*

Postoje familije verovatnosnih mera koje zadovoljavaju slabi LDP sa nekom dobrom funkcijom stope, a ne zadovoljavaju LDP ni sa jednom funkcijom stope (vidi npr. [DeZe98]).

Za neke familije verovatnosnih mera specijalnog tipa, dovoljno je ispitati neke slabije zahteve za njihovu LD konvergenciju. Naredna definicija i teorema govore o jednoj takvoj klasi verovatnosnih mera.

Definicija 2.8 *Pretpostavimo da svi kompaktni podskupovi od E pripadaju $\mathcal{B}$. Kažemo da je familija $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$* ***eksponencijalno čvrsta*** *(eng.* ***exponentially tight****) ako za svako $\alpha < \infty$ postoji kompaktan skup $K_\alpha \subseteq E$ takav da je*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon \left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right) < -\alpha. \tag{2.7}$$

Teorema 2.8 *Neka je $I : E \to [0,\infty]$ funkcija stope. Za eksponencijalno čvrstu familiju $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ verovatnosnih mera važi:*

(a) *Ako za funkciju I nejednakost* (2.3) *važi za neko $\alpha < \infty$ i sve kompaktne podskupove od $\psi_I(\alpha)^{\mathsf{C}}$, tada nejednakost* (2.3) *važi i za sve merljive skupove Γ za koje je $\overline{\Gamma} \subset \psi_I(\alpha)^{\mathsf{C}}$.*

Specijalno, u slučaju $\mathcal{B}_E \subseteq \mathcal{B}$, ako nejednakost (2.5) *važi za sve kompaktne skupove, tada važi i za sve zatvorene skupove.*

(b) *Ako* (2.4) *važi za sve merljive skupove, odnosno* (2.6) *važi za sve otvorene skupove u slučaju $\mathcal{B}_E \subseteq \mathcal{B}$, tada je I dobra funkcija stope.*

Dokaz: Dokazujemo da važe (UB) u (2.3) i (LB) u (2.4).

(UB) Posmatrajmo proizvoljno $\alpha < \infty$ i merljiv skup $\Gamma \in \mathcal{B}$ za koji je $\overline{\Gamma} \subset \psi_I(\alpha)^{\mathsf{C}}$. Kako je familija $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ eksponencijalno čvrsta, postoji kompaktan skup K_α takav da je

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right) < -\alpha. \tag{2.8}$$

Primetimo da je $\overline{\Gamma}\cap K_\alpha \in \mathcal{B}$ i $K_\alpha^{\mathsf{C}} \in \mathcal{B}$. Iz relacije $\Gamma \subseteq \left(\overline{\Gamma}\cap K_\alpha\right)\cup K_\alpha^{\mathsf{C}}$ i osobina pozitivnih mera sledi da važi $\mu_\varepsilon(\Gamma) \le \mu_\varepsilon\left(\overline{\Gamma}\cap K_\alpha\right) + \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)$, odnosno $\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma) \le \varepsilon \ln\left(\mu_\varepsilon\left(\overline{\Gamma}\cap K_\alpha\right) + \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right)$, odakle sledi

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)\right) \le \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln\left(\mu_\varepsilon\left(\overline{\Gamma}\cap K_\alpha\right) + \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right)\right),$$

te se primenom leme 2.1 na vrednost na desnoj strani prethodne nejednakosti dobija

$$\begin{aligned}&\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon(\Gamma)\right) \le \\ &\qquad \le \max\left\{\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon\left(\overline{\Gamma}\cap K_\alpha\right)\right), \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right)\right\}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

S druge strane, skup $\overline{\Gamma}\cap K_\alpha$ je zatvoren i kompaktan (kao presek zatvorenog i kompaktnog skupa), i pri tome iz $\overline{\Gamma} \subseteq \psi_I(\alpha)^{\mathsf{C}}$ sledi da je i $\overline{\Gamma}\cap K_\alpha \subseteq \psi_I(\alpha)^{\mathsf{C}}$, te po pretpostavci teoreme sledi da za $\overline{\Gamma}\cap K_\alpha$ važi nejednakost (2.3), dakle

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon\left(\overline{\Gamma}\cap K_\alpha\right)\right) < -\alpha. \tag{2.10}$$

Uvrštavanjem (2.8) i (2.10) u (2.9) sledi tvrđenje.

(LB) Neka je $\alpha < \infty$ proizvoljno. Pošto je familija $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ eksponencijalno čvrsta, postoji kompaktan skup K_α za koji važi (2.7). Skup $K_\alpha^{\mathsf{C}} \in \mathcal{B}$ je otvoren, te za svako $x \in K_\alpha^{\mathsf{C}}$ važi (2.4), odnosno

$$I(x) \overset{(2.4)}{\ge} -\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right) \ge -\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon \ln \mu_\varepsilon\left(K_\alpha^{\mathsf{C}}\right)\right) \overset{(2.7)}{>} \alpha.$$

Odavde zaključujemo da iz $I(x) \le \alpha$ sledi $x \notin K_\alpha$, te se dobija

$$x \in \psi_I(\alpha) \quad \Rightarrow \quad I(x) \le \alpha \quad \Rightarrow \quad x \notin K_\alpha^{\mathsf{C}} \quad \Rightarrow \quad x \in K_\alpha.$$

Dakle, važi $\psi_f(\alpha) \subseteq K_\alpha$, te je zatvoren skup $\psi_f(\alpha)$ kompaktan jer je podskup kompaktnog skupa K_α. Pošto sve ovo važi za proizvoljno $\alpha \in [0,\infty)$, I je dobra funkcija stope. □

Posledica 2.1 *Ako eksponencijalno čvrsta familija* $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq M_1(E)$ *verovatnosnih mera zadovoljava slabi* LDP *sa funkcijiom stope* I*, tada je* I *dobra funkcija stope i* $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *zadovoljava* LDP.

U naredna dva primera, magistarska teza daje ilustraciju LD konvergencije za dve jednostavne familije verovatnosnih mera.

Primer 2.1 *Neka je* $E=\mathbb{R}^2$ *i* $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. *Posmatrajmo tačku* $x_0=(1,1)\in\mathbb{R}^2$ *i lopte* $B_n=B\left(x_0,\frac{1}{n^3}\right)$, $n\in\mathbb{N}$. *Neka su* μ_n, $n\in\mathbb{N}$ *verovatnosne mere koje redom odgovaraju slučajnim promenljivama* X_n *sa uniformnim* $\mathcal{U}(B_n)$ *raspodelama (*X_n *ima gustinu raspodele* $\varphi_{X_n}(x)=\begin{cases}\frac{n^6}{\pi} & , \quad x\in B_n\\ 0 & , \quad x\notin B_n\end{cases}$*). Za verovatnosne mere* μ_n *važi* $\mu_n(B_n)=1$, *pri čemu niz lopti* B_n *„teži” ka tački* x_0. *Familija verovatnosnih mera* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zadovoljava* LDP *sa dobrom funkcijom stope* $I(x)=\begin{cases}\infty & , \quad x\neq x_0\\ 0 & , \quad x=x_0\end{cases}$. *Naime, I je očigledno dobra funkcija stope, a za proizvoljni merljiv skup* $\Gamma\in\mathcal{B}$ *proveravamo nejednakosti* (2.1) *diskutujući po slučajevima:*

(a) *slučaj* $x_0\in\mathring{\Gamma}$*:*

u ovom slučaju je $-\inf\limits_{\mathring{\Gamma}} I=-\inf\limits_{\overline{\Gamma}} I=0$, *a s druge strane važi*

$$\exists n_0,\forall n\geq n_0,\ B_n\subseteq\Gamma \quad\Rightarrow\quad \exists n_0,\forall n\geq n_0,\ 1=\mu_n(B_n)\leq\mu_n(\Gamma) \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \exists n_0,\forall n\geq n_0,\ \mu_n(\Gamma)=1 \quad\Rightarrow\quad \exists n_0,\forall n\geq n_0,\ \tfrac{1}{n}\ln\mu_n(\Gamma)=\tfrac{1}{n}\ln 1=0$$

tako da nejednakosti (2.1) *važe jer su u njima svi izrazi jednaki nuli;*

(b) *slučaj* $x_0\notin\overline{\Gamma}$*:*

u ovom slučaju je $-\inf\limits_{\mathring{\Gamma}} I=-\inf\limits_{\overline{\Gamma}} I=-\infty$, *a s druge strane važi*

$$\exists n_0,\forall n\geq n_0,\ \Gamma\cap B_n=\emptyset \quad\Rightarrow\quad \exists n_0,\forall n\geq n_0,\ \tfrac{1}{n}\ln\mu_n(\Gamma)=\tfrac{1}{n}\ln 0=-\infty$$

tako da nejednakosti (2.1) *važe jer u njima svi izrazi imaju vrednost* $-\infty$*;*

(c) *slučaj* $x_0\in\partial\Gamma=\overline{\Gamma}\setminus\mathring{\Gamma}$*:*

u ovom slučaju je $-\inf\limits_{\mathring{\Gamma}} I=-\infty$ *i* $-\inf\limits_{\overline{\Gamma}} I=0$, *a s druge strane važi*

$$\tfrac{1}{n}\ln\mu_n(\Gamma)=\tfrac{1}{n}\ln\mu_n(\Gamma\cap B_n)=\tfrac{1}{n}\ln c_n$$

gde je $c_n\in[0,1]$, *tako da je*

$$a=\liminf_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\ln\mu_n(\Gamma)\right)\in[-\infty,0] \ \wedge\ b=\limsup_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\ln\mu_n(\Gamma)\right)\in[-\infty,0]$$

pa nejednakosti (2.1) *važe jer je zadovoljeno* $-\infty\leq a\leq b\leq-\infty$.

Primer 2.2 *Neka je* $E=[0,\infty)$ *sa standardnom topologijom indukovanom iz* $\mathbb{R}$ *i neka je* $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{[0,\infty)}$. *Označimo sa* $\lambda_{[0,\infty)}$ *Lebesgue-ovu meru na* $[0,\infty)$. *Za* $\varepsilon>0$ *definišimo funkciju* $f_\varepsilon:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *sa* $f_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$. *Zatim za svako* $\varepsilon>0$ *definišemo verovatnosnu meru* μ_ε *sa* $\mu_\varepsilon(A)=\int\limits_A f_\varepsilon d\lambda_{[0,\infty)}$, $A\in\mathcal{B}$ *(radi se o verovatnosnim merama jer je* $\int\limits_{[0,\infty)} f_\varepsilon d\lambda_{[0,\infty)}=1$*). Familija verovatnosnih mera* $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *zadovoljava* LDP *sa dobrom funkcijom stope* $I(x)=x$. *Naime, I je očigledno dobra funkcija stope, a* LDP *proveravamo dokazujući* (UB) *i* (LB) *iz teoreme* 2.7*:*

(UB) *Neka je $F \subseteq [0,\infty)$ zatvoren skup, i neka je $[a,b]$ najmanji zatvoren interval koji sadrži F, ili posmatramo najmanji $[a,\infty) \supseteq F$ ako F nije ograničen odozgo. U oba slučaja je $a \in F$ $[*]$ te važi*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\ln\mu_\varepsilon(F)) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln\int_F f_\varepsilon d\lambda_{[0,\infty)}\right) \le \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}dx\right) =$$
$$= \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln\left(e^{-\frac{a}{\varepsilon}} - e^{-\frac{b}{\varepsilon}}\right)\right) \le \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln e^{-\frac{a}{\varepsilon}}\right) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right) =$$
$$= -a \overset{[*]}{=} -\inf_{x\in F} I(x).$$

(LB) *Neka je $G \subseteq [0,\infty)$ otvoren skup. Tada je $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n)$ za neke otvorene intervale $(a_n,b_n) \subseteq [0,\infty)$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\ln\mu_\varepsilon(G)) = \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln\int_G f_\varepsilon d\lambda_{[0,\infty)}\right) \ge \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}dx\right) =$$
$$= \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\ln\left(e^{-\frac{a_n}{\varepsilon}} - e^{-\frac{b_n}{\varepsilon}}\right)\right) = -a_n$$

jer je (primenom l'Hospital-ovog pravila $[**]$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\left(e^{-\frac{a_n}{\varepsilon}} - e^{-\frac{b_n}{\varepsilon}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\left(e^{-\frac{a_n}{\varepsilon}} - e^{-\frac{b_n}{\varepsilon}}\right)}{\frac{1}{\varepsilon}} =$$
$$\overset{[**]}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{a_n e^{-\frac{a_n}{\varepsilon}} - b_n e^{-\frac{b_n}{\varepsilon}}}{e^{-\frac{a_n}{\varepsilon}} - e^{-\frac{b_n}{\varepsilon}}} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{a_n - b_n e^{-\frac{b_n-a_n}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{b_n-a_n}{\varepsilon}}} = -a_n.$$

Pošto smo dobili da $\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\mu_\varepsilon(G) \ge a_n$ važi za svako a_n, sledi

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\mu_\varepsilon(G) \ge \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{x\in G} I(x).$$

2.3 Kombinatorne tehnike za konačne alfabete i teoreme Sanov-a i Cramér-a

U ovom odeljku će biti razmatrane slučajne promenljive sa vrednostima u konačnom skupu (alfabetu) $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ ($N = |\Sigma|$), odnosno LDP za empirijske mere slučajnih promenljivih sa vrednostima u skupu Σ kao i za odgovarajuće empirijske aritmetičke sredine. U ovom slučaju svakoj verovatnosnoj meri $\mu \in M_1(\Sigma)$ odgovara zakon verovatnoće[2] $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ \mu(a_1) & \mu(a_2) & \dots & \mu(a_N)\end{pmatrix}$, te se skup $M_1(\Sigma)$ može identifikovati sa skupom $S_N = \left\{(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \forall i, x_i \ge 0 \wedge \sum_{i=1}^N x_i = 1\right\}$. Verovatnosne mere $\mu \in M_1(\Sigma)$ će stoga nekad biti nazivani i ***verovatnosni vektori***. Topologija na skupu S je indukovana standardnom topologijom prostora $\mathbb{R}^N$. Sa Σ_μ će

[2] Skraćeno pišemo $\mu(a_i)$ umesto $\mu(\{a_i\})$.

biti označen „nosač” zakona verovatnoće $\mu \in M_1(\Sigma)$, tj. $\Sigma_\mu = \{ a \in \Sigma \mid \mu(a) > 0 \}$. Za familiju slučajnih promenljivih, termin „nezavisne, sa jednakim raspodelama” će dalje u tekstu biti označavan skraćenicom i.i.d. (eng. ”independent, identicaly distributed”). Neka su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ i.i.d. slučajne promenljive sa vrednostima u skupu Σ, raspodeljene po verovatnosnom zakonu, tj. po verovatnosnoj meri $\mu \in M_1(\Sigma)$ (odnosno $\forall a_i \in \Sigma$, $\mathsf{P}(Y_i = a_i) = \mu(a_i)$).

Definicija 2.9 ***Tip*** $L_n^{\mathbf{y}}$ ***konačne sekvence*** $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ *(eng.* ***type*** $L_n^{\mathbf{y}}$ ***of a finite sequence*** $\mathbf{y}$*) je empirijska verovatnosna mera (zakon raspodele) koja odgovara sekvenci (uzorku)* $\mathbf{y}$*, tj.*

$$L_n^{\mathbf{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(L_n^{\mathbf{y}}(a_1), \ldots, L_n^{\mathbf{y}}(a_N)\right)$$

gde je $L_n^{\mathbf{y}}(a_i) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{a_i = y_k\}}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$*. Sa* $\mathcal{L}_n$ *će biti označen skup svih mogućih tipova sekvenci dužine n.*

Dakle, $L_n^{\mathbf{y}} = \left(L_n^{\mathbf{y}}(a_1), \ldots, L_n^{\mathbf{y}}(a_N)\right) \in M_1(\Sigma)$ je empirijski zakon raspodele (empirijska verovatnosna mera), tj. $L_n^{\mathbf{y}}(a_i)$ je relativna frekvencija pojavljivanja elementa a_i u sekvenci $y_1, \ldots, y_n$, i $\mathcal{L}_n = \left\{ L_n^{\mathbf{y}} \mid \mathbf{y} \in \Sigma^n \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Za slučajni vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ je $L_n^{\mathbf{Y}}$ slučajni element skupa $\mathcal{L}_n$.

Definicija 2.10 ***Klasa tipa*** $\nu \in \mathcal{L}_n$ *(eng.* ***the type class****) je skup*

$$T_n(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{y} \in \Sigma^n \mid L_n^{\mathbf{y}} = \nu \}.$$

U narednim razmatranjima se koristi konvencija $0 \cdot \ln 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ i $0 \cdot \ln \frac{0}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Za emppirijsku aritmetičku sredinu slučajnih promenljivih Y_i tj. odgovarajućih verovatnosnih mera, jedan od načina konstrukcije funkcije stope je pomoću uslovnih entropija. Kao što je pokazano u lemi 2.2, tako konstruisana funkcija stope ima određene lepe osobine.

Definicija 2.11 ***Entropija verovatnosnog vektora*** $\nu \in M_1(\Sigma)$ *je vrednost*

$$H(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{i=1}^{N} \nu(a_i) \ln \nu(a_i).$$

Relativna entropija verovatnosnog vektora $\nu \in M_1(\Sigma)$ ***u odnosu na verovatnosni vektor*** $\mu \in M_1(\Sigma)$ *je vrednost*

$$H(\nu \mid \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \nu(a_i) \ln \frac{\nu(a_i)}{\mu(a_i)}.$$

Funkcija H je nenegativna, važi $H(\nu) = 0$ ako i samo ako je $\nu(a_i) = 1$ za neko $i \in \{1, \ldots, N\}$ (i $\forall j \neq i,\ \nu(a_j) = 0$), a maksimalnu vrednost $\ln N$ funkcija H dostiže u tački $\nu = \left(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right)$.

Lema 2.2 *Neka je* $\mu, \nu \in M_1(\Sigma)$*, i neka je* $S_\mu = \left\{ \nu \in M_1(\Sigma) \mid \Sigma_\nu \subseteq \Sigma_\mu \right\}$*. Važi*

(a) $H(\cdot \mid \mu) : M_1(\Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}^+$.

(b) $H(\nu\,|\,\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu = \mu$.

(c) *Skup S_μ je kompaktan i $\mathcal{D}_{H(\cdot\,|\,\mu)} = S_\mu$ (S_μ je efektivni domen funkcije $H(\cdot\,|\,\mu)$, tj. $H(\nu\,|\,\mu) = \infty \;\Leftrightarrow\; \Sigma_\nu \subseteq \Sigma_\mu$).*

(d) *Funkcija $H(\cdot\,|\,\mu)$ je neprekidna na skupu S_μ.*

(e) *$H(\cdot\,|\,\mu)$ je dobra funkcija stope.*

Dokaz: Tvrđenje pod (a) sledi primenom nejednakosti Jensena (teorema 2.1 pod (a)) na konveksnu funkciju $x \ln x$. Tvrđenja (b) i (c) slede neposredno iz definicije funkcije $H(\cdot\,|\,\mu)$. Kompaktnost skupa S_μ je očigledna, a $\mathcal{D}_{H(\cdot\,|\,\mu)} = S_\mu$ sledi neposredno iz definicije funkcije $H(\cdot\,|\,\mu)$. Funkcija $H(\cdot\,|\,\mu)$ je neprekidna na skupu $\mathcal{D}_{H(\cdot\,|\,\mu)} = S_\mu$ jer je jednaka kompoziciji neprekidnih funkcija, a tvrđenje (e) sledi iz tvrđenja (c) i (d). □

Primer 2.3 *Na primer, neka je $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ (dakle $N = 4$), $n = 5$ i posmatrajmo sledeće verovatnosne mere - elemente skupa $\mathcal{L}_5$:*

$$\mu_1 = (1,0,0,0,0), \quad \mu_2 = \left(\tfrac{4}{5},0,\tfrac{1}{5},0,0\right), \quad \mu_3 = \left(\tfrac{3}{5},0,\tfrac{2}{5},0,0\right),$$
$$\mu_4 = \left(\tfrac{2}{5},0,\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5},0\right), \quad \mu_5 = \left(\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5}\right), \quad \mu_6 = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{16},\tfrac{1}{16}\right).$$

Za navedene μ_i, na primer, važi

$$T_5(\mu_2) = \{(a,a,a,a,c),(a,a,a,c,a),(a,a,c,a,a),(a,c,a,a,a),(c,a,a,a,a)\},$$

$$H(\mu_1) = 0, \qquad H(\mu_2) \approx 0.500402, \quad H(\mu_3) \approx 0.673012,$$
$$H(\mu_4) \approx 1.05492, \quad H(\mu_5) \approx 1.60944, \quad H(\mu_6) \approx 1.29965.$$

$$H(\mu_1\,|\,\mu_5) \approx 1.60944, \quad H(\mu_1\,|\,\mu_6) \approx 0.693147,$$
$$H(\mu_5\,|\,\mu_6) \approx 0.331374, \quad H(\mu_6\,|\,\mu_5) \approx 0.309787.$$

Neka su $Y_1,\ldots,Y_n,\ldots$ i.i.d. slučajne promenljive raspodeljene po verovatnosnom zakonu $\mu \in M_1(\Sigma)$, i neka je sa P_μ označena verovatnosna mera $\mu^{\mathbb{N}}$ koja odgovara nizu slučajnih promenljivih Y_i. Relacije prikazane u narednoj lemi služe za dokaz teoreme Sanov-a. Teorema Sanov-a ima i istorijski značaj, kao jedna od prvih formulacija principa velikih devijacija (vidi [Sa61]).

Lema 2.3 *Neka je $\nu \in \mathcal{L}_n$.*

(a) $\forall \mathbf{y} \in T_n(\nu),\;\; \mathsf{P}_\mu((Y_1,\ldots,Y_n) - \mathbf{y}) = e^{-n(H(\nu)+H(\nu\,|\,\mu))}$.

(b) $\dfrac{1}{(n+1)^N} e^{nH(\nu)} \leq |T_n(\nu)| \leq e^{nH(\nu)}$.

(c) $\dfrac{1}{(n+1)^N} e^{-nH(\nu\,|\,\mu)} \leq \mathsf{P}_\mu\left(L_n^{(Y_1,\ldots,Y_n)} = \nu\right) \leq e^{-nH(\nu\,|\,\mu)}$.

Teorema 2.9 (Sanov) *Za svaki skup verovatnosnih vektora $\Gamma \in M_1(\Sigma)$ važi*

$$\begin{aligned}
-\inf_{\nu\in\overset{\circ}{\Gamma}} H(\nu\,|\,\mu) \quad &\leq \quad \liminf_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\ln \mathsf{P}_\mu\left(L_n^{\mathbf{Y}}\in\Gamma\right) \quad \leq \\
&\leq \quad \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\ln \mathsf{P}_\mu\left(L_n^{\mathbf{Y}}\in\Gamma\right) \quad \leq \quad -\inf_{\nu\in\Gamma} H(\nu\,|\,\mu).
\end{aligned}$$

gde je $\overset{\circ}{\Gamma}$ *unutrašnjost skupa* $\Gamma\subseteq S_N$.[3]

Sledi verzija teoreme Cramér-a za konačne alfabete, koja je posledica teoreme Sanov-a. Neka su $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n,\ldots$ i.i.d. slučajne promenljive sa vrednostima u konačnom alfabetu $\sum=\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$ i raspodelom određenom verovatnosnom merom $\mu\in M_1(\Sigma)$, i neka je pri tome $\sum_\mu=\sum$. Za funkciju $f:\sum\to\mathbb{R}$ su slučajne promenljive $X_i=f(Y_i)$, $i\in\mathbb{N}$ takođe i.i.d., pri čemu bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $f(a_1)<f(a_2)<\ldots<f(a_N)$.

Neka je $\hat{S}_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$. Teorema Cramér-a uspostavlja LDP za slučajnu promenljivu $\hat{S}_n$. Neka nadalje važe sledeće oznake:

- ▷ $K=[f(a_1),f(a_N)]$ (primetimo da slučajna promenljiva $\hat{S}_n$ uzima vrednosti u kompaktnom skupu K),
- ▷ $\mathbf{f}=(f(a_1),f(a_2),\ldots,f(a_N))$,
- ▷ $L_n^{\mathbf{Y}}=\left(L_n^{\mathbf{Y}}(a_1),\ldots,L_n^{\mathbf{Y}}(a_N)\right)$, gde je $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$ i $L_n^{\mathbf{Y}}(a_i)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\chi_{\{Y_k=a_i\}}$, $i\in\{1,\ldots,N\}$ (vidi definiciju 2.9),
- ▷ $\Lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \Lambda(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\ln\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\mu(a_i)e^{\lambda f(a_i)}$,
- ▷ $I:\mathbb{R}\to[0,\infty],\quad I(x)\overset{\text{def}}{=}\displaystyle\inf_{\nu:\,\langle\mathbf{f},\nu\rangle=x}H(\nu\,|\,\mu)$.

Primetimo da je

$$\hat{S}_n=\sum_{k=1}^{n}f(a_i)L_n^{\mathbf{Y}}(a_i)=\left\langle\mathbf{f},L_n^{\mathbf{Y}}\right\rangle,$$

te stoga za svako $n\in\mathbb{N}$ i svako $A\subseteq\mathbb{R}$ važi

$$\hat{S}_n\in A\quad\Leftrightarrow\quad L_n^{\mathbf{Y}}\in\{\nu\mid\langle\mathbf{f},\nu\rangle\in A\}.$$

Teorema 2.10 (Cramér) *Za svaki skup* $A\subseteq\mathbb{R}$ *važi*

$$\begin{aligned}
-\inf_{x\in\overset{\circ}{A}} I(x) \quad &\leq \quad \liminf_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\ln \mathsf{P}_\mu\left(\hat{S}_n\in A\right) \quad \leq \\
&\leq \quad \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\ln \mathsf{P}_\mu\left(\hat{S}_n\in A\right) \quad \leq \quad -\inf_{x\in A} I(x),
\end{aligned}$$

pri čemu je funkcija stope I *neprekidna na skupu* K, *i važi*

$$I(x)=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda x-\Lambda(\lambda)\}.$$

[3] U odnosu na topologiju indukovanu standardnom topologijom prostora $\mathbb{R}^N$.

Naravno, za neke skupove $A \subseteq \mathbb{R}$ postoji i granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathsf{P}_\mu\left(\hat{S}_n \in A\right)$. Sledeće tvrđenje sledi iz neprekidnosti funkcije I na skupu K.

Tvrđenje 2.1 *Ako je za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ zadovoljeno $A \subseteq \overline{\mathring{A}} \subseteq K$, tada važi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathsf{P}_\mu\left(\hat{S}_n \in A\right) = -\inf_{x\in A} I(x).$$

2.4 Teorema Cramér-a

Teorema Sanov-a je vezana za slučajne promenljive sa konačnim skupom vrednosti. Teorema Cramér-a je značajno uopštenje teoreme Sanova. Ona uspostavlja LDP za niz verovatnosnih mera koje odgovaraju raspodelama niza srednjih vrednosti nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakim raspodelama (i.i.d.) i vrednostima u $\mathbb{R}^d$.

Neka su nadalje $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d. slučajni vektori sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, raspodeljeni po verovatnosnoj meri $\mu \in M_1\left(\mathbb{R}^d\right)$ (dakle $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, $\mathsf{P}(X_i \in A) = \mu(A)$), neka je $\overline{x} = \mathsf{E}(X_i)$, neka je $\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ i neka je μ_n verovatnosna mera po kojoj je raspodeljena slučajna promenljiva $\hat{S}_n$.[4]

Definicija 2.12 *Funkciju $\Lambda_\mu : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ definisanu sa*[5]

$$\Lambda_\mu(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \mathsf{E}\left(e^{\langle \lambda, X_i \rangle}\right), \;\; \lambda \in \mathbb{R}^d \tag{2.11}$$

nazivamo ***generatornom funkcijom logaritamskog momenta*** *koja odgovara verovatnosnoj meri μ (eng.* ***logarithmic moment generating function****).*

Napomena 2.4 *Generatorna funkcija logaritamskog momenta se naziva još i* ***generatornom funkcijom kumulante*** *(eng.* ***cumulant generating function****).*

Osim što predstavlja uopštenje teoreme Sanov-a, teorema Cramér-a daje još jedan metod za konstrukciju funkcije stope koja koja odgovara familiji verovatnosnih mera μ_n, $n \in \mathbb{N}$. To je konstrukcija putem Fenchel-Legendre-ove transformacije generatorne funkcije logaritamskog momenta, za koju će biti pokazano da je, pod dodatnim uslovima, i dobra funkcija stope.

Definicija 2.13 ***Fenchel-Legendre-ova transformacija*** *generatorne funkcije logaritamskog momenta Λ_μ je funkcija $\Lambda_\mu^* : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ definisana sa*

$$\Lambda_\mu^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} \left\{\langle \lambda, x\rangle - \Lambda_\mu(\lambda)\right\}, \;\; x \in \mathbb{R}^d \tag{2.12}$$

[4] Na osnovu zakona velikih brojeva, ako postoji $\overline{x}$ koje je konačno i ako je $\mathsf{D}(X_i) = \mathsf{E}\left[(X_i - \overline{x})^2\right] < \infty$, tada $\hat{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \overline{x}$. To za posledicu ima da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) = 0$ za svaki zatvoren skup $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ za koji $\overline{x} \notin F$.

[5] Definicija funkcije Λ_μ ne zavisi od i jer sve slučajne promenljive X_i imaju istu raspodelu.

Napomena 2.5 *Nekada će sa Λ_X biti označena generatorna funkcija logaritamskog momenta koja odgovara verovatnosnoj meri koja odgovara slučajnoj promenljivoj (slučajnom vektoru) X, a sa Λ_X^* će tada biti označena njena Fenchel-Legendre-ova transformacija.*

Generatorna funkcija logaritamskog momenta i njena Fenchel-Legendre-ova transformacija imaju neke lepe opšte osobine. Kasnije će se videti da pod dodatnim uslovima funkcija Λ_μ^* ima još dobrih osobina koje, za konkretne familije verovatnosnih mera omogućavaju lakše izračunavanje levog ograničenja (LB) i desnog ograničenja (UB) u osnovnoj relaciji (2.1).

Teorema 2.11 *Osobine generatorne funkcije logaritamskog momenta:*

(a) $\forall\lambda \in \mathbb{R}^d,\ \Lambda_\mu(\lambda) > -\infty$, *odnosno* $\Lambda_\mu : \mathbb{R}^d \to (-\infty, \infty]$*;*

(b) $\Lambda_\mu(0) = 0$*;*

(c) Λ_μ *je konveksna funkcija.*

<u>*Dokaz:*</u>

(a) Očevidno je

$$\mathsf{E}\left(e^{\langle\lambda,X_i\rangle}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_d x_d}\, dF_{X_i}(x_1,\ldots,x_d) > 0$$

za svako $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d) \in \mathbb{R}^d$.

(b) Sledi na osnovu definicije generatorne funkcije logaritamskog momenta.

(c) Neka je $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}^d$ i $\theta \in (0,1)$; primenom nejednakosti Hölder-a (teorema 2.2) za slučajne promenljive $X = \left(e^{\langle\lambda',X_i\rangle}\right)^{\theta}$ i $Y = \left(e^{\langle\lambda'',X_i\rangle}\right)^{(1-\theta)}$ i za $p = \frac{1}{\theta} > 1$ i $q = \frac{1}{1-\theta} > 1$ dobijamo

$$\mathsf{E}\left[\left(e^{\langle\lambda',X_i\rangle}\right)^{\theta}\left(e^{\langle\lambda'',X_i\rangle}\right)^{(1-\theta)}\right] \le \left(\mathsf{E}\left[e^{\langle\lambda',X_i\rangle}\right]^{\theta}\right)\left(\mathsf{E}\left[e^{\langle\lambda'',X_i\rangle}\right]^{(1-\theta)}\right)$$

odakle, pošto je ln monotono rastuća funkcija $[*]$, sledi

$$\Lambda_\mu(\theta\lambda' + (1-\theta)\lambda'') = \ln \mathsf{E}\left[\left(e^{\langle\lambda',X_i\rangle}\right)^{\theta}\left(e^{\langle\lambda'',X_i\rangle}\right)^{(1-\theta)}\right] \overset{[*]}{\le}$$

$$\le \ln\left[\left(\mathsf{E}\left[e^{\langle\lambda',X_i\rangle}\right]\right)^{\theta}\left(\mathsf{E}\left[e^{\langle\lambda'',X_i\rangle}\right]\right)^{(1-\theta)}\right] =$$

$$= \theta \ln \mathsf{E}\left[e^{\langle\lambda',X_i\rangle}\right] + (1-\theta)\ln \mathsf{E}\left[e^{\langle\lambda'',X_i\rangle}\right] = \theta\Lambda_\mu(\lambda') + (1-\theta)\Lambda_\mu(\lambda'').$$

□

Teorema 2.12 *Osnovne osobine Fenchel-Legendre-ove transformacije:*

(a) $\Lambda_\mu^* : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$*;*

(b) Λ_μ^* *je konveksna funkcija;*

(c) Λ_μ^* *je funkcija stope.*

Dokaz:

(a) Pošto je $\Lambda_\mu(0) = 0$, za svako $x \in \mathbb{R}^d$ je

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle \lambda, x \rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \right\} \geq \langle 0, x \rangle - \Lambda_\mu(0) = 0\,.$$

(b) Neka je $x', x'' \in \mathbb{R}^d$ i $\theta \in (0,1)$; konveksnost funkcije Λ_μ^* sledi iz njene definicije:

$$\Lambda_\mu^*(\theta x' + (1-\theta)x'') = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle \lambda, \theta x' + (1-\theta)x'' \rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \right\} =$$

$$= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left\{ (\theta \langle \lambda, x' \rangle - \theta \Lambda_\mu(\lambda)) + ((1-\theta)\langle \lambda, x'' \rangle - (1-\theta)\Lambda_\mu(\lambda)) \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left\{ \theta \langle \lambda, x' \rangle - \theta \Lambda_\mu(\lambda) \right\} + \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left\{ ((1-\theta)\langle \lambda, x'' \rangle - (1-\theta)\Lambda_\mu(\lambda)) \right\} =$$

$$= \theta \Lambda_\mu^*(x') + (1-\theta)\Lambda_\mu^*(x'').$$

(c) Dokaz da je funkcija Λ_μ^* od dole poluneprekidna može da se izvede pomoću nizova (vidi napomenu 2.1). Neka je $x_n \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}^d$ takvo da $x_n \to x$. Za svako $\lambda \in \mathbb{R}^d$, zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda $[*]$ važi

$$\liminf_{x_n \to x} \Lambda_\mu^*(x_n) \geq \liminf_{x_n \to x} \left[\langle \lambda, x_n \rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \right] =$$

$$= \liminf_{x_n \to x} \langle \lambda, x_n \rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \overset{[*]}{=} \langle \lambda, x \rangle - \Lambda_\mu(\lambda),$$

odakle se dobija

$$\liminf_{x_n \to x} \Lambda_\mu^*(x_n) \geq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left[\langle \lambda, x \rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \right] = \Lambda_\mu^*(x)\,.$$

□

2.4.1 Teorema Cramér-a u $\mathbb{R}$

Dakle, neka su X_i i.i.d. slučajne promenljive raspodeljene po verovatnosnoj meri μ, takve da postoji $\bar{x} = \mathsf{E}(X_i) \in \overline{\mathbb{R}}$, neka je $\hat{S}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ ($n \in \mathbb{N}$), i neka je μ_n verovatnosna mera po kojoj je raspodeljena $\hat{S}_n$.

U dokazu teoreme Cramér-a biće korišćene i sledeće osobine funkcija Λ_μ i Λ_μ^*. Osim toga, navedene osobine funkcije Λ_μ^* obezbeđuju lakše izračunavanje levog ograničenja (LB) i desnog ograničenja (UB) u osnovnoj relaciji (2.1).

Lema 2.4

(a) *Ako je* $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \{0\}$, *tada je* $\Lambda_\mu^* \equiv 0$.

(b) *Ako je $\Lambda_\mu(\lambda_0) < \infty$ za neko $\lambda_0 > 0$, tada je $\bar{x} < \infty$ (tj. $\bar{x} \in [-\infty, \infty)$). Ako je $\bar{x} < \infty$, tada za svako $x \geq \bar{x}$ važi*

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda x - \Lambda_\mu(\lambda) \right\} \tag{2.13}$$

i za svako $x > \bar{x}$ je $\Lambda_\mu^*(x)$ je neopadajuća funkcija.

(c) *Ako je $\Lambda_\mu(\lambda_0) < \infty$ za neko $\lambda_0 < 0$, tada je $\bar{x} > -\infty$ (tj. $\bar{x} \in (-\infty, \infty]$). Ako je $\bar{x} > -\infty$, tada za svako $x \leq \bar{x}$ važi*

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{\lambda \leq 0} \left\{ \lambda x - \Lambda_\mu(\lambda) \right\} \tag{2.14}$$

i za svako $x < \bar{x}$ je $\Lambda_\mu^*(x)$ je nerastuća funkcija.

(d) *Ako je $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (tj. $\bar{x}$ je konačno), tada je $\Lambda_\mu^*(\bar{x}) = 0$.*

(e) $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \Lambda_\mu^*(x) = 0$.

(f) *Funkcija Λ_μ je diferencijabilna na skupu $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$ i njen izvod je*

$$\Lambda_\mu'(\eta) = \frac{1}{\mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right)} \mathsf{E}\left[X_i e^{\eta X_i}\right], \tag{2.15}$$

i pri tome važi

$$\Lambda_\mu'(\eta) = y \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda_\mu^*(y) = \eta y - \Lambda_\mu(\eta). \tag{2.16}$$

<u>*Dokaz:*</u>

(a) $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \{0\}$ znači da je $\Lambda_\mu(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda = 0 \\ \infty & , \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$, te iz definicije funkcije Λ_μ^* sledi $\Lambda_\mu^* \equiv 0$.

(b) Neka je $\Lambda_\mu(\lambda_0) < \infty$ za neko $\lambda_0 > 0$. Pošto je $e^{\lambda_0 x} > \lambda_0 x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, sledi $\mathsf{E}\left(e^{\lambda_0 X_i}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\lambda_0 x} d\mu > \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_0 x d\mu = \lambda_0 \mathsf{E}(X_i) = \lambda_0 \bar{x}$, te dobijamo da je ili $\bar{x} \leq 0$ (može biti i $\bar{x} = -\infty$), ili u slučaju $\bar{x} > 0$ važi (ln je monotono rastuća funkcija) $\infty > \Lambda_\mu(\lambda_0) = \ln \mathsf{E}\left(e^{\lambda_0 X_i}\right) > \ln(\lambda_0 \bar{x})$, odakle sledi da je svakako $\bar{x} < \infty$.

Neka je $\bar{x} < \infty$. Koristeći nejednakost Jensen-a $[*]$ (vidi teoremu 2.1 pod (b)) za konveksnu funkciju $\varphi(x) = e^x$ i $f(x) = \ln e^{\lambda x}$, za proizvoljno $\lambda \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$e^{\mathsf{E}\left(\ln e^{\lambda X_i}\right)} = e^{\int_{\mathbb{R}} \ln e^{\lambda x} d\mu} \overset{[*]}{\leq} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\ln e^{\lambda x}} d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu = \mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right),$$

odnosno primenom monotono rastuće funkcije ln dobijamo

$$\lambda \bar{x} = \mathsf{E}(\lambda X_i) = \mathsf{E}\left(\ln e^{\lambda X_i}\right) \leq \ln \mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right) = \Lambda_\mu(\lambda),$$

te za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ važi

$$\lambda \bar{x} - \Lambda_\mu(\lambda) \leq 0. \tag{2.17}$$

* U slučaju $\bar{x} = -\infty$, iz (2.17) sledi da za $\lambda < 0$ važi $\Lambda_\mu(\lambda) = \infty$. Kako je $\Lambda_\mu^*(x) = \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \left\{\langle\alpha, x\rangle - \Lambda_\mu(\alpha)\right\} \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, očigledno je zadovoljeno (2.13) za svako $x \in \mathbb{R}$ (tj. za svako $x > -\infty = \bar{x}$).
* U slučaju $\bar{x} > -\infty$ (dakle $x \in \mathbb{R}$), zbog osobine $\Lambda_\mu^*(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, iz relacije (2.17) sledi da je $\Lambda_\mu^*(\bar{x}) = 0$ (ovim je dokazano i tvrđenje pod (d) u slučaju $\exists\lambda_0 < 0$, $\Lambda_\mu(\lambda_0) < \infty$). Stoga, za svako $x > \bar{x}$ i svako $\lambda < 0$ važi da je $\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda) \leq \lambda\bar{x} - \Lambda_\mu(\lambda) \leq \Lambda_\mu^*(\bar{x}) = 0$, te je, zbog $\Lambda_\mu^*(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, jednakost (2.13) zadovoljena i u slučaju $x > \bar{x}$.

Za $\lambda \geq 0$ i $x_1 > \bar{x}$ i $x_2 > \bar{x}$ važi

$$x_1 \leq x_2 \quad\Rightarrow\quad \lambda x_1 - \Lambda_\mu(\lambda) \leq \lambda x_2 - \Lambda_\mu(\lambda)$$

odakle je

$$x_1 \leq x_2 \quad\Rightarrow\quad \sup_{\lambda\geq 0}\left\{\lambda x_1 - \Lambda_\mu(\lambda)\right\} \leq \sup_{\lambda\geq 0}\left\{\lambda x_2 - \Lambda_\mu(\lambda)\right\}$$

te iz (2.13) sledi da je $\Lambda_\mu^*(x)$ neopadajuća funkcija na $(\bar{x}, \infty)$.

(c) Primenom rezultata pod (b) na generatornu funkciju logaritamskog momenta na i.i.d. slučajne promenljive $Y_i = -X_i$.

(d) Dokazano pod (a), (b) i (c).

(e) Dokaz za $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \Lambda_\mu^*(x) = 0$ sledi diskusijom po sledećim slučajevima:

(e.1) slučaj $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \{0\}$:
pod (a) je dokazano da je tada $\Lambda_\mu^* \equiv 0$, odakle sledi tvrđenje;

(e.2) slučaj $\exists\lambda_0 > 0$, $\Lambda_\mu(\lambda_0) < \infty$:
tada je (tvrđenje pod (b)) $\bar{x} \in [-\infty, \infty)$; ako je $\bar{x} > -\infty$, tada na osnovu (d) imamo $\Lambda_\mu^*(\bar{x}) = 0$, odakle sledi tvrđenje; ako je $\bar{x} = -\infty$, tada koristeći

[1] nejednakost Chebyshev-a - vidi teoremu 2.4 pod (b) za $n = 1$, proizvoljno $t = \lambda \geq 0$ i proizvoljno $x \in \mathbb{R}$,
[2] rezultat ove leme pod (b):
$\forall x > \bar{x} = -\infty$, $\Lambda_\mu^*(x) = \sup\limits_{\lambda\geq 0}\left\{\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda)\right\}$,

dobijamo da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned}
&\mu([x,\infty)) = \mathsf{P}(X_i \geq x) \overset{[1]}{\leq} e^{-\lambda x}\mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right) \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad \ln\mu([x,\infty)) \leq \ln\left(e^{-\lambda x}\mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right)\right) \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad \ln\mu([x,\infty)) \leq -\lambda x + \ln\mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right) = \Lambda_\mu(\lambda) - \lambda x \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad \ln\mu([x,\infty)) \leq \inf_{\lambda\geq 0}\left\{\Lambda_\mu(\lambda) - \lambda x\right\} =\\
&\qquad\qquad = -\sup_{\lambda\geq 0}\left\{\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda)\right\} \overset{[2]}{=} -\Lambda_\mu^*(x) \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad \Lambda_\mu^*(x) \leq -\ln\mu([x,\infty)) \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad \lim_{x\to-\infty}\Lambda_\mu^*(x) \leq \lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\mu([x,\infty))\right) = -\ln\lim_{x\to-\infty}\mu([x,\infty)) = 0
\end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano, jer $\Lambda_\mu^* : \mathbb{R} \to [0,\infty]$.

(e.3) slučaj $\exists\lambda_0 < 0$, $\Lambda_\mu(\lambda_0) < \infty$: sledi primenom prethodnog slučaja na generatornu funkciju logaritamskog momenta na i.i.d. slučajne promenljive $Y_i = -X_i$.

(f) Za svako fiksno $\eta \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$ familija funkcija $f_\varepsilon(x;\eta) = \dfrac{e^{(\eta+\varepsilon)x} - e^{\eta x}}{\varepsilon}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ pri $\varepsilon \to 0$ tačkasto konvergira ka $f(x;\eta) = xe^{\eta x}$ ($f(x;\eta)$ je izvod po η funkcije $g(x;\eta) = e^{\eta x}$), i pri tome za funkciju $h(x;\eta) = \dfrac{e^{\eta x}\left(e^{\delta|x|}-1\right)}{\delta}$, $\delta \in (0,\infty)$, kao što će biti dokazano, važi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\},\ |f_\varepsilon(x;\eta)| \le h(x;\eta), \tag{2.18}$$

a za dovoljno malo $\delta > 0$, kao što će takođe biti dokazano, važi

$$\mathsf{E}\left[|h(X_i;\eta)|\right] = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{\eta x}\left(e^{\delta|x|}-1\right)}{\delta}\right| d\mu < \infty, \tag{2.19}$$

tj. važi $h \in L^1(\mu)$, te na osnovu Lebesgue-ove teoreme dominantne konvergencije $[*]$ dobijamo

$$\mathsf{E}\left(X_i e^{\eta X_i}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} x e^{\eta x} d\mu \overset{[*]}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\eta+\varepsilon)x} - e^{\eta x}}{\varepsilon} d\mu, \tag{1}$$

pri čemu je $X_i e^{\eta X_i} \in L^1(\mu)$, tj. funkcija $M(\eta) = \mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right)$ je diferencijabilna (postoji konačno $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{M(\eta+\varepsilon) - M(\eta)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{e^{(\eta+\varepsilon)x} - e^{\eta x}}{\varepsilon} d\mu$), te je i funkcija $\Lambda_\mu(\eta)$, kao kompozicija diferencijabilnih funkcija ln i $M(\eta)$, takođe diferencijabilna za $\eta \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$. S druge strane, važi

$$\Lambda'_\mu(\eta) = \frac{1}{M(\eta)} M'(\eta) = \frac{1}{M(\eta)} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{M(\eta) - M(\eta+\varepsilon)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{M(\eta)} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{(\eta+\varepsilon)x} d\mu - \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\eta x} d\mu\right) = \frac{1}{M(\eta)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\eta+\varepsilon)x} - e^{\eta x}}{\varepsilon} d\mu$$

odnosno

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\eta+\varepsilon)x} - e^{\eta x}}{\varepsilon} = M(\eta)\Lambda'_\mu(\eta). \tag{2}$$

Iz [1] i [2] sledi $\mathsf{E}\left(X_i e^{\eta X_i}\right) = M(\eta)\Lambda'_\mu(\eta) = \mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right)\Lambda'_\mu(\eta)$, odnosno (2.15).

Neka je $\Lambda'_\mu(\eta) = y$, i neka je $g(\lambda) = \lambda y - \Lambda_\mu(\lambda)$. Iz konveksnosti funkcije Λ_μ sledi konkavnost funkcije g, a iz diferencijabilnosti funkcije Λ_μ na oblasti $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$ sledi diferencijabilnost funkcije g na $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$, pri čemu važi $g'(\eta) = y - \Lambda'_\mu(\eta) = 0$ te je η tačka maksimuma funkcije g, odnosno važi

$$\Lambda^*_\mu(y) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\{\lambda y - \Lambda_\mu(\lambda)\right\} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} g(\lambda) = g(\eta) = \eta y - \Lambda_\mu(\eta),$$

čime je dokazana implikacija (2.16).

▷ Dokaz nejednakosti (2.18): nejednakost je ekvivalentna sa

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}, \left| \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} \right| \leq \frac{e^{\delta |x|} - 1}{\delta}. \tag{2.20}$$

Neka je $Q(x, \varepsilon) = \dfrac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon}$, $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokaz poslednje nejednakosti sledi analizom monotonosti funkcije Q, pri čemu je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Q(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} x \cdot \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon x} = x. \tag{2.21}$$

Pošto je $\frac{\partial}{\partial x} Q(x, \varepsilon) = e^{\varepsilon x} > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, funkcija Q je monotono rastuća po x.

S druge strane je $\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(x, \varepsilon) = \dfrac{e^{\varepsilon x}(\varepsilon x - 1) + 1}{\varepsilon^2}$, te je funkcija Q monotono rastuća po ε ukoliko je $R(\varepsilon x) = e^{\varepsilon x}(\varepsilon x - 1) + 1 > 0$, a inače je monotono opadajuća. Funkcija $R(t) = e^t(t-1) + 1$ je neprekidna, važi $R(0) = 0$ i $R'(t) = te^t$, te je R monotono rastuća za $t > 0$ i monotono opadajuća za $t < 0$, što znači da je $R(t) > 0$ za $t \neq 0$, odnosno za svako $\varepsilon \neq 0$ i svako $x \neq 0$ je $R(\varepsilon x) = e^{\varepsilon x}(\varepsilon x - 1) + 1 > 0$, te je $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(x, \varepsilon) > 0$ za sve $\varepsilon x \neq 0$, što znači da je Q monotono rastuća i po ε.

Za $x = 0$ je nejednakost (2.20) očigledna.

(1°) U slučaju $x > 0$ je $\dfrac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} > 0$ za svako $\varepsilon \neq 0$, te je nejednakost (2.20) za svako $\varepsilon \neq 0$ ekvivalentna sa

$$\frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} \leq \frac{e^{\delta x} - 1}{\delta},$$

a ova nejednakost je tačna zbog $\varepsilon < \delta$ i monotonosti funkcije Q.

(2°) U slučaju $x < 0$ je $\dfrac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} < 0$ za svako $\varepsilon \neq 0$, te je nejednakost (2.20) za svako $\varepsilon \neq 0$ ekvivalentna sa

$$-\frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} \leq \frac{e^{-\delta x} - 1}{\delta},$$

odnosno sa

$$\frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} \geq \frac{e^{-\delta x} - 1}{-\delta},$$

a ova nejednakost je tačna zbog $\varepsilon > -\delta$ i monotonosti funkcije Q.

▷ Dokaz nejednakosti (2.19): iz $\eta \in \mathring{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$, tj. $\Lambda_\mu(\eta) = \ln \mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right) < \infty$, sledi da je $0 \leq \mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right) < \infty$, tj. $e^{\eta X_i} \in L^1(\mu)$. S druge strane, pošto η pripada otvorenom skupu $\mathring{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu} \subseteq \mathbb{R}$, to za dovoljno malo δ važi $\eta \pm \delta \in \mathring{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$, te je takođe $e^{(\eta \pm \delta) X_i} \in L^1(\mu)$. Odatle dalje sledi i da je $e^{(\eta \pm \delta) X_i} - e^{\eta X_i} \in L^1(\mu)$, te se dobija

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{\eta x}\left(e^{\delta |x|} - 1\right)}{\delta} \right| d\mu = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\eta x}\left(e^{\delta |x|} - 1\right) \right| d\mu =$$

$$= \frac{1}{\delta} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| e^{\eta x + \delta |x|} - e^{\eta x} \right| d\mu =$$

$$= \frac{1}{\delta} \left(\int\limits_{(-\infty,0)} \left| e^{(\eta-\delta)x} - e^{\eta x} \right| d\mu + \int\limits_{[0,\infty)} \left| e^{(\eta+\delta)x} - e^{\eta x} \right| d\mu \right) < \infty.$$

□

Sledi teorema Cramér-a u $\mathbb{R}$.

Teorema 2.13 (Cramér) *Za i.i.d. slučajne promenljive sa vrednostima u* $\mathbb{R}$, *niz verovatnosnih mera* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zadovoljava* LDP *sa konveksnom funkcijom stope* Λ_μ^*, *odnosno*

(UB) *za svaki zatvoren skup* $F \subseteq \mathbb{R}$ *važi*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(F) \leq -\inf_{x\in F} \Lambda_\mu^*(x), \tag{2.22}$$

(LB) *za svaki otvoren skup* $G \subseteq \mathbb{R}$ *važi*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(G) \geq -\inf_{x\in G} \Lambda_\mu^*(x). \tag{2.23}$$

<u>*Dokaz:*</u>

(UB) Neka je $F \subseteq \mathbb{R}$ neprazan zatvoren skup (za $F = \emptyset$ je nejednakost (2.22), uz konvenciju $\ln 0 = -\infty$, očigledno zadovoljena). Označimo $I_F = \inf\limits_{x\in F} \Lambda_\mu^*(x)$. U slučaju $I_F = 0$ nejednakost (2.22) trivijalno važi, pa nadalje posmatramo slučaj $I_F > 0$.

Korak 1: Za svako $x \in \mathbb{R}$ i $\lambda \geq 0$ važi

$$\mu_n([x,\infty)) = \mathsf{P}\left(\hat{S}_n \geq x\right) = \mathsf{P}\left(n\hat{S}_n \geq nx\right) \overset{[1]}{\leq} e^{-\lambda nx} \mathsf{E}\left(e^{\lambda n \hat{S}_n}\right) =$$

$$= e^{-\lambda nx} \mathsf{E}\left(e^{\lambda(X_1+\ldots+X_n)}\right) = e^{-\lambda nx} \mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\lambda X_i}\right) \overset{[2]}{=} e^{-\lambda nx} \prod_{i=1}^n \mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right) =$$

$$= e^{-\lambda nx} \prod_{i=1}^n e^{\Lambda_\mu(\lambda)} = e^{-n\left(\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda)\right)},$$

te je

$$\mu_n([x,\infty)) \overset{[3]}{\leq} e^{\inf\limits_{\lambda\geq 0}\left\{-n\left(\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda)\right)\right\}} = e^{-n\sup\limits_{\lambda\geq 0}\left\{\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda)\right\}}.$$

Ako je $\bar{x} < \infty$, tada koristeći (2.13) dobijamo da za svako $x > \bar{x}$ važi

$$\mu_n([x,\infty)) \leq e^{-n\Lambda_\mu^*(x)}. \tag{2.24}$$

[1] primenom nejednakosti Chebyshev-a 2.4 pod (b) na $S_n = n\hat{S}_n$ za $t = \lambda \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}$,

[2] iz nezavisnosti slučajnih promenljivih X_i sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $e^{\lambda X_i}$,

[3] eksponencijalna funkcija je neprekidna i monotono rastuća.

Analogno za svako $x \in \mathbb{R}$ i $\lambda \leq 0$, primenjujući nejednakost Chebyshev-a za $-x$ umesto x, $t = -\lambda \geq 0$ i $-n\hat{S}_n$ umesto $n\hat{S}_n$, dobijamo

$$\mu_n\left((-\infty, x]\right) = \mathsf{P}\left(\hat{S}_n \leq x\right) = \mathsf{P}\left(n\hat{S}_n \leq nx\right) = \mathsf{P}\left(-n\hat{S}_n \geq -nx\right) \leq$$
$$\leq e^{-(-\lambda)(-nx)}\mathsf{E}\left(e^{(-\lambda)\left(-n\hat{S}_n\right)}\right) = e^{-\lambda nx}\mathsf{E}\left(e^{\lambda n\hat{S}_n}\right),$$

te dalje na isti način kao u prethodnom slučaju, za slučaj $\bar{x} > -\infty$, koristeći (2.14) umesto (2.13), dobijamo da svako $x < \bar{x}$ važi

$$\mu_n\left((\infty, x]\right) \leq e^{-n\Lambda_\mu^*(x)}. \tag{2.25}$$

Korak 2: Posmatrajmo slučaj $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Tada je $\Lambda_\mu^*(\bar{x}) = 0$ (lema 2.4 pod (d)), te zbog $I_F > 0$ važi $\bar{x} \notin F$, odnosno $\bar{x} \in F^{\mathsf{C}}$. Označimo sa (x_-, x_+) maksimalan otvoren interval sadržan u F^{C}, a koji sadrži $\bar{x}$. Pošto je F neprazan skup, tada je bar jedno od x_- i x_+ konačan broj, a pošto je F^{C} otvoren skup koji sadrži $\bar{x}$, tada je $x_- < x_+$ (tj. $(x_-, x_+) \neq \emptyset$). Neka je npr. x_- konačan broj. Tada je $x_- \in F$ (x_- je rubna tačka zatvorenog skupa F), te važi $\Lambda_\mu^*(x_-) \geq I_F$. Iz istih razloga je $\Lambda_\mu^*(x_+) \geq I_F$ kada je x_+ konačan broj. Stoga primenom (2.24) za konačno $x = x_+$ dobijamo $\mu_n\left([x_+, \infty)\right) \leq e^{-n\Lambda_\mu^*(x_+)} \leq e^{-nI_F}$, a primenom (2.25) za konačno $x = x_-$ dobijamo $\mu_n\left((-\infty, x_-]\right) \leq e^{-n\Lambda_\mu^*(x_-)} \leq e^{-nI_F}$; ako je $x_- = -\infty$ ili $x_+ = \infty$, tada očigledno nejednakosti $\mu_n\left((-\infty, x_-]\right) \leq e^{-nI_F}$ odnosno $\mu_n\left([x_+, \infty)\right) \leq e^{-nI_F}$ takođe važe. Sledi

$$\mu_n(F) \leq \mu_n\left((-\infty, x_-] \cup [x_+, \infty)\right) =$$
$$= \mu_n\left((-\infty, x_-]\right) + \mu_n\left([x_+, \infty)\right) \leq 2e^{-nI_F},$$

te primenom monotono rastuće funkcije ln dobijamo $\ln \mu_n(F) \leq \ln 2 - nI_F$, i dalje $\frac{1}{n}\ln \mu_n(F) \leq \frac{\ln 2}{n} - I_F$, odnosno

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln \mu_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 2}{n} - I_F\right) = -I_F,$$

čime je (UB) za slučaj $\bar{x} \in \mathbb{R}$ dokazano.

Korak 3: Razmotrimo sada slučaj $\bar{x} = -\infty$. Neka je $x_+ = \inf F$. Pošto je F zatvoren neprazan skup, važi $x_+ \in F$ i $x_+ \neq \infty$. Funkcija Λ_μ^* je neopadajuća (lema 2.4 pod (b)), te iz leme 2.4 pod (e) sledi $\lim\limits_{x\to-\infty} \Lambda_\mu^*(x) = 0$, na osnovu čega zaključujemo da je $x_+ \neq -\infty$ jer bi u suprotnom bilo $I_F = 0$. Sada iz $x_+ \in F$ sledi $\Lambda_\mu^*(x_+) \geq I_F$. Pošto je $F \subseteq [x_+, \infty)$, primenjujući (2.24) za $x = x_+$ dobijamo (UB) slično kao u slučaju $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Korak 4: Slučaj $\bar{x} = \infty$ ide potpuno analogno kao slučaj $\bar{x} = -\infty$.

(LB) Korak 1: U dokazu (LB), ključna nejednakost tj. tvrđenje biće da za svaku verovatnosnu meru $\nu \in M_1(\mathbb{R})$ i niz i.i.d. slučajnih promenljivih Y_i, $i \in \mathbb{N}$ koje su raspodeljene po zakonu ν, ako sa ν_n označimo verovatnosnu meru po kojoj je raspodeljena slučajna promenljiva $\hat{T}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, tada za svako $\delta > 0$ važi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln \nu_n\left((-\delta, \delta)\right) \geq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_\nu(\lambda) = -\Lambda_\nu^*(0). \tag{2.26}$$

Kada nejednakost (2.26) bude dokazana, tada za fiksno $x \in \mathbb{R}$ i slučajnu promenljivu $Y_i = X_i - x$ važi

$$\Lambda_\nu(\lambda) = \ln \mathsf{E}\left(e^{\lambda(X_i - x)}\right) = \ln\left(e^{-\lambda x}\mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right)\right) = \Lambda_\mu(\lambda) - \lambda x$$

i

$$\Lambda_\nu^*(y) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda y - \Lambda_\nu(\lambda)\} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\{\lambda(y+x) - \Lambda_\mu(\lambda)\right\} = \Lambda_\mu^*(y+x),$$

te iz (2.26) sledi da za svako $x \in \mathbb{R}$ i svako $\delta > 0$ važi

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n((x-\delta, x+\delta)) &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathsf{P}\left(x-\delta < \hat{S}_n < x+\delta\right) = \\ &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathsf{P}\left(-\delta < \hat{T}_n < \delta\right) = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\nu_n((-\delta,\delta)) \geq \\ &\geq -\Lambda_\nu^*(0) = -\Lambda_\mu^*(x). \qquad (2.27)\end{aligned}$$

Prema tome, za svaki otvoren skup $G \subseteq \mathbb{R}$ i svako $x \in G$, postoji dovoljno malo $\delta > 0$ takvo da je $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G$, te na osnovu (2.27) sledi

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n(G) \geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n((x-\delta,x+\delta)) \geq -\Lambda_\mu^*(x),$$

odnosno

$$\liminf_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\mu_n(G) \geq \sup_{x\in G}\left\{-\Lambda_\mu^*(x)\right\} = -\inf_{x\in G}\Lambda_\mu^*(x),$$

čime je dokazana nejednakost (LB).

Korak 2: Dakle, sledi dokaz nejednakosti (2.26).

(1°) Slučaj $\nu((-\infty,0)) = 0 \vee \nu((0,\infty)) = 0$:
Iz definicije generatorne funkcije logaritamskog momenta sledi da je Λ_ν monotona funkcija - monotono nerastuća pri $\nu((0,\infty)) = 0$, odnosno monotono neopadajuća pri $\nu((-\infty,0)) = 0$. Na primer, ako je $\nu((0,\infty)) = 0$, tada je

$$\Lambda_\nu(\lambda) = \ln\mathsf{E}\left(e^{\lambda Y_i}\right) = \ln\int\limits_{(-\infty,\infty)} e^{\lambda y}d\nu = \ln\int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda y}d\nu,$$

te za $y \in (-\infty, 0]$ i $\lambda_1 < \lambda_2$ važi $\lambda_1 y \geq \lambda_2 y$ odnosno $e^{\lambda_1 y} \geq e^{\lambda_2 y} > 0$, te je

$$\Lambda_\nu(\lambda_1) = \ln\int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda_1 y}d\nu \geq \ln\int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda_2 y}d\nu = \Lambda_\nu(\lambda_2).$$

Stoga u slučaju $\nu((0,\infty)) = 0$ važi

$$\begin{aligned}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\Lambda_\nu(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\Lambda_\nu(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\ln\left(\int\limits_{(-\infty,0)} e^{\lambda y}d\nu + \int\limits_{\{0\}} d\nu\right) = \\ = \ln\left(\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{(-\infty,0)} e^{\lambda y}d\nu + \nu(\{0\})\right) \overset{[4]}{=} \ln\nu(\{0\}) \qquad (2.28)\end{aligned}$$

te je

$\nu_n((\delta,\delta)) \geq \nu_n(\{0\}) = \mathsf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\right) \overset{[5]}{=}$
$= \mathsf{P}\left(Y_1 \leq 0, \ldots, Y_n \leq 0, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\right) = \mathsf{P}(Y_1 = 0, \ldots, Y_n = 0) \overset{[6]}{=}$
$= \mathsf{P}(Y_1 = 0) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(Y_n = 0) = (\nu(\{0\}))^n,$

odakle dalje sledi da je

$\frac{1}{n}\ln\nu_n((\delta,\delta)) \geq \ln\nu(\{0\}) \overset{(2.28)}{=} \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_\nu(\lambda) = -\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{-\Lambda_\nu(\lambda)\} =$
$= -\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\langle\lambda, 0\rangle - \Lambda_\nu(\lambda)\} = -\Lambda_\nu^*(0),$

odakle sledi nejednakost (2.26).

[4] uočimo da za familiju funkcija $f_\lambda : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $\lambda > 1$ definisanih sa $f_\lambda(y) = e^{\lambda y}$ važi

$$\forall y \in (-\infty, 0), \lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda(y) = 0 \quad \wedge \quad \forall\lambda > 1, |f_\lambda(y)| \leq g(y) = e^y,$$

te na osnovu Lebesgue-ove teoreme dominantne konvergencije sledi

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{(-\infty,0)} e^{\lambda y} d\nu = \int_{(-\infty,0)} 0 d\nu = 0,$$

[5] jer je $\mathsf{P}(Y_i > 0) = \nu((0,\infty)) = 0$ za svako i, [6] slučajne promenljive Y_i su nezavisne.

Analogno ide slučaj $\nu((0,\infty)) = 0$.

(2°) Slučaj $\nu((-\infty,0)) > 0 \wedge \nu((0,\infty)) > 0$: u ovom slučaju važi

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \Lambda_\mu(\lambda) = \infty, \tag{2.29}$$

jer npr. za svako $x > 0$ važi $\lim_{\lambda\to\infty} e^{\lambda x} = \infty$, odakle se, koristeći $\nu((0,\infty)) > 0$, na osnovu Lebesgue-ove teoreme monotone konvergencije dobija da je $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_{(0,\infty)} e^{\lambda x} d\mu = \infty$ odnosno $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \ln \int_{(0,\infty)} e^{\lambda x} d\mu = \infty$, a kako iz nejednakosti $\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu \geq \int_{(0,\infty)} e^{\lambda x} d\mu$ sledi nejednakost $\ln \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu \geq \ln \int_{(0,\infty)} e^{\lambda x} d\mu$, dalje se dobija

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Lambda_\mu(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \ln \mathsf{E}\left(e^{\lambda X_i}\right) = \lim_{\lambda\to\infty} \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu \geq \lim_{\lambda\to\infty} \ln \int_{(0,\infty)} e^{\lambda x} d\mu = \infty,$$

dakle $\lim_{\lambda\to\infty} \Lambda_\mu(\lambda) = \infty$. Analogno se dobija da je $\lim_{\lambda\to-\infty} \Lambda_\mu(\lambda) = \infty$.

Dokaz nejednakosti (2.26) dalje sledi diskusijom po slučajevima kada je nosač mere μ ograničen skup, a kada to nije.

(2.a) Nosač mere μ ograničen skup: u ovom slučaju je jasno da $\Lambda_\mu(\lambda)$ ima konačnu vrednost za svako $\lambda \in \mathbb{R}$. Stoga je, na osnovu leme 2.4 pod (f), funkcija Λ_μ neprekidna i diferencijabilna na $\mathbb{R}$, te zbog konveksnosti funkcije Λ_μ i zbog (2.29) postoji $\eta \in \mathbb{R}$ takvo da je $\Lambda_\mu(\eta) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_\mu(\lambda)$ i $\Lambda'_\mu(\eta) = 0$.

Neka je $\tilde{\mu}$ verovatnosna mera definisana preko μ na sledeći način:[6]

$$\tilde{\mu}(A) = \int_A e^{\eta x - \Lambda_\mu(\eta)} d\mu(x).$$

$\tilde{\mu}$ je zaista verovatnosna mera jer je

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{\mu} = \frac{1}{\mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right)} \int_{\mathbb{R}} e^{\eta x} d\mu(x) = 1.$$

Ako su X_i i.i.d. slučajne promenljive raspodeljene po verovatnosnoj meri $\tilde{\mu}$ i ako je $\tilde{\mu}_n$ verovatnosna mera po kojoj je raspodeljena slučajna promenljiva $\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, tada za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\mu_n((-\varepsilon,\varepsilon)) = \int\limits_{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| < n\varepsilon} \mu(dx_1)\dots\mu(dx_n) \geq$$

$$\geq e^{-n\varepsilon|\eta|} \int\limits_{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| < n\varepsilon} e^{\eta \sum_{i=1}^{n} x_i} \mu(dx_1)\dots\mu(dx_n) =$$

$$= e^{-n\varepsilon|\eta|} e^{n\Lambda_\mu(\eta)} \tilde{\mu}_n((-\varepsilon,\varepsilon)) \tag{2.30}$$

S druge strane je

$$\mathsf{E}_{\tilde{\mu}}(X_i) = \int_{\mathbb{R}} x d\tilde{\mu}(x) \overset{[6]}{=} \int_{\mathbb{R}} x e^{\eta x - \Lambda_\mu(\eta)} d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\mathsf{E}\left(e^{\eta X_i}\right)} \int_{\mathbb{R}} x e^{\eta x} d\mu(x) \overset{[7]}{=} \Lambda'_\mu(\eta) = 0.$$

[6] primenom sledeće teoreme (vidi [RuWa87], teorema 1.29 i definicija 1.31): Neka je μ pozitivna mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{M}, \mu)$, i neka je $f : X \to [0,\infty)$ merljiva funkcija. Tada je funkcija

$$\varphi(A) \overset{\text{def}}{=} \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

pozitivna mera na $(X, \mathcal{M})$, i za svaku merljivu funkciju $g : X \to \mathbb{R}$ važi

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu.$$

[7] primenom (2.15) iz leme 2.4.

Iz poslednje jednakosti, na osnovu zakona velikih brojeva sledi relacija $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{\mu}_n((-\varepsilon,\varepsilon)) = 1$, što uz (2.30) daje da za sve $0 < \varepsilon < \delta$ važi $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n((-\delta,\delta)) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n((-\varepsilon,\varepsilon)) \geq \Lambda_\mu(\eta) - \varepsilon|\eta|$.
Konačno, iz graničnog slučaja $\varepsilon \to 0$ u poslednjoj relaciji sledi (2.26).

(2.b) Nosač mere μ nije ograničen skup: Neka je M dovoljno veliki po-

[6] $\tilde{\mu}$ je verovatnosna mera čiji je Radon-Nikodým-ov izvod u odnosu na verovatnosnu meru μ jednak funkciji $f(x) = e^{\eta x - \Lambda_\mu(\eta)}$.

zitivan broj za koji važi $\mu([-M,0))>0$ i $\mu((0,M])>0$, i neka je $\Lambda_M(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \int\limits_{-M}^{M} e^{\lambda x} d\mu$. Označimo sa ν verovatnosnu meru po kojoj je raspodeljena uslova slučajna promenljiva $X_i \mid \{|X_i| \le M\}$, a sa ν_n označimo verovatnosnu meru po kojoj je raspodeljena uslova slučajna promenljiva $\hat{S}_n \mid \{\forall i \in \{1,\dots n\},\ |X_i| \le M\}$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $\delta > 0$ važi

$$\mu_n((-\delta,\delta)) \ge \nu_n((-\delta,\delta)) \cdot (\mu((-M,M)))^n.$$

Na osnovu prethodnog dela dokaza (slučaj (2.a)) sledi da za ν_n važi nejednakost (2.26). Stoga se generatorna funkcije logaritamskog momenta Λ_ν asocirana sa ν svodi na $\Lambda_M(\lambda) - \ln\mu([-M,M])$, te je

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n((-\delta,\delta)) \ge \ln\mu([-M,M]) + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \nu_n((-\delta,\delta)) \ge$$
$$\ge \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_M(\lambda).$$

Označimo $I_M = -\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_M(\lambda)$ i $I^* = \limsup\limits_{M\to\infty} I_M$. Iz prethodne nejednakosti sledi da je

$$\liminf_{n\to} \frac{1}{n} \ln \mu_n((-\delta,\delta)) \ge -I^*. \tag{2.31}$$

Fukcija Λ_M je neopadajuća u tački M. Pri tome važi nejednakost $-I_M \le \Lambda_M(0) \le \Lambda_\mu(0) = 0$, te je $-I^* \le 0$. Kako je vrednost $-I_M$ konačna za sve dovoljno velike $M>0$, sledi da je $-I^* > -\infty$. Stoga su nivo-skupovi $\Psi_M = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Lambda_M(\lambda) \le -I^*\}$ neprazni, kompaktni skupovi, pri čemu je Ψ_M, $M>0$ monotono nerastuća familija skupova, odakle sledi da postoji bar jedan element $\lambda_0 \in \bigcap\limits_{M>0} \Psi_M$. Primenom Lebesgue-ove teoreme monotone konvergencije sledi da je $\Lambda_\mu(\lambda_0) = \lim\limits_{M\to\infty} \Lambda_M(\lambda_0) \le -I^*$, te iz ove relacije i (2.31) sledi nejednakost (2.26).

□

Napomena 2.6

(a) *Cramér-ova teorema u $\mathbb{R}$ važi i u slučaju kada $\bar{x}$ ne postoji.*

(b) *U opštem slučaju, Λ_μ^* ne mora biti dobra funkcija stope.*

Pod dodatnim uslovima funkcija Λ_μ^* ima dodatne lepe osobine koje se mogu koristiti pri izračunavanju ili proceni granivcnih vrednosti (LB) i (UB).

Teorema 2.14 *Ako je $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu}$, tada je Λ_μ^* dobra funkcija stope. Ako je pri tome zadovoljeno $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\Lambda_\mu} = \mathbb{R}$, tada je $\lim\limits_{|x|\to\infty} = \dfrac{\Lambda_\mu^*(x)}{|x|} = \infty$.*

Naravno, postavlja se pitanje kada postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln \mu_n(A)$. Tako npr. za svako $y \in \mathbb{R}$ važi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n\left([y,\infty)\right)=-\inf_{x\geq y}\Lambda_\mu^*(x).$$

Takođe, ako je A Borel-merljiv skup koji za neke $y,z\in\mathbb{R}$ zadovoljava $(y,z]\subseteq A\subseteq(y,\infty]$, i ako još pri tome je ispunjen bar jedan od uslova $\overline{x}<z$ i $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu}=\{0\}$, tada važi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n(A)=-\inf_{x\in A}\Lambda_\mu^*(x).$$

Slede primeri LD konvergencije vezane za slučajne promenljive sa nekim raspodelama važnog tipa.

Primer 2.4 *Za slučajnu promenljivu X, označićemo sa $\Lambda_X(\lambda)$ i $\Lambda_X^*(\lambda)$ generatornu funkciju logaritamskog momenta i njenu Fenchel-Legendre-ovu transformaciju za verovatnosnu meru koja odgovara slučajnoj promenljivoj X. Sledi nekoliko primera ovih funkcija za neke važne raspodele.*

(a) *Za Bernoulli-jevu slučajnu promenljivu („indikator događaja") X sa zakonom raspodele $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$, dobijamo generatornu funkciju logaritamskog momenta $\Lambda_X(\lambda)=\ln\left(1-p+pe^{\lambda}\right)$ i odgovarajuću Fenchel-Legendre-ovu transformaciju*

$$\Lambda_X^*(x)=\begin{cases} x\ln\frac{x}{p}+(1-x)\ln\frac{1-x}{1-p} & ,\quad x\in(0,1)\\ \ln\frac{1}{1-p} & ,\quad x=0\\ \ln\frac{1}{p} & ,\quad x=1\\ \infty & ,\quad x\notin[0,1]\end{cases}$$

Grafik funkcije $\Lambda_X(\lambda)$ za $p=0.4$ Grafik funkcije $\Lambda_X^*(x)$ za $p=0.4$

(b) *Za slučajnu promenljivu X sa Poisson-ovom $\mathcal{P}o(\theta)$ raspodelom (tj. zakonom raspodele $\mathsf{P}(X=k)=\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) dobijamo generatornu funkciju logaritamskog momenta $\Lambda_X(\lambda)=\theta\left(e^{\lambda}-1\right)$ i odgovarajuću Fenchel-Legendre-ovu transformaciju*

$$\Lambda_X^*(x)=\begin{cases}\infty & ,\quad x<0\\ \theta & ,\quad x=0\\ \theta-x+x\ln\frac{x}{\theta} & ,\quad x>0\end{cases}$$

∞

Grafik funkcije $\Lambda_X(\lambda)$ za $\theta = 2$

Grafik funkcije $\Lambda_X^*(x)$ za $\theta = 2$

(c) *Za slučajnu promenljivu X sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(a)$, $a > 0$ raspodelom (tj. gustinom raspodele $\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ ae^{-ax} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$) dobijamo generatornu funkciju logaritamskog momenta $\Lambda_X(\lambda) = \begin{cases} \ln \frac{a}{a-\lambda} & , \quad \lambda < a \\ \infty & , \quad \lambda \geq a \end{cases}$ i njoj odgovarajuću Fenchel-Legendre-ovu transformaciju*

$$\Lambda_X^*(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x \leq 0 \\ ax - 1 - \ln(ax) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

∞ ∞

Grafik funkcije $\Lambda_X(\lambda)$ za $a = 3$

Grafik funkcije $\Lambda_X^*(x)$ za $a = 3$

(d) *Za slučajnu promenljivu X sa normalnom $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma > 0$ raspodelom (tj. gustinom raspodele $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$) dobijamo generatornu funkciju logaritamskog momenta $\Lambda_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + m\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i odgovarajuću Fenchel-Legendre-ovu transformaciju*

$$\Lambda_X^*(x) = \frac{x-m}{\sigma^2}$$

Grafik funkcije $\Lambda_X(\lambda)$ za $m = 0$ i $\sigma = 1$

Grafik funkcije $\Lambda_X^*(x)$ za $m = 0$ i $\sigma = 1$

2.4.2 Teorema Cramér-a u $\mathbb{R}^d$

Dokaz teoreme Cramér-a za slučajne promenljive X_i sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ se donekle razlikuje od dokaza u jednodimenzionalnom slučaju. Ilustracije radi, sledi dokaz osobina funkcije stope Λ_μ^*. Radi lakšeg dokazivanja, neka važi pretpostavka da je $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \mathbb{R}^d$, tj. $\forall\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\Lambda_\mu(\lambda) < \infty$. Između ostalog to znači i da je $\mathsf{E}\left(|X_i|^2\right) < \infty$ i $\hat{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \bar{x}$.

Teorema 2.15 (Osobine funkcija Λ_μ i Λ_μ^*) *Neka je $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \mathbb{R}^d$. Tada važi:*

(a) Λ_μ *je svuda diferencijabilna funkcija;*

(b) Λ_μ^* *je dobra funkcija stope;*

(c) $\forall y \in \mathbb{R}^d, \forall\eta \in \mathbb{R}^d, \quad y = \nabla\Lambda_\mu(\eta) \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\mu^*(y) = \langle \eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta).$

<u>*Dokaz:*</u>

(a) Sledi zbog iz istih razloga kao u jednodimenzionalnom slučaju (lema 2.4 pod (f)), uz $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \mathbb{R}^d$.

(b) Po teoremi 2.12 pod (c) je Λ_μ^* funkcija stope, te pošto, kao što će biti dokazano, za svako $x \in \mathbb{R}^d$ i svako $\rho > 0$ važi

$$\Lambda_\mu^*(x) \geq \rho\,\|x\| - \sup_{\|\lambda\|=\rho} \Lambda_\mu(\lambda), \tag{2.32}$$

sledi da je npr. za $\rho = 1$: $\Lambda_\mu^*(x) \geq \|x\| - \sup\limits_{\|\lambda\|=1} \Lambda_\mu(\lambda)$, te je zbog diferencijabilnosti odnosno neprekidnosti funkcije Λ_μ vrednost $\sup\limits_{\|\lambda\|=1} \Lambda_\mu(\lambda)$ konačan broj, te je skup $\left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \|x\| - \sup\limits_{\|\lambda\|=1} \Lambda_\mu(\lambda) \leq \alpha \right\}$ ograničen za svako $\alpha \in \mathbb{R}$, a zbog nejednakosti (2.32) za nivo-skupove funkcije Λ_μ^* važi

$$\psi_{\Lambda_\mu^*}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \Lambda_\mu^*(x) \leq \alpha \right\} \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \|x\| - \sup_{\|\lambda\|=1} \Lambda_\mu(\lambda) \leq \alpha \right\},$$

te su i nivo skupovi funkcije Λ_μ^* još i ograničeni, odakle sledi da su i kompaktni.

$\triangleright$ Dokaz nejednakosti (2.32):

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^*(x) &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} \left\{ \langle\lambda, x\rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \right\} \geq \sup_{\|\lambda\|=\rho} \left\{ \langle\lambda, x\rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \right\} \geq \\ &\geq \sup_{\|\lambda\|=\rho} \langle\lambda, x\rangle - \sup_{\|\lambda\|=\rho} \Lambda_\mu(\lambda), \end{aligned} \tag{$*$}$$

a pošto s jedne strane, iz dobro poznate relacije $|\langle\lambda, x\rangle| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\|$ sledi $\sup\limits_{\|\lambda\|=\rho} \langle\lambda, x\rangle \leq \sup\limits_{\|\lambda\|=\rho} \{\|\lambda\| \cdot \|x\|\} = \rho \cdot \|\lambda\|$, a s druge strane za $\lambda = \frac{\rho}{\|x\|} x$ važi

$\|\lambda\| = \rho$ i $\langle\lambda, x\rangle = \frac{\rho}{\|x\|}\langle x, x\rangle = \frac{\rho}{\|x\|}\|x\|^2 = \rho\|x\|$, to je $\sup\limits_{\|\lambda\|=\rho}\langle\lambda, x\rangle = \rho\|x\|$, te se uvrštavanjem ove jednakosti u [$*$] dobija nejednakost (2.32).

(c) Neka je $y = \nabla\Lambda_\mu(\eta)$. Neka je, za fiksno $\lambda \in \mathbb{R}^d$, funkcija g definisana sa

$$g(\alpha) = \lambda\langle\lambda-\eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta + \alpha(\lambda-\eta)) + \langle\eta, y\rangle, \quad \alpha \in [0,1].$$

Iz konveksnosti funkcije Λ_μ [$*$] sledi konkavnost funkcije g:
za sve $\alpha, \beta \in [0,1]$ i svako $\theta \in (0,1)$ je

$$\begin{aligned}
&g(\alpha+\theta(\beta-\alpha)) = \\
&= (\alpha+\theta(\beta-\alpha))\langle\lambda-\eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta + (\alpha+\theta(\beta-\alpha))(\lambda-\eta)) + \langle\eta, y\rangle = \\
&= (\alpha+\theta(\beta-\alpha))\langle\lambda-\eta, y\rangle \\
&\quad -\Lambda_\mu((1-\theta)(\eta+\alpha(\lambda-\eta)) + \theta(\eta+\beta(\lambda-\eta))) + \langle\eta, y\rangle \geq \\
&\overset{[*]}{\geq} (\alpha+\theta(\beta-\alpha))\langle\lambda-\eta, y\rangle \\
&\quad -(1-\theta)\Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta)) - \theta\Lambda_\mu(\eta+\beta(\lambda-\eta)) + \langle\eta, y\rangle = \\
&= \alpha\langle\lambda-\eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta)) + \langle\eta, y\rangle + \\
&\quad +\theta\Big(\beta\langle\lambda-\eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta+\beta(\lambda-\eta)) + \langle\eta, y\rangle \\
&\qquad\quad -\alpha\langle\lambda-\eta, y\rangle + \Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta)) - \langle\eta, y\rangle\Big) = \\
&= g(\alpha) + \theta(g(\beta) - g(\alpha)).
\end{aligned}$$

S druge strane, pošto $\Lambda_\mu(\eta)$ ima konačnu vrednost, to je i $|g(0)| < \infty$.

Iz konkavnosti funkcije g sledi

$$\begin{aligned}
&\alpha g(1) + (1-\alpha)g(0) \leq g(\alpha 1 + (1-\alpha)0) = g(\alpha) \\
\Rightarrow\quad &\alpha(g(1) - g(0)) \leq g(\alpha) - g(0) \\
\Rightarrow\quad &g(1) - g(0) \leq \liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha} = \liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha\langle\lambda-\eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta)) - \Lambda_\mu(\eta)}{\alpha} \\
\Rightarrow\quad &g(1) - g(0) \leq \langle\lambda-\eta, y\rangle - \liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{\Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta)) + \Lambda_\mu(\eta)}{\alpha}
\end{aligned}$$

gde je $\liminf\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{\Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta))+\Lambda_\mu(\eta)}{\alpha}$ izvod funkcije Λ_μ u tački η po pravcu vektora $\lambda-\eta$, te je

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{\Lambda_\mu(\eta+\alpha(\lambda-\eta))+\Lambda_\mu(\eta)}{\alpha} = \liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{\big\langle\nabla\Lambda_\mu(\eta), \alpha(\lambda-\eta)\big\rangle}{\alpha} = \\
&= \liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha\big\langle\lambda-\eta, \nabla\Lambda_\mu(\eta)\big\rangle}{\alpha} = \big\langle\lambda-\eta, \nabla\Lambda_\mu(\eta)\big\rangle
\end{aligned}$$

odakle sledi

$$g(1) - g(0) \leq \langle\lambda-\eta, y\rangle - \big\langle\lambda-\eta, \nabla\Lambda_\mu(\eta)\big\rangle = \big\langle\lambda-\eta, y - \nabla\Lambda_\mu(\eta)\big\rangle = 0$$

odnosno $g(1) \leq g(0)$, odakle je

$$\langle\lambda, y\rangle - \Lambda_\mu(\lambda) = g(1) \leq g(0) = \langle\eta, y\rangle - \Lambda_\mu(\eta) \leq \Lambda_\mu^*(y),$$

te konačno sledi

$$\Lambda_\mu^*(y) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} \langle\lambda,y\rangle - \Lambda_\mu(\lambda) \le \langle\eta,y\rangle - \Lambda_\mu(\eta) \le \Lambda_\mu^*(y)$$

odnosno $\Lambda_\mu^*(y) = \langle\eta,y\rangle - \Lambda_\mu(\eta)$.

$\square$

Teorema 2.16 (Cramér) *Neka je $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \mathbb{R}^d$. Tada familija verovatnosnih mera μ_n, $n\in\mathbb{N}$ zadovoljava* LDP *na $\mathbb{R}^d$ sa konveksnom, dobrom funkcijom stope Λ_μ^*. Dakle*

(UB) *za svaki zatvoren skup $F\subseteq\mathbb{R}^d$ važi*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n(F) \le -\inf_{x\in F}\Lambda_\mu^*(x),$$

(LB) *za svaki otvoren skup $G\subseteq\mathbb{R}^d$ važi*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mu_n(G) \ge -\inf_{x\in G}\Lambda_\mu^*(x).$$

Teorema Sanov-a za konačan alfabet $\sum = \{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ se sada može dobiti i kao posledica teoreme Cramér-a u $\mathbb{R}^d$. Naime, neka su $Y_1,Y_2,\dots,Y_n,\dots$ i.i.d. slučajne promenljive raspodeljene po verovatnosnoj meri $\mu\in M_1(\Sigma)$, i neka je $L_n^{\mathbf{Y}}$ empirijska verovatnosna mera koja odgovara slučajnom vektoru $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$, kao u sekciji 2.3. Za slučajne vektore

$$X_k = \left(\chi_{\{a_1\}}(Y_k),\chi_{\{a_2\}}(Y_k),\dots,\chi_{\{a_N\}}(Y_k)\right),\quad k\in\mathbb{N}$$

i njihovu aritmetičku sredinu $\hat{S}_n$ važi

$$\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\chi_{\{a_1\}}(Y_k),\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\chi_{\{a_2\}}(Y_k),\dots,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\chi_{\{a_N\}}(Y_k)\right) = L_n^{\mathbf{Y}}.$$

S obzirom na to da

(a) niz slučajnih promenljivih X_k, $k\in\mathbb{N}$ ima ograničene vrednosti, te je $\mathcal{D}_{\Lambda_\mu} = \mathbb{R}^N$,

(b) ukoliko postoji, funkcija stope je jednoznačno određena (teorema 2.5),

primenom teoreme Craméra dobijamo sledeće

Tvrđenje 2.2 *Za svaki skup verovatnosnih vektora (mera) $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^N$ važi*

$$\begin{aligned} -\inf_{\nu\in\mathring{\Gamma}}\Lambda_\mu^*(\nu) &\le \liminf_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\mathsf{P}_\mu\left(L_n^{\mathbf{Y}}\in\Gamma\right) \le \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\mathsf{P}_\mu\left(L_n^{\mathbf{Y}}\in\Gamma\right) \le -\inf_{\nu\in\overline{\Gamma}}\Lambda_\mu^*(\nu), \end{aligned}$$

gde je Λ_μ^* Fenchel-Legendre-ova transformacija generatorne funkcije logaritamskog momenta

$$\Lambda_\mu(\lambda) = \ln\mathsf{E}\left(e^{\langle\lambda,X_k\rangle}\right) = \ln\sum_{i=1}^N e^{\lambda_i}\mu(a_i),\quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^N$$

Pri tome, za funkciju Λ_μ^* važi $\Lambda_\mu^*(\nu) = H(\nu\,|\,\mu)$, $\nu\in\mathbb{R}^N$.

2.5 Teorema Gärtner-Ellis

Teorema Gärtner-Ellis pretstavlja uopštenje teoreme Cramér-a za niz slučajnih promenljivih koje ne moraju biti nezavisne i imati jednake raspodele.

Neka je Z_n, $n \in \mathbb{N}$ niz slučajnih promenljivih sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ raspodeljenih po verovatnosnim zakonima tj. verovatnosnim merama $\mu_n \in M_1(\mathbb{R}^d)$. U ovom slučaju se za svaku od slučajnih promenljivih Z_n definiše generatorna funkcija logaritamskog momenta

$$\Lambda_n(\lambda) = \Lambda_{\mu_n}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \mathsf{E}\left(e^{\langle \lambda, Z_n \rangle}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d, \tag{2.33}$$

pri čemu se generatorna funkcija logaritamskog momenta koja odgovara celom nizu slučajnih promenljivih Z_n definiše na sledeći način.

Definicija 2.14 ***Generatorna funkciju logaritamskog momenta*** *niza slučajnih promenljivih Z_n je funkcija $\Lambda : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ definisana sa*

$$\Lambda(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d \tag{2.34}$$

ukoliko granične vrednosti postoje.

Neka je Λ^* Fenchel-Legendre-ova transformacija funkcije Λ. Pri izvođenju rezultata u ovom slučaju neophodna je sledeća pretpostavka:

Pretpostavka 2.1

(a) *Funkcija $\Lambda : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ je dobro definisana, tj. za svako $\lambda \in \mathbb{R}^n$ postoji granična vrednost $\Lambda(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(b) $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$ *tj. u okolini tačke* 0 *funkcija* Λ *ima konačne vrednosti.*

Napomena 2.7 *Neka su X_i, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. slučajni vektori sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, i neka je μ_n, $n \in \mathbb{N}$ niz verovatnosnih mera po kojima su raspodeljene aritmetičke sredine $Z_n = \hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$\frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda) = \Lambda(\lambda) = \ln \mathsf{E}\left(e^{\langle \lambda, X_i \rangle}\right),$$

a pretpostavka 2.1 *je zadovoljena ako i samo ako je* $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$.

Definicija 2.15 *Tačka $y \in \mathbb{R}^d$ je* ***istaknuta tačka*** *funkcije $FLTS$ (eng. "****exposed point****") ukoliko postoji neko $\lambda \in \mathbb{R}^d$ takva da za sve $x \neq y$ važi*

$$\langle \lambda, y \rangle - \Lambda^*(y) > \langle \lambda, x \rangle - \Lambda^*(x). \tag{2.35}$$

Tačka λ u nejednakosti (2.35) *se naziva* ***istaknuta hiperravan*** *(eng. "****exposing hyperplane****").*

Nadalje će sa $\mathcal{F}$ biti označen skup onih istaknutih tačaka funkcije Λ^* čije istaknute hiperravni pripadaju skupu $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$.

Definicija 2.16 *Funkcija* $f : \mathbb{R}^d \to (-\infty, \infty]$ *je* ***esencijalno glatka*** *(eng. "**essentially smooth**") ukoliko je:*

(a) $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda \neq \emptyset$,

(b) Λ *je diferencijabilna na* $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$,

(c) *funkcija* Λ *je* ***strma*** *(eng.* ***steep****), tj. za svaki niz* λ_n, $n \in \mathbb{N}$ *elemenata iz* $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$ *koji konvergira ka rubnoj tački skupa* $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$ *važi* $\lim_{n\to\infty} \|\nabla\Lambda(\lambda_n)\| = \infty$.

Kao i u jednodimezionalnom slučaju, funkcije Λ i Λ^* imaju neke lepe osobine.

Lema 2.5 *Neka je zadovoljena pretpostavka* 2.1. *Tada važi*

(a) Λ *je konveksna funkcija;*

(b) $\forall\lambda \in \mathbb{R}^d, \ \Lambda(\lambda) > -\infty$*;*

(c) Λ^* *je konveksna funkcija;*

(d) Λ^* *je dobra funkcija stope;*

(e) *za svako* $\eta \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\Lambda$ *i* $y = \nabla\Lambda(\eta)$ *važi*

$$\Lambda^*(y) = \langle \eta, y \rangle - \Lambda(\eta),$$

i pri tome $y \in \mathcal{F}$, *a* η *je istaknuta hiperravan za tačku* y.

Lema Rockafellar-a se koristi u dokazu teoreme Gärtner-Ellis.

Lema 2.6 (Rockafellar) *Ako je* $\Lambda : \mathbb{R}^d \to (-\infty, \infty]$ *esencijalno glatka, od dole poluneprekidna, konveksna funkcija, tada je* $\mathrm{ri}\left(\mathcal{D}_{\Lambda^*}\right) \subseteq \mathcal{F}$.[7]

Osim što daje potreban i dovoljan uslov za LD konvergenciju niza verovatnosnih mera μ_n, $n \in \mathbb{R}$, teorema Gärtner-Ellis daje i jedan dovoljan uslov iz kojeg sledi da je Λ^* dobra funkcija stope.

Teorema 2.17 (Gärtner-Ellis) *Neka je zadovoljena pretpostavka* 2.1. *Tada važi*

(a) *Za svaki zatvoren skup* F *važi*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(F) \leq -\inf_{x\in F} \Lambda^*(x). \tag{2.36}$$

(b) *Za svaki otvoren skup* G *važi*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(G) \geq -\inf_{x\in G\cap\mathcal{F}} \Lambda^*(x). \tag{2.37}$$

(c) *Ukoliko je* Λ *esencijalno glatka, od dole poluneprekidna funkcija, tada je* LDP *zadovoljen sa dobrom funkcijom stope* Λ^*.

[7] Pošto je Λ^* konveksna funkcija, sledi da je $\mathcal{D}_{\Lambda^*}$ konveksan skup.

2.6 Primena LDP na lance Markov-a sa konačnim skupom stanja

U ovom odeljku je prikazana jedna primena LDP na slučajne procese. Neka je Y_n, $n \in \mathbb{N}$ lanac Markov-a čiji je skup mogućih stanja konačan skup $\sum = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Sa $\Pi = [\pi_{i,j}]_{N\times N}$ će biti označena matrica prelaza lanca Y_n, $n \in \mathbb{N}$ (Π je stohastička matrica, tj. kvadratna matrica čiji su elementi nenegativni, i zbir elemenata u svakoj vrsti je jednak jedinici). Sa P_σ^π će biti označena ***verovatnosna mera Markov-a*** u odnosu na prelazne verovatnoće Π i početno stanje $\sigma \in \Sigma$, tj. verovatnosna mera definisana sa

$$\mathsf{P}_\sigma^\pi (Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \pi_{\sigma,y_1} \prod_{i=1}^{n-1} \pi_{y_i, y_{i+1}}.$$

Definicija 2.17 *Matrica $B = [b_{i,j}]_{N\times N}$ čiji su elementi realni brojevi $b_{i,j} \geq 0$ je* ***ireducibilna*** *ukoliko za svaka dva indeksa $i, j \in \{1, \ldots N\}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ za koje je $b_{i,j}^m > 0$.*

Neka je $X_i = f(Y_i)$, $i \in \mathbb{N}$, gde je $f : \sum \to \mathbb{R}^d$ obična (deterministička) funkcija. Neka je dalje $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$ niz empirijskih sredina slučajnih promenljivih X_i, $i \in \mathbb{N}$. Slučajne promenljive Y_i, $i \in \mathbb{N}$, a onda i slučajne promenljive X_i, $i \in \mathbb{N}$ su u opštem slučaju zavisne jer se radi o lancu Markov-a. Stoga se na verovatnosne mere koje odgovaraju slučajnim promenljivama X_i, $i \in \mathbb{N}$ ne može primeniti teorema Cramér-a, već LD konvergencija sledi iz teoreme Gärtner-Ellis. U ovom slučaju se formula za izračunavanje funkcije stope u smislu Fenchel-Legendre-ove transformacije može prilagoditi specifičnostima lanca Markov-a.

Za proizvoljno $\lambda \in \mathbb{R}^d$, neka je $\Pi_\lambda = [\pi_\lambda(i,j)]_{N\times N}$ matrica čiji su elementi definisani sa $\pi_\lambda(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(i,j) e^{\langle \lambda, f(j)\rangle}$, $i, j \in \sum$. Elementi matrice π_λ su nenegativni, a ako je matrica π ireducibilna, tada je ireducibilna i matrica π_λ. Takođe, neka je, za svako $\lambda \in \mathbb{R}^d$ sa $\rho(\Pi_\lambda)$ označen Perron-Frobenius-ov karakteristični koren matrice Π_λ, koji u kontrukciji funkcije stope ima ulogu generatorne funkcije logaritamskog momenta.

Teorema 2.18 *Neka je Y_n, $n \in \mathbb{N}$ lanac Markov-a sa konačnim skupom stanja i sa ireducibilnom matricom prelaza Π. Neka je*

$$I(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{\langle \lambda, z\rangle - \ln \rho(\Pi_\lambda)\}, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Niz empirijskih sredina Z_n, $n \in \mathbb{N}$ zadovoljava LDP *sa konveksnom, dobrom funkcijom stope I, tj. za svaki skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ i svako početno stanje $\sigma \in \Sigma$ važi*

$$\begin{aligned} -\inf_{x \in \mathring{\Gamma}} I(x) \quad &\leq \quad \liminf_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln \mathsf{P}_\sigma^\pi (Z_n \in \Gamma) \quad \leq \\ &\leq \quad \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln \mathsf{P}_\sigma^\pi (Z_n \in \Gamma) \quad \leq \quad -\inf_{x \in \overline{\Gamma}} I(x). \end{aligned}$$

Glava 3

Idempotentna verovatnoća i primena na princip velikih devijacija

U ovoj glavi su navedena pojmovi i tvrđenja iz teorije idempotentnih verovatnosnih mera i integrala, kao i primena u teoriji velikih devijacija. Prikazana je varijanta teorije idempotentnih mera u kojoj se osobina σ-aditivnosti mere zamenjuje osobinom maksitivnosti. Takođe su navedene neke osobine integrala baziranih na idempotentnoj meri, tj. na operacijama $\sup$ i $\cdot$. O ovoj temi možete detaljnije naći npr. u [Pu01]. Kao što je navedeno u glavi 4, mera i integral se mogu bazirati i na drugim operacija. O teoriji neaditivnih mera možete naći npr. u [Pa95].

3.1 Osnovne definicije i tvrđenja

U teoriji mera se umesto uobičajene relacije poretka $\leq$ može posmatrati opštiji tip relacije, tzv. usmereni poredak, a umesto uobičajenih nizova skupova i vrednosti mere se može posmatrati uopštenje pojma niza, tzv. uopšteni niz.

Definicija 3.1 *Binarna relacija $\preceq$ skupa $A \neq \emptyset$ se naziva* ***usmereni poredak*** *(eng.* ***directed order****) ukoliko važi:*

(1) $\forall x \in A,\ x \preceq x$,

(2) $\forall x, y, z \in A,\ (x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$,

(3) $\forall x, y \in A,\ \exists z \in A,\ x \preceq z \wedge y \preceq z$.

Skup A je ***usmereni skup*** *(eng.* ***directed set****) ukoliko je na njemu definisan usmereni poredak.*

Definicija 3.2 *Neka je $\preceq$ usmereni poredak na skupu A, i neka je (X,O) topološki prostor.* ***Uopšteni niz*** *(eng.* ***generalized sequence***[1]*) je preslikavanje skupa A u skup X. Uopšteni niz se često označava sa $\{x_\alpha \mid \alpha \in A, \preceq\}$, ili skraćeno sa $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ili x_α, $\alpha \in A$ ako se podrazumeva o kojoj se relaciji $\preceq$ radi ($x_\alpha \in X$).*

Definicija 3.3 (Moore-Smith) *Neka je $\preceq$ usmereni poredak na skupu A, i neka je (X,O) topološki prostor. Uopšteni niz $\{x_\alpha \mid \alpha \in A, \preceq\}$* ***konvergira ka*** *$x \in X$ ako za svaku okolinu $O_x \in O$ tačke x postoji $\beta \in A$ takvo da $x_\alpha \in O_x$ za sve $\alpha \geq \beta$. Pišemo $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = x$.*

Neka je dalje u tekstu Ω skup, a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tako da $\emptyset \in \mathcal{E}$. Sa Φ i Ψ će biti označeni usmereni skupovi, a sa J proizvoljan skup indeksa.

Familiju skupova indeksiranih elementima usmerenog skupa nazivamo ***uopštenim nizom skupova***. Za uopšteni niz skupova A_ϕ, $\phi \in \Phi$ kažemo da je ***monotono neopadajući*** odnosno ***monotono nerastući*** ukoliko za sve $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ iz $\phi_1 \preceq \phi_2$ sledi $A_{\phi_1} \subseteq A_{\phi_2}$ odnosno $A_{\phi_1} \supseteq A_{\phi_2}$. Za uopšteni niz skupova A_ϕ, $\phi \in \Phi$ kažemo da je ***monotono rastući*** odnosno ***monotono opadajući*** ukoliko za sve $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ iz $\phi_1 \preceq \phi_2$ sledi $A_{\phi_1} \subset A_{\phi_2}$ odnosno $A_{\phi_1} \supset A_{\phi_2}$.

Svaki običan niz elemenata topološkog prostora ili skupova jeste uopšteni niz kod koga je indeksni skup tj. usmereni skup zapravo skup $\mathbb{N}$ opremljen standardnom relacijom poretka $\leq$.

Definicija 3.4 ***Idempotentna mera*** *je funkcija $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ sa sledećim osobinama:*

(IM1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(IM2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$,

(IM3) $\mu\left(\bigcup\limits_{\phi \in \Phi} A_\phi\right) = \sup\limits_{\phi \in \Phi} \mu\left(A_\phi\right)$

za svaki monotono neopadajući uopšteni niz A_ϕ, $\phi \in \Phi$ podskupova skupa Ω.

Za idempotentnu meru μ kažemo da je ***τ-glatka u odnosu na familiju*** *$\mathcal{E}$ (eng.* ***τ-smooth relative to*** *$\mathcal{E}$), ili skraćeno,* ***$\mathcal{E}$-idempotentna mera*** *(eng.* ***$\mathcal{E}$-idempotent measure****) ako pored* (IM1), (IM2) *i* (IM3) *važi još i*

(IM4) $\mu\left(\bigcap\limits_{\phi \in \Phi} F_\phi\right) = \inf\limits_{\phi \in \Phi} \mu\left(F_\phi\right)$

za svaki monotono nerastući uopšteni niz F_ϕ, $\phi \in \Phi$ elemenata familije skupova $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Definicija 3.5 ***Idempotentna verovatnosna mera*** *(eng.* ***idempotent probability measure****), ili skraćeno* ***idempotentna verovatnoća*** *(eng.* ***idempotent probability****) je idempotentna mera na Ω za koju važi*

[1] U literaturi na engleskom jeziku se za uopšteni niz češće koristi naziv ***net***.

(IMΠ) $\mu(\Omega) = 1$.

Idempotentna verovatnoća će nadalje biti označavana sa Π. *Takođe je uobičajeno da se za* $\mu(\{\omega\})$ *i* $\Pi(\{\omega\})$ *koriste oznake* $\mu(\omega)$ *i* $\Pi(\omega)$.

Sledi jednostavan primer idempotentne mere, a zatim neke opšte osobine idempotentnih mera.

Primer 3.1 *Neka je* $\Omega = \mathbb{N}$, *i neka je funkcija* $\Pi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *definisana sa*

$$\Pi(\emptyset) = 0, \qquad \Pi(A) = 1 - \frac{1}{\sup A}, \ \ \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}.$$

Funkcija Π *je idempotentna verovatnoća na skupu* $\mathbb{N}$. *Na primer, osobina* (IM2) *je zadovoljena jer za sve* $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *važi*

$$\Pi(A \cup B) = 1 - \frac{1}{\sup\{A \cup B\}} = 1 - \frac{1}{\max\{\sup A, \sup B\}} =$$
$$= 1 - \min\left\{\frac{1}{\sup A}, \frac{1}{\sup B}\right\} = \max\left\{1 - \frac{1}{\sup A}, 1 - \frac{1}{\sup B}\right\} = \Pi(A) \vee \Pi(B).$$

Lema 3.1 *Osobine idempotentne mere:*

(a) *idempotentna mera* μ *je neopadajuća i subaditivna funkcija, tj. za svaka dva skupa* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *važi*

$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ \mu(A) \leq \mu(B) \qquad i \qquad \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B),$$

(b) *za proizvoljnu konačnu familiju podskupova* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *skupa* Ω *važi*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \bigvee_{j=1}^{n} \mu(A_j) \tag{3.1}$$

(c) *uslovi* (IM2) *i* (IM3) *su ekvivalentni sa uslovom da za svaku familiju skupova* $\{A_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *važi*

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sup_{j \in J} \mu(A_j) \tag{3.2}$$

(osobina τ***-maksitivnosti****),*

(d) *jednakost* (3.2) *je ekvivalentna sa*

$$\forall A \subseteq \Omega, \ \ \mu(A) = \sup_{\omega \in A} \mu(\omega). \tag{3.3}$$

Dokaz:

(a) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = \mu(A \cup B) \overset{\text{(IM2)}}{=} \mu(A) \vee \mu(B) \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$,

$\mu(A \cup B) \overset{\text{(IM2)}}{=} \mu(A) \vee \mu(B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

(b) sledi induktivnom primenom (IM2).

(c) Iz (3.2) očigledno slede (IM2) i (IM3). Obratno, neka važe (IM2) i (IM3), i neka je $A_j,\ j \in J$ proizvoljna familija podskupova od Ω.

Neka je $\Phi = \{\, \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \mid n \in \mathbb{N},\ j_k \in J\}$ skup svih konačnih podskupova skupa J, i neka je

$$A_I \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in I} A_j,\ I \in \Phi, \qquad \mathcal{A} = \{\, A_I \mid I \in \Phi\}\,.$$

Neka je $\preceq$ binarna relacija skupa Φ definisana sa

$$I_1 \preceq I_2 \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad A_{I_1} \subseteq A_{I_2}\,.$$

Iz refleksivnosti i tranzitivnosti relacije $\subseteq$ sledi refleksivnost i tranzitivnost relacije $\preceq$, a za proizvoljne $I_1 \in \Phi$ i $I_2 \in \Phi$ očigledno važi $I = I_1 \cup I_2 \in \Phi$ i $I_1 \preceq I$ i $I_1 \preceq I$. Dakle, $\preceq$ je usmereni poredak na skupu Φ, a iz same definicije relacije sledi da je $\mathcal{A}$ neopadajući uopšteni niz skupova. Sledi

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{I \in \Phi} A_I\right) \stackrel{\text{(IM3)}}{=} \sup_{I \in \Phi} \mu(A_I) \stackrel{(3.1)}{=} \sup_{I \in \Phi} \bigwedge_{i \in I} \mu(A_i)$$

Pošto je I konačan skup, to je $\sup\limits_{I \in \Phi} \bigwedge\limits_{i \in I} \mu(A_i) = \mu\left(A_{i(I)}\right)$ za neko $i(I) \in I$, tj. za neko $i(I) \in J$, te je, zbog $\tilde{J} = \{\, i(I) \mid I \in \Phi\} \subseteq J$

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sup_{j \in \tilde{J}} \mu(A_j) \leq \sup_{j \in J} \mu(A_j). \qquad [*]$$

S druge strane, zbog monotonosti idempotentne mere (tvrđenje pod (a)), iz $\forall i \in J,\ \bigcup\limits_{j \in J} A_j \supseteq A_i$ sledi $\forall i \in J,\ \mu\left(\bigcup\limits_{j \in J} A_j\right) \geq \mu(A_i)$, odakle je dalje

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \geq \sup_{i \in J} \mu(A_i), \qquad [**]$$

te iz nejednakosti $[*]$ i $[*]$ sledi jednakost (3.2).

(d)$(\Longrightarrow)$ $\mu(A) = \mu\left(\bigcup\limits_{\omega \in A} \{\omega\}\right) \stackrel{(3.2)}{=} \sup\limits_{\omega \in A} \mu(\omega),$

$$(\Longleftarrow)\ \mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{\omega \in \bigcup\limits_{j \in J} A_j} \{\omega\}\right) \stackrel{(3.3)}{=} \sup_{\omega \in \bigcup\limits_{j \in J} A_j} \mu(\omega) =$$

$$= \sup_{j \in J} \sup_{\omega \in A_j} \mu(\omega) \stackrel{(3.3)}{=} \sup_{j \in J} \mu(A_j).$$

$\square$

Funkciju $\mu(\omega)$ (tj. funkciju $\tilde{\mu} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $\tilde{\mu}(\omega) = \mu(\omega)$) nazivamo ***gustinom*** mere μ. Pojam gustine je izuzetno značajan jer se, kao što će kasnije biti razmotreno, svaka idempotentna mera može izraziti preko svoje gustine.

Označimo redom sa $\mathcal{E}_u$ i $\mathcal{E}_i$ familije svih unija i preseka elemenata skupa $\mathcal{E}$; za $\mathcal{E}_{iu} = (\mathcal{E}_i)_u$ i $\mathcal{E}_{ui} = (\mathcal{E}_u)_i$ važi $\mathcal{E}_{iu} = \mathcal{E}_{ui}$, i ova familija je zatvorena za proizvoljne unije i preseke. Za mere, i skupovne funkcije uopšte (vidi [Pa95]), od interesa je izdvojiti neke posebne tipove familija skupova.

Definicija 3.6 *Neka $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.*

(a) *Za familiju $\mathcal{E}$ kažemo da je* ***π-sistem*** *ako je zatvorena za konačne preseke.*

(b) *Za familiju $\mathcal{E}$ kažemo da je* ***utemeljena*** *(eng.* ***paving****) ako $\emptyset \in \mathcal{E}$ i $\mathcal{E}$ je zatvorena za sve konačne preseke i unije.*

Definicija 3.7 *Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je* ***τ-algebra*** *ukoliko $\emptyset \in \mathcal{A}$ i važi*

(a) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$,

(b) $A_j \in \mathcal{A},\ j \in J \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}$.

Elemente skupa $\mathcal{A}$ nazivamo ***$\mathcal{A}$-merljivim podskupovima*** *skupa Ω, a za uređeni par $(\Omega, \mathcal{A})$ kažemo da je* ***τ-merljiv prostor****. Ukoliko je μ idempotentna mera na Ω, tada je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$* ***idempotentan prostor s merom****. Ukoliko je Π idempotentna verovatnoća na τ-merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, tada je $(\Omega, \mathcal{A}, \Pi)$* ***idempotentni prostor verovatnoće****.*

Idempotentni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ će skraćeno biti označavan sa (Ω, μ). Iz definicije naravno sledi da je τ-algebra zatvorena i za proizvoljne preseke.

Definicija 3.8 *Familija skupova $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je* ***atomarna*** *ukoliko postoji neka podfamilija $\mathcal{E}' = \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ familije $\mathcal{E}$ za koju važi*

(a) $\emptyset \notin \mathcal{E}'$,

(b) $\forall \alpha, \alpha' \in J,\ A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset \vee A_\alpha = A_{\alpha'}$,

(c) $F \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad F = \bigcup_{\alpha:\, \substack{A_\alpha \subseteq F \\ A_\alpha \in \mathcal{E}'}} A_\alpha$.

Elemente od $\mathcal{E}'$ nazivamo ***atomima****.*

Sa $[\omega]_{\mathcal{A}}$ će biti označen atom τ-algebre $\mathcal{A}$ koji sadrži $\omega \in \Omega$. Binarna relacija $\overset{\mathcal{A}}{\sim}$ na Ω definisana sa

$$\omega \overset{\mathcal{A}}{\sim} \omega' \quad \textit{akko} \quad \omega \textit{ i } \omega' \textit{ pripadaju istom atomu } \tau\textit{-algebre } \mathcal{A}$$

je relacija ekvivalencije, a klase ekvivalencije u odnosu na $\overset{\mathcal{A}}{\sim}$ su upravo atomi $[\omega]_{\mathcal{A}}$ familije $\mathcal{A}$. Pri tome važi da je $A \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je $A = \bigcup_{\omega \in A} [\omega]_{\mathcal{A}}$, tj. ako i samo ako je $[\omega]_{\mathcal{A}} \subseteq A$ za svako $\omega \in A$.

Teorema 3.1 *Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ koja sadrži $\emptyset$ i Ω je τ-algebra ako i samo ako je atomarna.*

<u>*Dokaz:*</u>

($\Longrightarrow$) Neka je $\mathcal{A}$ τ-algebra. Dokažimo da postoji familija atoma $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Neka je $[\omega]_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ \omega\in A}} A$, $\omega \in \Omega$, i neka je $\mathcal{A}' = \{\, [\omega]_{\mathcal{A}} \mid \omega \in \Omega\}$. Za svako $\omega \in \Omega$ važi $[\omega]_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ jer je τ-algebra zatvorena za preseke, i očigledno $\emptyset \notin \mathcal{A}'$. Za svako $F \in \mathcal{A}$ i svako $\omega \in F$ važi $[\omega]_{\mathcal{A}} \subseteq F$, te zbog $[\omega]_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ sledi da

$$F \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad F = \bigcup_{\omega\in F} [\omega]_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow \quad F = \bigcup_{\omega:[\omega]_{\mathcal{A}}\subseteq F} [\omega]_{\mathcal{A}}\,.$$

Pri tome, ako je $[\omega_1]_{\mathcal{A}} \neq [\omega_2]_{\mathcal{A}}$, tada ako $\omega_1 \notin [\omega_2]_{\mathcal{A}}$ tj. $\omega_1 \in [\omega_2]_{\mathcal{A}}^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$, zbog $[\omega_2]_{\mathcal{A}}^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ (što sledi iz $[\omega_2]_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ i osobine (a) τ algebre iz definicije 3.7) važi $[\omega_1]_{\mathcal{A}} \subseteq [\omega_2]_{\mathcal{A}}^{\mathsf{C}}$ te sledi $[\omega_1]_{\mathcal{A}} \cap [\omega_2]_{\mathcal{A}} = \emptyset$, a ako je $\omega_1 \in [\omega_2]_{\mathcal{A}}$, iz sličnih razloga je $[\omega_1]_{\mathcal{A}} \subseteq [\omega_2]_{\mathcal{A}}$, ali tada analogno važi i $\omega_2 \in [\omega_1]_{\mathcal{A}}$ (jer bi inače ponovo dobili $[\omega_1]_{\mathcal{A}} \cap [\omega_2]_{\mathcal{A}} = \emptyset$), te je i $[\omega_2]_{\mathcal{A}} \subseteq [\omega_1]_{\mathcal{A}}$, odnosno $[\omega_1]_{\mathcal{A}} = [\omega_2]_{\mathcal{A}}$.

($\Longleftarrow$) Obratno, neka je familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ atomarna, tj. postoji njena podfamilija atoma $\mathcal{A}' = \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Za svaki element $S \in \mathcal{A}$ važi $S = \bigcup_{\alpha:\, \substack{A_\alpha\subseteq S\\ A_\alpha\in\mathcal{A}'}} A_\alpha$, te zbog $\Omega \in \mathcal{A}$ tj. $\Omega = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ i osobine (b) iz definicije 3.8 sledi $S^{\mathsf{C}} = \bigcup_{\alpha:\, \substack{A_\alpha\not\subseteq S\\ A_\alpha\in\mathcal{A}'}} A_\alpha$ odnosno $S^{\mathsf{C}} = \bigcup_{\alpha:\, \substack{A_\alpha\subseteq S^{\mathsf{C}}\\ A_\alpha\in\mathcal{A}'}} A_\alpha$, te je $S^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$. S druge strane, za proizvoljnu familiju S_i, $i \in I$ elemenata od $\mathcal{A}$ važi $\forall i \in I$, $S_i = \bigcup_{\alpha:\, \substack{A_\alpha\subseteq S_i\\ A_\alpha\in\mathcal{A}'}} A_\alpha$, te za skup $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ takođe važi $S = \bigcup_{\alpha:\, \substack{A_\alpha\subseteq S\\ A_\alpha\in\mathcal{A}'}} A_\alpha$, odnosno $S \in \mathcal{A}$.

$\square$

Najmanja τ-algebra koja sadrži familiju skupova $\mathcal{E}$, tj. τ-algebra generisana sa $\mathcal{E}$ je jednoznačno određena, i biće označavana sa $\tau(\mathcal{E})$.

Definicija 3.9 *τ-algebra $\mathcal{A}$ je* ***kompletna u odnosu na idempotentnu meru*** *μ* ***na*** *Ω (skraćeno μ-**kompletna**) ako za svako $\omega \in \Omega$ važi da ako je $\mu(\omega) = 0$, tada je $\{\omega\}$ atom familije $\mathcal{A}$.*

***Kompletiranje** τ**-algebre** $\mathcal{A}$ **u odnosu na idempotentnu meru** μ je τ-algebra $\mathcal{A}^\mu$ koja kao skup atoma ima sve jednočlane skupove $\{\omega\}$ mere 0 iz $\mathcal{A}$ i sve atome τ-algebre $\mathcal{A}$ koji nisu mere 0.*

Kompletiranje τ-algebre $\mathcal{A}$ je najmanja kompletna τ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}$.

Napomena 3.1 *Ako je od interesa posmatrati samo vrednosti idempotentne mere μ na elementima τ-algebre $\mathcal{A}$, tada će ta skupovna funkcija biti označena sa $\mu_{\mathcal{A}}$, ili će biti eksplicitno naglašeno da je μ idempotentna mera na $(\Omega, \mathcal{A})$ (dakle $\mu_{\mathcal{A}}(A) = \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$). Nekada je idempotentna mera μ zadana samo na elementima τ-algebre $\mathcal{A}$, i dokazano je da se tada ona može proširiti na ceo skup $\mathcal{P}(\Omega)$, pri čemu to proširenje ne mora biti jedinstveno.*

3.2 Merljive funkcije

Neka su Ω i Ω' proizvoljni skupovi, a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ familije podskupova koje sadrže $\emptyset$.

Za funkciju $f : \Omega \to \Omega'$ se definiše $f^{-1}(\mathcal{E}') = \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{E}' \right\}$.

Ako je $\mathcal{E}'$ τ-algebra, tada je i $f^{-1}(\mathcal{E}')$ takođe τ-algebra. Ako je $\mathcal{G}'$ skup atoma τ-algebre $\mathcal{E}'$, tada je $\left\{ f^{-1}(\mathcal{G}') \right\}$ skup atoma τ-algebre $f^{-1}(\mathcal{E}')$.

Definicija 3.10 *Funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ je $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$-**merljiva** ako je $f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{E}$. Funkcija definisana na idempotentnom prostoru verovatnoće se naziva **idempotentna promenljiva**, (eng. **idempotent variable**). Za $\mathcal{E}/\mathcal{P}(\Omega')$-merljivu funkciju se skraćeno kaže da je $\mathcal{E}$-**merljiva**.*

Ako su $(\Omega, \mathcal{A})$ i $(\Omega', \mathcal{A}')$ τ-merljivi prostori, funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ je $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-merljiva ako i samo ako za svaki atom $E' \in \mathcal{A}'$ važi $f^{-1}(E') \in \mathcal{A}$, tj. ako i samo ako za svaki atom $E \in \mathcal{A}$ postoji atom $E' \in \mathcal{A}'$ takav da je $f(E) \subseteq E'$. Funkcija f je $\mathcal{A}$-merljiva ako i samo ako na svakom atomu $E \in \mathcal{E}$ ima konstantnu vrednost.

Skup $A \subseteq \Omega$ je $\mathcal{A}$-merljiv (tj. $A \in \mathcal{A}$) ako i samo ako je $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}^+$ funkcija koja je $\mathcal{A}$-merljiva.

Za idempotentnu promenljivu se njen verovatnosni zakon raspodele definiše na isti način kao u uobičajenom slučaju.

Definicija 3.11 *Za idempotentnu promenljivu $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definisanu na prostoru verovatnoće (Ω, Π), **idempotentna raspodela** je idempotentna verovatnoća $\Pi_X = \Pi \circ X^{-1}$ koja je definisana na $\mathbb{R}^n$.*

Lema 3.2 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ idempotentan prostor s merom i neka je $f : \Omega \to \Omega'$ funkcija koja je $\mathcal{A}^\mu$-merljiva. Tada postoji $\mathcal{A}$-merljiva funkcija f' takva da je $f' \overset{\mu-a.e.}{=} f$ (vidi definiciju* 3.15*).*

Lema 3.3 *Neka je $(\Omega', \mathcal{A}')$ τ-merljiv prostor, i neka je $\mathcal{A}$ τ-algebra na Ω generisana funkcijom $f : \Omega \to \Omega'$ (odnosno $\mathcal{A} = \left\{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}' \right\}$). Funkcija $h : \Omega \to \Omega''$ je $\mathcal{A}$-merljiva ako i samo ako postoji neka $\mathcal{A}'$-merljiva funkcija $g : \Omega' \to \Omega''$ takva da je $h = g \circ f$.*

Naredna lema daje u opštoj formi važnu osobinu merljivih funkcija.

Lema 3.4 *Neka je $\mathcal{A}$ τ-algebra na Ω, neka su $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j \in J$ funkcije koje su $\mathcal{A}$-merljive, i neka je $F : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$. Tada je $F\left(\left\{ f_j \right\}_{j \in J}\right)(\omega) \overset{\text{def}}{=} F\left(\left\{ f_j(\omega) \right\}_{j \in J}\right)$ takođe $\mathcal{A}$-merljiva funkcija. Specijalno, $\sup\limits_{j \in J} f_j$ i $\inf\limits_{j \in J} f_j$ su merljive funkcije, a za usmeren skup Φ su merljive i funkcije $\limsup\limits_{\phi \in \Phi} f_\phi$ i $\liminf\limits_{\phi \in \Phi} f_\phi$.*

Kao posledica prethodne leme se dobija da su i zbir i proizvod merljivih funkcija merljive funkcije, i slično.

Lema 3.5 *Neka je μ idempotentna mera na Ω, i neka je $f : \Omega \to \Omega'$. Tada je i funkcija $\mu' : \mathcal{P}(\Omega') \to \overline{\mathbb{R}}^+$ definisana sa $\mu'(A') = \mu\left(f^{-1}(A')\right)$, $A' \subseteq \Omega'$ idempotentna mera.*

U narednoj definiciji je naveden idempotentni analogon funkcije raspodele.

Definicija 3.12 *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pi)$ idempotentan prostor verovatnoće, i neka je $f : \Omega \to \Omega'$ idempotentna slučajna promenljiva sa vrednostima u Ω'. Idempotentna verovatnoća $\Pi \circ f^{-1}$ se tada naziva **idempotentna raspodela funkcije** f **u odnosu na** Π, ili skraćeno **idempotentni zakon**. Ukoliko je Ω' metrički prostor i za svako $\omega' \in \Omega'$ važi $\lim\limits_{r\to\infty} \Pi(\omega \mid f(\omega) \notin B(\omega', r)) = 0$ (gde je $B(\omega', r)$ zatvorena lopta sa centrom u ω' poluprečnika r), tada se f naziva **prava idempotentna slučajna promenljiva** (eng. **a proper idempotent variable**).*

Još jedan poseban tip familije skupova u prostoru s merom ima svoju ulogu u teoriji velikih devijacija zasnovanoj na idempotentnim merama.

Definicija 3.13 *Neka je μ $\mathcal{E}$-idempotentna mera. Familija $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je **učvršćenje mere** μ (eng. **tightening collection for** μ) ukoliko je $T \cap F \in \mathcal{E}$ za sve $T \in \mathcal{T}$ i $F \in \mathcal{E}$, i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $T \in \mathcal{T}$ takvo da je $\mu\left(T^{\mathsf{C}}\right) \leq \varepsilon$. Kaže se i da je μ **mera koja je čvrsta u odnosu na** $\mathcal{T}$, ili skraćeno, $\mathcal{T}$**-čvrsta** (eng. $\mathcal{T}$-tight measure).*

Definicija 3.14 *Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$, neka je μ $\mathcal{E}$-idempotentna mera na Ω, i neka je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ učvršćenje mere μ. Neka je pri tome za $T \in \mathcal{T}$ označeno $\mathcal{E}_T = \{T \cap E \mid E \in \mathcal{E}\}$. Funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ je **Luzin**-$(\mathcal{E}, \mathcal{T})/\mathcal{E}'$**-merljiva** ukoliko je za svako $T \in \mathcal{T}$ restrikcija funkcije na skup T funkcija koja je $\mathcal{E}_T/\mathcal{E}'$-merljiva.*

Lema 3.6 *Funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ je Luzin-$(\mathcal{E}, \mathcal{T})/\mathcal{E}'$-merljiva ako i samo ako za sve $E' \in \mathcal{E}'$ i sve $T \in \mathcal{T}$ važi $f^{-1}(E') \cap T \in \mathcal{E}$.*

Napomena 3.2 *Ako je f funkcija koja je $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ merljiva, tada je ona Luzin-$(\mathcal{E}, \mathcal{T})/\mathcal{E}'$-merljiva za $\mathcal{T} = \{\Omega\}$.*

3.3 Tipovi konvergencija

Neka je (Ω, μ) idempotentan prostor s merom, i neka su f i f_ϕ, $\phi \in \Phi$ idempotentne slučajne promenljive na Ω sa vrednostima u metričkom prostoru (E, ρ). Kao i u klasičnoj teoriji, možemo govoriti o raznim vrstama konvergencija merljivih funkcija. Između tih raznih tipova konvergencije, kao i u klasičnom slučaju, postoje određene relacije.

Definicija 3.15 *Uopšteni niz funkcija f_ϕ, $\phi \in \Phi$ **konvergira** $\mu - a.e.$ **ka funkciji** f, u oznaci $f_\phi \overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow} f$, $\phi \in \Phi$ ukoliko je*

$$\mu\left(\omega \in \Omega \mid \lim_{\phi\in\Phi} f_\phi(\omega) \neq f(\omega)\right) = 0.$$

Uopšte, kaže se da elementi skupa Ω zadovoljavaju $\mu - a.e.$ neku osobinu φ ako je $\mu(\omega \in \Omega \mid \neg\varphi(\omega)) = 0$.

Definicija 3.16 *Uopšteni niz funkcija f_ϕ, $\phi \in \Phi$* ***konvergira ka funkciji*** f ***u idempotentnoj meri*** μ*, u oznaci* $f_\phi \xrightarrow{\mu} f$*, ukoliko za svako* ε *važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \mu\left(\omega \in \Omega \,|\, \rho\left(f_\phi(\omega), f(\omega)\right) > \varepsilon\right) = 0.$$

Sledeća teorema je analogon teoreme Egorov-a.

Teorema 3.2 *Za uopšteni niz funkcija $f_\phi : \Omega \to E$, $\phi \in \Phi$ važi: $f_\phi \xrightarrow{\mu} f$ ako i samo ako za sve $\varepsilon > 0$ postoji skup $A_\varepsilon \subseteq \Omega$ takav da je $\mu\left(A_\varepsilon^{\complement}\right) < 0$ i $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\omega\in A_\varepsilon} \rho\left(f_\phi(\omega), f(\omega)\right) = 0$.*

Granične vrednosti obe vrste su $\mu - a.e.$ jednoznačno određene.

Teorema 3.3 *Ako $f_\phi \xrightarrow{\mu} f$, tada $f_\phi \xrightarrow{\mu-a.e.} f$.*

Teorema 3.4 *Ako $f_\phi \xrightarrow{\mu-a.e.} f$, tada postoji uopšteni niz funkcija h_ψ, $\psi \in \Psi$ za koju važi $h_\psi \xrightarrow{\mu} f$ i takav da je $h_\psi(\omega)$, $\psi \in \Psi$ podniz niza $f_\phi(\omega)$, $\phi \in \Phi$ za svako $\omega \in \Omega$.*

Ako je f_n, $n \in \mathbb{N}$ niz funkcija takav da $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$, tada za svako $\omega \in \Omega$ postoji niz prirodnih brojeva $k_{n,\omega}$ takav da je $k_{n,\omega} \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ i $f_{k_{n,\omega}} \xrightarrow{\mu} f$.

U opštem slučaju, iz konvergencije $\mu - a.e.$ ne sledi konvergencija u meri μ.

3.4 Idempotentna integracija

Neka je (Ω, μ) idempotentan prostor s merom takav da je $\mu(\Omega) < \infty$, i neka je po definiciji $\infty \cdot 0 \overset{\text{def}}{=} 0$.

Definicija 3.17 *Za funkciju $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$,* ***idempotentni integral funkcije*** f ***u odnosu na meru*** μ *je*

$$\bigvee_{\Omega} f d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup_{a\in\overline{\mathbb{R}}^+} \left\{a \cdot \mu(\omega \,|\, f(\omega) \geq a)\right\}.$$

Idempotentni integral funkcije f nad skupom $A \subseteq \Omega$ se definiše kao

$$\bigvee_{A} f d\mu \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{\Omega} f \cdot \chi_A d\mu.$$

Za idempotentni integral se ponekad koristi i oznaka $\bigvee\limits_{A} f(\omega) d\mu(\omega)$. U slučaju kada je μ idempotentna verovatnoća, tada se idempotentni integral naziva još i ***idempotentnim očekivanjem*** (eng. ***idempotent expectation***), i u tom slučaju se još $\bigvee\limits_{\Omega} f d\mu$ označava i sa $S(f)$, ili $S(f(\omega))$, ili $S_\Pi(f)$.

Lema 3.7 *Za* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ *važi*

$$\bigvee_{\Omega} f d\mu = \sup_{a \in \overline{\mathbb{R}}^{+}} \{a \cdot \mu(\omega \mid f(\omega) = a)\} =$$

$$= \sup_{\omega \in \Omega} \{f(\omega) \cdot \mu(\{\omega\})\} = \sup_{\omega \in \Omega} \left\{ f(\omega) \cdot \mu\left([\omega]_{f^{-1}\left(\mathcal{P}\left(\overline{\mathbb{R}}^{+}\right)\right)} \right) \right\}.$$

Napomena 3.3 *Na osnovu prethodne leme je jasno da za svaki skup* $A \subseteq \Omega$ *važi*

$$\mu(A) = \bigvee_{\Omega} \chi_A d\mu = \bigvee_{A} d\mu.$$

Napomena 3.4 *Ukoliko je* μ *definisana na* τ*-algebri* $\mathcal{A}$*, tada vrednost idempotentnog integrala zavisi od toga koje se proširenje funkcije* μ *posmatra na* $\mathcal{P}(\Omega)$ *(vidi napomenu* 3.1*), ali ako je funkcija* f $\mathcal{A}$*-merljiva, tada je vrednost integrala jednoznačno određena.*

Nadalje će skupovi kao što su npr. $\{\omega \mid f(\omega) = a\}$, $\{\omega \mid f(\omega) < g(\omega)\}$ i slično, skraćeno biti označavani sa $\{f = a\}$, $\{f < g\}$ itd. Za proizvoljnu familiju funkcija $f_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$, $j \in J$ su funkcije $\sup\limits_{j \in J} f_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ i $\inf\limits_{j \in J} f_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ definisane sa

$$\left(\sup_{j \in J} f_j\right)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in J} f_j(\omega), \qquad \left(\inf_{j \in J} f_j\right)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{j \in J} f_j(\omega).$$

Sledeće osobine idempotentnog integrala slede iz leme 3.7 (a analogne osobine važe i za funkcije sa vrednostima u skupu $\overline{\mathbb{R}}^{+}$).

Teorema 3.5 *Za funkcije* $f : \Omega \to \mathbb{R}^{+}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^{+}$, $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^{+}$, $j \in J$*, i za* $c \in \mathbb{R}^{+}$ *važe sledeće osobine*

(a) $\bigvee\limits_{\Omega} 0 d\mu = 0$,

(b) $f \le g \quad \Rightarrow \quad \bigvee\limits_{\Omega} f d\mu \le \bigvee\limits_{\Omega} g d\mu$,

(c) $\bigvee\limits_{\Omega} (cf) d\mu = c \bigvee\limits_{\Omega} f d\mu$,

(d) $\bigvee\limits_{\Omega} (f \vee g) d\mu = \bigvee\limits_{\Omega} f d\mu \vee \bigvee\limits_{\Omega} g d\mu$,

(e) $\bigvee\limits_{\Omega} (f + g) d\mu \le \bigvee\limits_{\Omega} f d\mu + \bigvee\limits_{\Omega} g d\mu$,

(f) $\left| \bigvee\limits_{\Omega} f d\mu - \bigvee\limits_{\Omega} g d\mu \right| \le \bigvee\limits_{\Omega} |f - g| d\mu$*, ukoliko je vrednost na levoj strani znaka nejednakosti dobro definisana,*

(g) $\bigvee\limits_{\Omega} \sup\limits_{j \in J} f_j d\mu = \sup\limits_{j \in J} \bigvee\limits_{\Omega} f_j d\mu$.

Sledeća nejednakost ima onu ulogu i važnost koju ima nejednakost Chebyshev-a u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Lema 3.8 *Za funkciju $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ važi*

$$\mu(f\geq a)\leq\frac{1}{a}\bigvee_{\Omega} f\cdot\chi_{\{f\geq a\}}d\mu,\quad \textit{za svako } a>0.$$

Takođe važi i sledeći analogon klasične teorije mera.

Teorema 3.6 *Neka μ idempotentna mera na skupu Ω, i neka je $\mu'=\mu\circ f^{-1}$ idempotentna mera na skupu Ω' za neku funkciju $f:\Omega\to\Omega'$. Tada za funkciju $g:\Omega'\to\mathbb{R}^+$ važi*

$$\bigvee_{\Omega'} g d\mu' = \bigvee_{\Omega} g\circ f d\mu.$$

Funkcije merljive u odnosu na idempotentnu meru imaju i svoju „L^p strukturu”.

Definicija 3.18 *Za funkciju $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ i $p>0$ se definiše*

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\bigvee_{\Omega} f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{\omega:\mu(\{\omega\})>0} f(\omega).$$

Teorema 3.7 *Neka je $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ i $g:\Omega\to\mathbb{R}^+$.*

(a) Ako su $p,q\in[1,\infty]$ takvi da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tada je

$$\|fg\|_1=\bigvee_{\Omega} fg d\mu\leq\|f\|_p\|g\|_q.$$

(b) Ako je $\mu(\Omega)=1$, tada za $0<p<q$ važi

$$\|f\|_p\leq\|g\|_q.$$

Definicija 3.19

(a) *Funkcija $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ je μ-**maksimibilna** (skraćeno **maksimibilna**, ako se podrazumeva o kojoj idempotentnoj meri μ se radi) ukoliko je*

$$\bigvee_{\Omega} f d\mu<\infty \qquad i \qquad \lim_{\alpha\to\infty}\bigvee_{\Omega} f\cdot\chi_{\{f>\alpha\}}d\mu=0.$$

(b) *Familija funkcija $f_j:\Omega\to\mathbb{R}^+$, $j\in J$ je μ-**uniformno maksimibilna** (skraćeno **uniformno maksimibilna**) ukoliko je*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{j\in J}\bigvee_{\Omega} f_j\cdot\chi_{\{f_j>\alpha\}}d\mu=0.$$

(c) *Uopšteni niz funkcija* $f_\phi : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi$ *je* μ-***uniformno maksimibilan*** *(skraćeno* ***uniformno maksimibilan****) ukoliko je*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \limsup_{\phi\in\Phi} \bigvee_{\Omega} f_\phi \cdot \chi_{\{f_\phi>\alpha\}}\, d\mu = 0.$$

Teorema 3.8 *Navedeni pojmovi maksimibilnosti se mogu izraziti na sledeće ekvivalentne načine:*

(a) *Funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ *je maksimibilna ako i samo ako postoji monotono neopadajuća funkcija* $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *za koju važi da je* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \infty$ *i* $\bigvee\limits_{\Omega} F \circ f d\mu < \infty$.

(b) *Familija funkcija* $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $j \in J$ *je uniformno maksimibilna ako i samo ako je* $\sup\limits_{j\in J} \bigvee\limits_{\Omega} f_j d\mu < \infty$ *i za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takvo da za svaki skup* A *sa osobinom* $\mu(A) < \delta$ *važi* $\sup\limits_{j\in J} \bigvee\limits_{A} f_j d\mu < \varepsilon$.

(c) *Familija funkcija* $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $j \in J$ *je uniformno maksimibilna ako i samo ako je* $\sup\limits_{j\in J} f_j$ *maksimibilna funkcija.*

(d) *Familija funkcija* $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $j \in J$ *je uniformno maksimibilna ako i samo ako postoji monotono neopadajuća funkcija* $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *za koju važi da je* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = \infty$ *i* $\sup\limits_{j\in J} \bigvee\limits_{\Omega} F \circ f_j d\mu < \infty$.

(e) *Za maksimibilnu funkciju* $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ *je skupovna funkcija* $A \mapsto \bigvee\limits_{\Omega} f \cdot \chi_A d\mu$, $A \subseteq \Omega$ *uniformno neprekidna u odnosu na* μ*, tj. za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takvo da za svaki skup* A *sa osobinom* $\mu(A) < \delta$ *važi* $\bigvee\limits_{\Omega} f \cdot \chi_A d\mu < \varepsilon$.

(f) *Uopšteni niz funkcija* $f_\phi : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi$ *je uniformno maksimibilan ako i samo ako je*

* $\limsup\limits_{\phi\in\Phi} \bigvee\limits_{\Omega} f_\phi d\mu < \infty$, *i*
* *za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takvo da za svaki uopšteni niz skupova* A_ϕ, $\phi \in \Phi$ *sa osobinom* $\limsup\limits_{\phi\in\Phi} \mu(A_\phi) < \delta$ *važi* $\limsup\limits_{\phi\in\Phi} \bigvee\limits_{A_\phi} f_\phi d\mu < \varepsilon$.

Tvrđenja iz sledeće teoreme su analogoni redom leme Fatou-a, Lebesgue-ove teoreme monotone konvergencije i Lebesgue-ove teoreme dominantne konvergencije.

Teorema 3.9 *Neka je* $f_\phi : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi$ *uopšteni niz funkcija, i neka je* $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$.

(1) *Ako je* $\liminf_{\phi\in\Phi} f_\phi \overset{\mu-a.e.}{\geq} f$*, tada je*

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \bigvee_\Omega f_\phi d\mu \geq \bigvee_\Omega f d\mu.$$

(2) *Ako je* $f_\phi \overset{\mu-a.e.}{\uparrow} f$*, tada je*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \bigvee_\Omega f_\phi d\mu = \bigvee_\Omega f d\mu.$$

(3) *Ako je* f_ϕ*,* $\phi\in\Phi$ *uniformno maksimibilan uopšteni niz i* $f_\phi \xrightarrow{\mu} f$*, tada je*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \bigvee_\Omega f_\phi d\mu = \bigvee_\Omega f d\mu.$$

(4) *Neka je* μ $\mathcal{E}$*-idempotentna mera za neku familiju* $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$*, neka je familija skupova* $\mathcal{T}$ *učvršćenje mere* μ*, i neka je* $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ *familija skupova koja se sastoji od* $\emptyset$ *i intervala oblika* $[a,\infty)$*,* $a\in\mathbb{R}^+$*. Neka je* f_ϕ*,* $\phi\in\Phi$ *uopšteni niz Luzin-*$(\mathcal{E},\mathcal{T})/\mathcal{U}$*-merljivih, maksimibilnih funkcija. Ako* $f_\phi \overset{\mu-a.e.}{\downarrow} f$*, tada je*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \bigvee_\Omega f_\phi d\mu = \bigvee_\Omega f d\mu.$$

Teorema 3.10 *Neka je* $f_\phi:\Omega\to\mathbb{R}^+$*,* $\phi\in\Phi$ *uopšteni niz funkcija, i neka je* $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$*.*

(1) *Ako je* $\lim_{\phi\in\Phi} \bigvee_\Omega |f-f_\phi|\,d\mu = 0$*, tada je* $f_\phi \xrightarrow{\mu} f$*.*

(2) *Ako je uopšteni niz funkcija* f_ϕ*,* $\phi\in\Phi$ *uniformno maksimibilan i* $f_\phi \xrightarrow{\mu} f$*, tada je* $\lim_{\phi\in\Phi} \bigvee_\Omega |f-f_\phi|\,d\mu = 0$*.*

3.5 Nezavisnost i uslovna idempotentna verovatnoća

Neka je (Ω,Π) idempotentan prostor verovatnoće. Skraćeno će $\Pi(\{\omega\})$ biti označavano sa $\Pi(\omega)$. Pojmovi zavisnosti i nezavisnosti u odnosu na idempotentnu verovatnoću se definišu na nešto drugačiji način nego u klasičnom slučaju.

Definicija 3.20 *Konačna familija* A_i*,* $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ *podskupova skupa* Ω *je* ***nezavisna*** *ukoliko je*

$$\Pi\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \Pi(A_i).$$

Proizvoljna familija A_α*,* $\alpha\in J_1$ *podskupova skupa* Ω *je* ***nezavisna*** *ukoliko je nezavisna svaka njena konačna podfamilija.*

Familije $\mathcal{E}_\alpha$*,* $\alpha\in J$ *podskupova skupa* Ω *su* ***uzajamno nezavisne*** *ukoliko je nezavisna svaka familija* $\{A_\alpha \mid A_\alpha\in\mathcal{E}_\alpha, \alpha\in J\}$*.*

Familije $\mathcal{E}_\beta$, $\beta \in J$ podskupova skupa Ω su uzajamno nezavisne ako samo ako su familije $\left(\mathcal{E}_\beta\right)_u$, $\beta \in J$ nezavisne.

Definicija 3.21 *Neka je $\mathcal{A}'$ τ-algebra na skupu Ω'. Za familiju idempotentnih slučajnih promenljivih $f_\alpha : \Omega \to \Omega'$, $\alpha \in J$ kaže se da je $\mathcal{A}'$-**nezavisna** (u slučaju $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$ - skraćeno - **nezavisna**) ukoliko su nezavisne familije τ-algebri $f_\alpha{}^{-1}(\mathcal{A}')$.*

*Idempotentna slučajna promenljiva $f : \Omega \to \Omega'$ i familija $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ su $\mathcal{A}'$-**nezavisni** (u slučaju $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$ - skraćeno - **nezavisni**) ukoliko su nezavisne familije skupova $f^{-1}(\mathcal{A}')$ i $\mathcal{E}$.*

Lema 3.9 *Za nezavisne funkcije $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ i $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ važi $S(fg) = S(f)S(g)$.*

Neka je nadalje $\mathcal{A}$ τ-algebra na Ω, neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ π-sistem koji sadrži $\emptyset$, i neka je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ familija skupova takva da za sve $T \in \mathcal{T}$ i $F \in \mathcal{E}$ važi $T \cap F \in \mathcal{E}$.

Definicija 3.22 ***Uslovna idempotentna verovatnoća** od $\omega' \in \Omega$ u odnosu na $\mathcal{A}$ (eng. **conditional idempotent probability**) je funkcija $\Pi(\omega' \mid \mathcal{A}) : \Omega \to [0,1]$ definisana sa*

$$\Pi\left(\omega' \mid \mathcal{A}\right)(\omega) = \begin{cases} \frac{\Pi(\omega')}{\Pi([\omega]_\mathcal{A})} \cdot I_{\left\{\omega' \overset{\mathcal{A}}{\sim} \omega\right\}} & , \quad \Pi([\omega]_\mathcal{A}) > 0 \\ \tilde{\Pi}(\omega') & , \quad \Pi([\omega]_\mathcal{A}) = 0 \end{cases} .$$

gde je $\tilde{\Pi}$ neka idempotentna verovatnoća na Ω, i $I_{\left\{\omega' \overset{\mathcal{A}}{\sim} \omega\right\}} = 1$ kada je $\omega' \overset{\mathcal{A}}{\sim} \omega$, a inače je $I_{\left\{\omega' \overset{\mathcal{A}}{\sim} \omega\right\}} = 0$.

Za $B \subseteq \Omega$ se definiše $\Pi(\omega' \mid B) = \Pi(\omega' \mid \mathcal{A}_B)(\omega)$, gde je $\mathcal{A}_B$ neka τ-algebra za koju je B njen atom (definicija ne zavisi od izbora te τ-algebre), i $\omega \in B$ (definicija takođe ne zavisi od izbora $\omega \in B$).

*Za skup $A \subseteq \Omega$, **uslovna idempotentna verovatnoća** od A u odnosu na $\mathcal{A}$ je funkcija $\Pi(A \mid \mathcal{A}) : \Omega \to [0,1]$ definisana sa*

$$\Pi(A \mid \mathcal{A})(\omega) = \sup_{\omega' \in A} \Pi(\omega' \mid \mathcal{A})(\omega).$$

Za $A \subseteq \Omega$ i $B \subseteq \Omega$ se definiše

$$\Pi(A \mid B) = \sup_{\omega' \in A} \Pi(\omega' \mid \mathcal{A}_B)(\omega),$$

gde je $\mathcal{A}_B$ neka τ-algebra za koju je B njen atom i $\omega \in B$ (definicija ne zavisi od izbora τ-algebre $\mathcal{A}_B$ i $\omega \in B$).

*Ukoliko je Π $\mathcal{E}$-idempotentna verovatnoća, tada se **uslovna $\mathcal{E}$-idempotentna verovatnoća** definiše na isti način, s tim da se i za $\tilde{\Pi}$ zahteva da bude $\mathcal{E}$-idempotentna verovatnoća na Ω, a ako je Π još i $\mathcal{T}$-čvrsta, tada se u definiciji i za $\tilde{\Pi}$ zahteva da bude $\mathcal{T}$-čvrsta.*

Ako je $\mathcal{A}'$ τ-algebra na Ω' i $f : \Omega \to \Omega'$, definiše se

$$\Pi(A \mid f) = \Pi\left(A \mid f^{-1}(\mathcal{A}')\right).$$

Napomena 3.5 *Uslovna idempotentna verovatnoća $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)$ je $\Pi - a.e.$ jednoznačno definisana, i pri tome je*

$$\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega) \overset{\Pi-a.e.}{=} \frac{\Pi(A\cap[\omega]_{\mathcal{A}})}{\Pi([\omega]_{\mathcal{A}})}, \quad A\subseteq\Omega$$

(tačnije, za skup $N = \{\omega\in\Omega \mid \Pi([\omega]_{\mathcal{A}}) = 0\}$ važi $N\in\mathcal{A}$, $\Pi(N) = 0$ i pri tome je $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega) = \dfrac{\Pi(A\cap[\omega]_{\mathcal{A}})}{\Pi([\omega]_{\mathcal{A}})}$, $A\subseteq\Omega$, $\omega\in N^{\complement}$).

Takođe, za $B\subseteq\Omega$ za koje je $\Pi(B) > 0$ važi

$$\Pi(A\,|\,B) = \frac{\Pi(A\cap B)}{\Pi(B)}.$$

Teorema 3.11 *Za funkciju $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)$, $A\subseteq\Omega$, $\omega\in\Omega$ važi:*

(1) *za svako $A\subseteq\Omega$ je $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)$ funkcija koja je $\mathcal{A}$-merljiva po $\omega\in\Omega$,*

(2) *za svako $\omega\in\Omega$ je $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)$ idempotentna verovatnoća po $A\subseteq\Omega$,*

(3) *za svako $A,B\in\mathcal{P}(\Omega)$ je*

$$\Pi(A\cap B) = S\left(\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)\cdot\mathcal{K}_{\{\omega\in B\}}\right),$$

(4) *Za $\mathcal{E}$-idempotentnu verovatnoću Π važi:*

- ako je $[\omega]_{\mathcal{A}}\in\mathcal{E}$, tada je $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)$, $A\subseteq\Omega$ takođe $\mathcal{E}$-idempotentna verovatnoća,

- ako je $B\in\mathcal{E}$, tada je $\Pi(A\,|\,B)$, $A\subseteq\Omega$ takođe $\mathcal{E}$-idempotentna verovatnoća,

(5) *Za $\mathcal{T}$-čvrstu idempotentnu verovatnoću Π je takođe i $\Pi(A\,|\,\mathcal{A})(\omega)$, $A\subseteq\Omega$ $\mathcal{T}$-čvrsta za svako $\omega\in\Omega$, i takođe je $\Pi(A\,|\,B)$, $A\subseteq\Omega$ $\mathcal{T}$-čvrsta za sve $B\subseteq\Omega$.*

3.6 Idempotentne mere na topološkim prostorima

Neka je E Hausdorff-ov topološki prostor, neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih podskupova od E, i neka je $\mathcal{K}$ familija kompaktnih podskupova od E. Neka je μ konačna idempotentna mera na E. Razmatraće se mere μ koje su τ-glatke u odnosu na $\mathcal{F}$ ili $\mathcal{K}$. Neka je dalje

$C_b^+(E) = \{f \mid f: E\to\mathbb{R}^+,\ f$ je ograničena i neprekidna$\}$,

$\overline{C}_b^+(E) = \{f \mid f: E\to\mathbb{R}^+,\ f$ je ograničena i odozgo poluneprekidna$\}$,

$\underline{C}_b^+(E) = \{f \mid f: E\to\mathbb{R}^+,\ f$ je ograničena i odozdo poluneprekidna$\}$,

$$C_{\mathcal{K}}^+(E) = \left\{ f \mid f: E\to\mathbb{R}^+, \begin{array}{l} f \text{ je ograničena, neprekidna, sa} \\ \text{kompaktnim nosačem} \end{array} \right\}.$$

Navedene klase funkcija će imati svoju ulogu u teoriji velikih devijacija sa idempotentnim merama (vidi teoremu Portmanteau-a).

Definicija 3.23 *Idempotentna mera μ na E je* ***čvrsta*** *(eng.* ***tight****) ukoliko je familija $\mathcal{K}$ učvršćenje mere μ, tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subseteq E$ takav da je $\mu\left(K^{\mathrm{c}}\right) \leq \varepsilon$.*

Pošto je E Hausdorff-ov prostor, svaka $\mathcal{F}$-idempotentna mera je i $\mathcal{K}$-idempotentna mera. Takođe, svaka čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna mera je i čvrsta $\mathcal{K}$-idempotentna mera i obratno. Stoga će nadalje čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna mera biti nazivana čvrstom τ-glatkom idempotentnom merom.

Nadalje će biti korišćena oznaka

$$K_\mu(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \mu(x) \geq \alpha\}, \ \ \alpha > 0.$$

Definicija 3.24 *Funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$ na E je* ***od gore kompaktna*** *(eng.* ***upper compact****) ukoliko je $K_\mu(\alpha)$ kompaktan skup za svako $\alpha > 0$.*

Pošto je E Hausdorff-ov prostor, svaka od gore kompaktna funkcija je ujedno i od gore poluneprekidna. Od gore kompaktna funkcija dostiže svoj supremum na zatvorenom skupu.

Nadalje će, kratkoće radi, sa μ biti označavana skupovna funkcija (odnosno idempotentna mera) $\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$, a sa $\mu(x)$, $x \in E$ njoj odgovarajuća gustina, tj. funkcija $\mu(x) : E \to \mathbb{R}^+$ definisana sa $\mu(x) = \mu(\{x\})$. Kao što je već ranije navedeno, za idempotentnu meru μ važi $\mu(A) = \sup\limits_{x \in A} \mu(x)$, $A \subseteq E$.

Lema 3.10 *Neka je $\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ skupovna funkcija, neka je $\mu(x) : E \to \mathbb{R}^+$ definisana sa $\mu(x) = \mu(\{x\})$, i neka je $\mu(A) = \sup\limits_{x \in A} \mu(x)$, $A \subseteq E$. Tada važe sledeća tvrđenja.*

(a) *Ako je μ $\mathcal{F}$-idempotentna mera na E, tada je funkcija $\mu(x)$ od gore poluneprekidna.*

(b) *Ako je $\mu(x)$ od gore poluneprekidna funkcija, tada je μ $\mathcal{K}$-idempotentna mera na skupu E.*

(c) *Skupovna funkcija μ je čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna mera na E ako i samo ako je funkcija $\mu(x)$ od gore kompaktna.*

Iz prethodne leme sledi da, ako je μ čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna mera, tada je familija skupova $K_\mu(\alpha)$, $\alpha > 0$ učvršćenje mere μ.

Teorema 3.12 *Neka je μ $\mathcal{F}$-idempotentna mera na E, i neka $f_j : E \to \mathbb{R}^+$, $j \in J$ familija ograničenih, od gore poluneprekidnih funkcija zatvorenih u odnosu na minimume i infimume. Tada je*

$$\inf_{j \in J} \bigvee_E f_j d\mu = \bigvee_E \inf_{j \in J} f_j d\mu.$$

Prethodno navedena teorema ima bitnu ulogu u nekim delovima dokaza teoreme Portmanteau-a.

Teorema 3.13 *Ako je prostor E lokalno kompaktan, ili ako je homeomorfan sa nekim kompletnim metričkim prostorom, tada je svaka $\mathcal{F}$-idempotentna mera μ na E čvrsta.*

Neka je sada i E' Hausdorff-ov topološki prostor, i neka je $\mathcal{F}'$ familija svih zatvorenih potskupova skupa E'.

Definicija 3.25 *Neka je μ $\mathcal{F}$-idempotentna mera na E. Funkcija $f : E \to E'$ je μ-**Luzin-merljiva** (skraćeno, **Luzin-merljiva**, ako se podrazumeva o kojoj meri se radi) ako su sve njene restrikcije na skupove $K_\mu(\alpha)$, $\alpha > 0$ neprekidne funkcije.*

Navedena definicija je zapravo specijalan slučaj definicije 3.14, tj. funkcija f je μ-Luzin-merljiva u smislu definicije 3.25 ako i samo ako je Luzin-$(\mathcal{F}, \mathcal{K}_\mu)/\mathcal{F}'$-merljiva u smislu definicije 3.14, gde je $\mathcal{K}_\mu = \left\{ K_\mu(\alpha) \;\middle|\; \alpha > 0 \right\}$. Luzin-merljive funkcije očuvavaju svojstva čvrstine i τ-glatkosti idempotentne mere u odnosu na familiju svih zatvorenih skupova, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 3.14 *Ako je μ čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna mera na E, i ako je $f : E \to E'$ funkcija koja je μ-Luzin-merljiva, tada je $\mu' = \mu \circ f^{-1}$ čvrsta $\mathcal{F}'$-idempotentna mera na E'.*

Čvrste $\mathcal{F}$-idempotentne mere imaju značajnu ulogu u teoriji velikih devijacija.

Definicija 3.26 *Čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna verovatnoća Π je **devijabilnost** (eng. **deviability**). Idempotentna raspodela Π_X idempotentne slučajne promenljive $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se naziva **devijabilna idempotentna raspodela***

S obzirom na teoremu 3.13, u lokalno kompaktnim prostorima, kao i u kompletnim metričkim prostorima, svaka $\mathcal{F}$-idempotentna verovatnoća je devijabilnost.

Teorema 3.15 *Idempotentna verovatnoća Π je devijabilnost ako i samo ako je gustina $\Pi(x)$ od gore kompaktna funkcija i $\sup\limits_{x\in E} \Pi(x) = 1$.*

Pošto od gore kompaktna funkcija dostiže svoj supremum na zatvorenom skupu, za devijabilnost Π postoji $x_0 \in E$ takvo da je $\Pi(x_0) = 1$.

Napomena 3.6 *Može se zapaziti da je idempotentna verovatnoća Π devijabilnost ako i samo ako je funkcija $I(x) = -\ln \Pi(x)$, $x \in E$ tzv. **čvrsta verovatnosna funkcija stope**, tj. takva da je $\inf\limits_{x\in E} I(x) = 0$ i za svako $\alpha \in \mathbb{R}^+$ su skupovi $\{ x \in E \mid I(x) \le \alpha \}$ kompaktni.*

Sledeće teoreme su analogoni Riesz-ove teoreme reprezentacije.

Teorema 3.16 *Neka je E lokalno kompaktan Hausdorff-ov topološki prostor, i neka je $V : C^+_{\mathcal{K}}(E) \to \mathbb{R}^+$ funkcionela koja ime osobine da za sve $f, g \in C^+_{\mathcal{K}}(E)$ i svako $c \in \mathbb{R}^+$ važi*

(V1) $V(cf) = cV(f)$,

(V2) $V(f \vee g) = V(f) \vee V(g)$.

Tada postoji jedinstvena $\mathcal{K}$-idempotentna mera $\mu : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ takva da je

$$\forall f \in C^+_{\mathcal{K}}(E), \quad V(f) = \bigvee_E f d\mu.$$

Teorema 3.17 *Neka je E kompaktan Hausdorff-ov prostor. Neka je $\mathcal{H}$ familja nekih neprekidnih funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$ takva da $0 \in \mathcal{H}$, za sve $c \geq 0$ i $f \in \mathcal{H}$ je $cf \in \mathcal{H}$ i $(f-1) \vee 0 \in \mathcal{H}$, i familija $\mathcal{H}$ je zatvorena za minimume i maksimume proizvoljnog broja elemenata (proizvoljne familije elemenata) iz $\mathcal{H}$. Neka je $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ skup svih kompaktnih skupova oblika $\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \geq 0$, $f \in H$. Ako je $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+$ funkcionela sa osobinama* (V1) *i* (V2) *iz teoreme* 3.16, *tada postoji $(\mathcal{K}_{\mathcal{H}})_i$-idempotentna mera μ na E takva da je*

$$V(f) = \bigvee_E f d\mu, \quad f \in \mathcal{H},$$

i mera μ je jednoznačno određena na skupu $(\mathcal{K}_{\mathcal{H}})_{iu}$.
Ako pri tome $\mathcal{H}$ sadrži sve konstantne funkcije i važi

(V0) $V(1) = 1$,

tada je $(\mathcal{K}_{\mathcal{H}})_i$-idempotentna verovatnoća.

Supremum norma funkcije $f : E \to \mathbb{R}^+$, u oznaci $\|f\|$, definiše se na sledeći način:

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in E} f(x).$$

Teorema 3.18 *Neka je E prostor Tikhonov-a. Neka je $V : C^+_b(E) \to \mathbb{R}^+$ funkcionela sa osobinama* (V1) *i* (V2) *iz teoreme* 3.16 *koja je još i* čvrsta, *tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subseteq E$ takav da za svako $f \in C^+_b(E)$ sa osobinom $\forall x \in K$, $f(x) = 0$ važi $V(f) \leq \varepsilon \|f\|$. Tada postoji jedinstvena $\mathcal{F}$-idempotentna mera $\mu : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ takva da je*

$$V(f) = \bigvee_E f d\mu, \quad f \in C^+_b(E).$$

Ako pri tome važi (V0) *iz teoreme* 3.17, *tada je μ čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna verovatnoća.*

Teorema 3.19 *Neka su μ i μ' $\mathcal{F}$-idempotentne mere na prostoru Tikhonov-a E. Ako za sve $f \in C^+_b(E)$ važi $\bigvee_E f d\mu = \bigvee_E f d\mu'$, tada je $\mu = \mu'$ na $\mathcal{P}(E)$.*

3.7 Topološki prostori idempotentnih verovatnoća

Neka je E topološki prostor, i neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih podskupova od E. Neka je $I\mathcal{M}(E)$ skup svih $\mathcal{F}$-idempotentnih verovatnosnih mera na E.

Definicija 3.27 ***Slaba topologija na** $I\mathcal{M}(E)$ (eng. **the weak topology**) je najgrublja topologija za koju su, za svako $h \in C^+_b(E)$ neprekidna preslikavanja $\Pi \mapsto \bigvee_E h d\Pi$.*
Konvergencija u slaboj topologiji će biti označena sa $\xrightarrow{iw}$.

Napomena 3.7 *Na osnovu teoreme* 3.19*, ako je E prostor Tikhonov-a (što će nadalje biti najčešći slučaj), tada je $\mathcal{IM}(E)$ sa slabom topologijom Hausdorff-ov topološki prostor.*

Napomena 3.8 *Iz definicije sledi da se jedna baza slabe topologije sastoji od skupova oblika*

$$O_{\Pi;h_1,h_2,\ldots,h_n;\varepsilon} = \left\{ \Pi' \in \mathcal{IM}(E) \;\middle|\; \left| \bigvee_E h_i d\Pi' - \bigvee_E h_i d\Pi \right| < \varepsilon \right\}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{IM}(E)$, $h_i \in C_b^+(E)$, $\varepsilon > 0$.

Za funkciju $h : E \to \mathbb{R}^+$ definišemo njenu ***odozgo poluneprekidnu ekstenziju*** i ***odozdo poluneprekidnu ekstenziju*** redom na sledeći način:

$$\overline{h} = \inf_{\substack{f \in \overline{C}_b^+(E) \\ f \geq h}} f \qquad \text{i} \qquad \underline{h} = \sup_{\substack{f \in \underline{C}_b^+(E) \\ f \leq h}} f$$

Pomoću pojmova iz sledeće definicije se u teoremi Portmanteau-a daju karakterizacije konvergencije u smislu velikih devijacija.

Definicija 3.28 *Funkcija $h : E \to \mathbb{R}^+$ je* ***neprekidna u odnosu na idempotentnu verovatnoću*** Π *ukoliko je $\bigvee_E \overline{h} d\Pi = \bigvee_E \underline{h} d\Pi$. Funkcija $h : E \to \mathbb{R}^+$ je* ***odozgo poluneprekidna u odnosu na*** Π*, odnosno* ***odozdo poluneprekidna u odnosu na*** Π*, ukoliko je $\bigvee_E \overline{h} d\Pi = \bigvee_E h d\Pi$, odnosno $\bigvee_E \underline{h} d\Pi = \bigvee_E h d\Pi$.*

Skup $H \subseteq E$ je ***neprekidan u odnosu na*** Π *ukoliko je $\Pi\left(\overset{\circ}{H}\right) = \Pi\left(\overline{H}\right)$. Skup $H \subseteq E$ je* ***zatvoren u odnosu na*** Π*, odnosno* ***otvoren u odnosu na*** Π *, ukoliko je $\Pi(H) = \Pi\left(\overline{H}\right)$, odnosno $\Pi(H) = \Pi\left(\overset{\circ}{H}\right)$.*

Napomena 3.9 *U prostorima Tikhonov-a, skup je neprekidan, odnosno otvoren, odnosno zatvoren u odnosu na Π ukoliko je njegova karakteristična funkcija neprekidna, odnosno odozgo poluneprekidna, odnosno odozdo poluneprekidna u odnosu na Π.*

Sledeća teorema opisuje konvergenciju u slaboj topologiji, analogno kao što odgovarajuća teorema u glavi 3.9 opisuje LD konvergenciju.

Teorema 3.20 (Portmanteau) *Neka je E prostor Tikhonov-a, neka je $\Pi \in \mathcal{IM}(E)$, i neka je $\Pi_\phi \in \mathcal{IM}(E)$, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz idempotentnih verovatnoća. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(1) $\Pi_\phi \overset{iw}{\to} \Pi$,

(2) $\bigvee_E f d\Pi_\phi \to \bigvee_E f d\Pi$ *za svako* $f \in C_b^+(E)$,

(3) (a) $\liminf_{\phi \in \Phi} \bigvee_E f d\Pi_\phi \geq \bigvee_E f d\Pi$ *za svako* $f \in \underline{C}_b^+(E)$,

(b) $\limsup\limits_{\phi\in\Phi} \bigvee\limits_E f d\Pi_\phi \leq \bigvee\limits_E f d\Pi$ *za svako* $f \in \overline{C}_b^+(E)$,

(3') *nejednakosti u iskazima* (3) *važe redom za svaku odozdo poluneprekidnu u odnosu na* Π*, ograničenu funkciju* $f : E \to \mathbb{R}^+$*, odnosno za svaku odozgo poluneprekidnu u odnosu na* Π*, ograničenu funkciju* $f : E \to \mathbb{R}^+$,

(4) (a) $\liminf\limits_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi(G) \geq \Pi(G)$ *za svaki otvoren skup* $G \subseteq E$,

(b) $\limsup\limits_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi(F) \leq \Pi(F)$ *za svaki zatvoren skup* $F \subseteq E$,

(4') *nejednakosti u iskazima* (4) *važe redom za svaki otvoren u odnosu na* Π *skup* G*, odnosno za svaki zatvoren u odnosu na* Π *skup* F,

(5) $\lim\limits_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi(H) = \Pi(H)$ *za svaki neprekidan u odnosu na* Π *skup* $H \subseteq E$,

(6) $\lim\limits_{\phi\in\Phi} \bigvee\limits_E f d\Pi_\phi = \bigvee\limits_E f d\Pi$ *za svaku neprekidnu u odnosu na* Π *ograničenu funkciju* $f : E \to \mathbb{R}^+$.

Razmotrimo sada situaciju kada je (E, ρ) metrički prostor. Kao što će biti pokazano, tada je i $I\mathcal{M}(E)$ metrizibilan prostor, i postoji više interesantnih metrika koje su kompatibilne sa slabom topologijom na $I\mathcal{M}(E)$.

Neka je $B_\varepsilon(x)$ zatvorena lopta sa centrom u $x \in E$ i poluprečnika $\varepsilon > 0$, i neka je A^ε zatvorena ε-okolina skupa A (tj. $A^\varepsilon = \{x \in E \mid \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$). Za funkciju $f \in C_b^+(E)$ definišimo

$$\|f\|_{BL} \overset{\text{def}}{=} \left(\sup_{x\in E} f(x)\right) \vee \left(\sup_{x_1\neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{\rho(x_1, x_2)}\right)$$

(može se primetiti da, ako je $\|f\|_{BL} < \infty$, tada je f ograničena, Lipschitz-neprekidna funkcija).

Definicija 3.29 *Neka je funkcija* $p : I\mathcal{M}(E)^2 \to \mathbb{R}^+$ *definisana sa*

$$p(\Pi_1, \Pi_2) \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall x \in E,\ \Pi_1(x) \leq \Pi_2(B_\varepsilon(x)) + \varepsilon \wedge \Pi_2(x) \leq \Pi_1(B_\varepsilon(x)) + \varepsilon\}.$$

Funkcija p je metrika (analogon metrike Prohorov-a), i važi

$$p(\Pi_1, \Pi_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall A \subseteq E,\ \Pi_1(A) \leq \Pi_2(A^\varepsilon) + \varepsilon \wedge \Pi_2(A) \leq \Pi_1(A^\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Teorema 3.21 *Metrika* p *je kompatibilna sa slabom topologijom na* $I\mathcal{M}(E)$.

Definicija 3.30 *Neka je funkcija* $\rho_{BL} : I\mathcal{M}(E)^2 \to \mathbb{R}^+$ *definisana sa*

$$\rho_{BL}(\Pi_1, \Pi_2) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f\in C_b^+(E):\, \|f\|_{BL}\leq 1} \left| \bigvee_E f d\Pi_1 - \bigvee_E f d\Pi_2 \right|.$$

Funkcija ρ_{BL} je metrika (analogon metrike Kantorovich-Wasserstein), i važi

$$\rho_{BL}(\Pi_1, \Pi_2) \leq 2p(\Pi_1, \Pi_2).$$

Teorema 3.22 *Metrika ρ_{BL} je kompatibilna sa slabom topologijom na $I\mathcal{M}(E)$.*

Definicija 3.31 ***Neodređena topologija** (eng. **the vague topology**) na skupu svih $\mathcal{K}$-idempotentnih mera je najgrublja topologija za koju su za svako $h \in C^+_{\mathcal{K}}(E)$ neprekidna preslikavanja $\Pi \mapsto \bigvee_E hd\Pi$.*

Teorema 3.23 *Ako je E lokalno kompaktan Hausdorff-ov prostor, tada je prostor $\mathcal{K}$-idempotentnih mera sa neodređenom topologijom kompaktan.*

Definicija 3.32

(a) *Skup $\mathcal{F}$-idempotentnih verovatnoća $\mathcal{A} \subseteq I\mathcal{M}(E)$ je **čvrst** (eng. **tight**) ukoliko je $\inf_{K\in\mathcal{K}} \sup_{\Pi\in\mathcal{A}} \Pi\left(K^{\mathsf{C}}\right) = 0$.*

(b) *Uopšteni niz Π_ϕ, $\phi \in \Phi$ idempotentnih verovatnoća iz $I\mathcal{M}(E)$ je **čvrst** ukoliko je $\inf_{K\in\mathcal{K}} \limsup_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi\left(K^{\mathsf{C}}\right) = 0$.*

Teorema 3.24

(1) *Neka je E lokalno kompaktan Hausdorff-ov prostor, neka je Π $\mathcal{K}$-idempotentna verovatnoća, i neka je Π_ϕ, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz $\mathcal{K}$-idempotentnih verovatnoća na E. Tada su sledeći iskazi* (M) *i* (V) *ekvivalentni:*

(M)(M1) *za svako $x \in E$ i svaki uopšteni niz x_ϕ, $\phi \in \Phi$ sa osobinom $\lim_{\phi\in\Phi} x_\phi = x$ važi*

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi\left(x_\phi\right) \leq \Pi(x),$$

(M2) *za svako $x \in E$ postoji uopšteni niz x_ϕ, $\phi \in \Phi$ sa osobinom $\lim_{\phi\in\Phi} x_\phi = x$ za koji važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi\left(x_\phi\right) = \Pi(x),$$

(V)(V1) *za svaki kompaktan skup $K \subseteq E$ važi*

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi(K) \leq \Pi(K),$$

(V2) *za svaki otvoren skup $G \subseteq E$ važi*

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi(G) \geq \Pi(G).$$

(2) *Neka je E Hausdorff-ov prostor, neka je Π čvrsta $\mathcal{F}$-idempotentna verovatnoća, i neka je Π_ϕ, $\phi \in \Phi$ čvrst uopšteni niz $\mathcal{F}$-idempotentnih verovatnoća na E. Tada je sledeći iskaz* (N) *ekvivalentan sa svakim od iskaza* (M) *i* (V)*:*

(N) (N1) *za svaki zatvoren skup $F \subseteq E$ važi*

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi(F) \leq \Pi(F),$$

(N2) *za svaki otvoren skup $G \subseteq E$ važi*

$$\liminf_{\phi \in \Phi} \Pi_\phi(G) \geq \Pi(G).$$

Na kraju ovog odeljka samo pomenimo još jednu vrstu konvergencije.

Definicija 3.33 *Neka je E topološki prostor. Neka je $X : \Omega \to E$ idempotentna promenljiva idempotentnom prostoru verovatnoće (Ω, Π), i neka je $X_\phi : \Omega_\phi \to E$, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz idempotentnih promenljivih definisanih na odgovarajućim idempotentnim prostorima verovatnoće $\left(\Omega_\phi, \Pi_\phi\right)$. Neka su idempotentne raspodele Π_X i Π_{X_ϕ} $\mathcal{F}$-idempotentne verovatnoće na E (gde je $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih skupova u E). Uopšteni niz $\left\{ X_\phi \mid \phi \in \Phi \right\}$* ***konvergira u idempotentnoj raspodeli*** *ka X* ***eng. convergence in idempotent distribution*** *ukoliko $\Pi_\phi \circ X_\phi^{-1} \xrightarrow{iw} \Pi \circ X^{-1}$.*

3.8 Laplace-Fenchel-ova transformacija

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ idempotentna promenljiva na idempotentnom prostoru verovatnoće (Ω, Π), i neka je Π_X njena idempotentna raspodela.

Definicija 3.34 *Za idempotentnu promenljivu $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se definiše njena* ***Laplace-Fenchel-ova transformacija*** *kao funkcija $L_X : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}^+$ definisana sa*

$$L_X(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} S_\Pi\left(e^{\langle \lambda, X \rangle}\right) = \bigvee_{\Omega} e^{\langle \lambda, X(\omega) \rangle} d\Pi(\omega), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Napomena 3.10 *S obzirom na teoremu* 3.6 *važi*

$$L_X(\lambda) = \bigvee_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \lambda, x \rangle} d\Pi_X(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Napomena 3.11 *Funkcija $\ln L_X(\lambda)$ je Fenchel-Legendre-ova transformacija funkcije $-\ln \Pi_X(x)$, odnosno važi*

$$\ln L_X(\lambda) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \lambda, x \rangle + \ln \Pi_X(x) \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 3.11 *Funkcija $L : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}^+$ je Laplace-Fenchel-ova transformacija neke idempotentne promenljive $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ako i samo ako je funkcija $\ln L(\lambda)$ konveksna, odozdo poluneprekidna, i važi $\ln L(0) = 1$.*

Ukoliko je funkcija $-\ln \Pi_X(x)$ od dole poluneprekidna i konveksna, tada za idempotentnu raspodelu Π_X važi tzv. ***formula inverzije***

$$\Pi_X(x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \left\{ e^{-\langle \lambda, x \rangle} L_X(\lambda) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Lema 3.12 *Ako je L_X esencijalno glatka funkcija, tada važi formula inverzije* (3.4).

Definicija 3.35 *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **Gauss-ova idempotentna slučajna promenljiva** sa parametrima (m, Σ), gde je $m \in \mathbb{R}^n$ a Σ je pozitivno semi-definitna, simetrična matrica formata $n \times n$, ukoliko je $L_X(x) = \exp\left(\langle \lambda, m \rangle + \frac{\langle \lambda, \Sigma \cdot \lambda \rangle}{2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$.*

*$f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ je **Poisson-ova idempotentna slučajna promenljiva** sa parametrom $a > 0$ ukoliko je $L_X(x) = \exp\left(a\left(e^{\lambda} - 1\right)\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

3.9 LDP konvergencija u prostoru Tihonova

Teorija neaditivnih mera (vidi [MaSa92], [Pa95], [Pu01]) je našla svoju ulogu i u istraživanju LD konvergencije. U ovom odeljku su navedeni rezultati vezani za LD konvergenciju običnih ka idempotentnoj verovatnosnoj meri. Biće razmotrena LDP konvergencija u prostorima Tikhonov-a. Kao glavni izvor je korišćena knjiga [Pu01].

Neka je E topološki prostor Tikhonov-a sa Borel-ovom σ-algebrom $\mathcal{B}_E$. Sa $\mathcal{F}$ će biti označena familija svih zatvorenih podskupova od E, a sa Π će biti označena $\mathcal{F}$-idempotentna mera na E. Neka je Φ usmeren skup, neka je P_ϕ, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz verovatnosnih mera na $(E, \mathcal{B}_E)$ i neka je r_ϕ, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz realnih brojeva većih od 1 i takvih da je $\lim\limits_{\phi \in \Phi} r_\phi = \infty$.

Definicija 3.36 *Uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$ **konvergira po principu velikih devijacija** po stopi r_ϕ ka Π (skraćeno **konvergira LD**, eng. P_ϕ, $\phi \in \Phi$ **large deviation converge at rate** r_ϕ **to** Π) ukoliko za svako $f \in C_b^+(E)$ važi*

$$\lim_{\phi \in \Phi} \left(\int_E f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi \right)^{1/r_\phi} = \bigvee_E f d\Pi. \tag{3.5}$$

Pišemo $\mathsf{P}_\phi \underset{r_\phi}{\overset{ld}{\to}} \Pi$, ili skraćeno $\mathsf{P}_\phi \overset{ld}{\to} \Pi$ kada se podrazumeva u odnosu na koji uopšteni niz se posmatra granična vrednost.

Napomena 3.12 *S obzirom na teoremu* 3.19*, u prostoru Tikhonov-a je granična vrednost* (3.5) *je jedinstveno određena.*

Neka nadalje važe oznake

$$\mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(A) = \left(\mathsf{P}_\phi(A)\right)^{1/r_\phi}, \qquad \|f\|_\phi = \left(\int_E f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi \right)^{1/r_\phi}, \qquad \|f\| = \sup_{x \in E} f(x).$$

Teorema Portmanteau-a daje karakterizaciju LD konvergencije.

Teorema 3.25 (Portmanteau) *U prostoru Tikhonov-a E, sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(1) $\mathsf{P}_\phi \overset{ld}{\to} \Pi$*;*

(2) (2.a) $\forall g \in \underline{C}_b^+(E)$, $\liminf\limits_{\phi\in\Phi} \|g\|_\phi \geq \bigvee\limits_E g d\Pi$,

(2.b) $\forall f \in \overline{C}_b^+(E)$, $\limsup\limits_{\phi\in\Phi} \|f\|_\phi \leq \bigvee\limits_E f d\Pi$*;*

(2') *nejednakost* (2.a) *važi za svaku odozdo poluneprekidnu u odnosu na* Π*, ograničenu Borel-merljivu funkciju* $g: E \to \mathbb{R}^+$*, a nejednakost* (2.b) *važi za svaku odozgo poluneprekidnu u odnosu na* Π*, ograničenu Borel-merljivu funkciju* $f: E \to \mathbb{R}^+$*;*

(3) (3.a) *za svaki otvoren skup* $G \subseteq E$ *važi*

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(G) \geq \Pi(G),$$

(3.b) *za svaki zatvoren skup* $F \subseteq E$ *važi*

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(F) \leq \Pi(F);$$

(3') *nejednakost* (3.a) *važi za svaki otvoren u odnosu na* Π*, Borel-merljivi skup* G*, a nejednakost* (3.b) *važi za svaki zatvoren u odnosu na* Π*, Borel-merljivi skup* F*;*

(4) *za svaki neprekidan u odnosu na* Π*, Borel-merljivi skup* $H \subseteq E$ *važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(H) = \Pi(H);$$

(5) *za svaku ograničenu Borel-merljivu funkciju* $h: E \to \mathbb{R}^+$ *koja je neprekidna u odnosu na* Π *važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \|h\|_\phi = \bigvee_E h d\Pi.$$

Dokaz: ilustracije radi, dat je samo mali deo dokaza.

$[(\mathbf{3.a}) \Longrightarrow (\mathbf{2.a})]$

Neka je $g \in \underline{C}_b^+(E)$. Dokaz će najpre biti izveden za funkciju g za koju je $\|g\| = 1$. Za svako $k \in \mathbb{N}$ i svako $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ neka je $G_{i(k)} = \left\{ x \in E \mid g(x) > \frac{i}{k} \right\}$, i neka je

$$g_k(x) = \max\left\{ \frac{i}{k} \cdot \chi_{G_{i(k)}}(x) \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,k-1\} \right\}, \;\; x \in E, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Pošto je

$$\forall x \in E, \forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\}, \quad g_k(x) \geq \frac{i}{k} \cdot \chi_{G_{i(k)}}(x),$$

i pošto je funkcija t^r, $t \geq 0$ monotono neopadajuća za svako $r \geq 0$, sledi

$$\forall r_\phi, \forall x \in E, \forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\},$$

$$g_k^{r_\phi}(x) \geq \left(\frac{i}{k} \cdot \chi_{G_{i(k)}}(x) \right)^{r_\phi} = \left(\frac{i}{k} \right)^{r_\phi} \cdot \chi_{G_{i(k)}}(x),$$

odakle se dalje dobija

$$\forall r_\phi, \forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\},$$

$$\int_E g_k^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi \geq \int_E \left(\frac{i}{k}\right)^{r_\phi} \cdot \chi_{G_{i(k)}} d\mathsf{P}_\phi = \left(\frac{i}{k}\right)^{r_\phi} \cdot \mathsf{P}_\phi\left(G_{i(k)}\right)$$

te, s obzirom da je funkcija $t^{\frac{1}{r}}$, $t \geq 0$ monotono neopadajuća za svako $r \geq 0$, sledi

$$\forall r_\phi,\ \forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\},$$

$$\|g_k\|_\phi = \left(\int_E g_k^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi\right)^{1/r_\phi} \geq$$

$$\geq \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{r_\phi} \cdot \mathsf{P}_\phi\left(G_{i(k)}\right)\right)^{1/r_\phi} = \frac{i}{k} \cdot \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right),$$

te je

$$\forall r_\phi,\ \|g_k\|_\phi \geq \max\left\{ \frac{i}{k} \cdot \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right) \,\middle|\, i \in \{0,1,\ldots,k-1\}\right\}.$$

Pošto za granične vrednosti uopštenih nizova važe iste osobine kao i za obične nizove [$*$], iz poslednje nejednakosti sledi

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \|g_k\|_\phi \overset{[*]}{\geq} \liminf_{\phi\in\Phi} \max\left\{ \frac{i}{k} \cdot \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right) \,\middle|\, i \in \{0,1,\ldots,k-1\}\right\} \overset{[*]}{=}$$

$$= \max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \liminf_{\phi\in\Phi} \left[\frac{i}{k} \cdot \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right)\right]. \tag{3.6}$$

Pošto je funkcija g od dole poluneprekidna, skupovi $G_{i(k)}$ su otvoreni, te na osnovu (3.a) sledi da je

$$\forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\},\ \liminf_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right) \geq \Pi\left(G_{i(k)}\right),$$

odnosno važi

$$\forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\},\ \liminf_{\phi\in\Phi} \left[\frac{i}{k} \cdot \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right)\right] \geq \frac{i}{k}\Pi\left(G_{i(k)}\right),$$

odnosno

$$\max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \liminf_{\phi\in\Phi} \left[\frac{i}{k} \cdot \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(G_{i(k)}\right)\right] \geq \max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \left[\frac{i}{k}\Pi\left(G_{i(k)}\right)\right].$$

Iz poslednje nejednakosti i (3.6) sledi

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \|g_k\|_\phi \geq \max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \left[\frac{i}{k}\Pi\left(G_{i(k)}\right)\right] \overset{[1]}{=}$$

$$= \max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \left[\frac{i}{k} \bigvee_E \chi_{G_{i(k)}} d\Pi\right] \overset{[2]}{=} \max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \left[\bigvee_E \frac{i}{k}\chi_{G_{i(k)}} d\Pi\right] \overset{[3]}{=}$$

$$= \bigvee_E \max_{i\in\{0,1,\ldots,k-1\}} \left[\frac{i}{k}\chi_{G_{i(k)}}\right] d\Pi = \bigvee_E g_k d\Pi. \tag{3.7}$$

[1] Videti napomenu 3.3.

[2] Korišćenjem teoreme 3.5 pod (c).

[3] Korišćenjem teoreme 3.5 pod (g).

Pošto je $\forall x \in E$, $g(x) \leq g_k(x) + \frac{1}{k}$, sledi

$$\bigvee_E g d\Pi \overset{[4]}{\leq} \bigvee_E \left(g_k + \frac{1}{k}\right) d\Pi \overset{[5]}{\leq} \bigvee_E g_k d\Pi + \bigvee_E \frac{1}{k} d\Pi \overset{[6]}{=} \bigvee_E g_k d\Pi + \frac{1}{k},$$

odnosno

$$\bigvee_E g_k d\Pi \geq \bigvee_E g d\Pi - \frac{1}{k}. \tag{3.8}$$

[4] Korišćenjem teoreme 3.5 pod (b).

[5] Korišćenjem teoreme 3.5 pod (e).

[6] Korišćenjem teoreme 3.5 pod (c) i napomene 3.3, pri čemu je Π idempotentna verovatnoća, te je $\Pi(E) = 1$.

Iz (3.7) i (3.8) sledi

$$\liminf_{\phi \in \Phi} \|g_k\|_\phi \geq \bigvee_E g d\Pi - \frac{1}{k}. \tag{3.9}$$

Iz $\forall x \in E,\ g(x) \geq g_k(x)$ sledi $\forall r_\phi, \forall x \in E,\ g^{r_\phi}(x) \geq g_k^{r_\phi}(x)$, zatim odatle sledi $\forall r_\phi,\ \|g\|_\phi \geq \|g_k\|_\phi$, te je

$$\liminf_{\phi \in \Phi} \|g\|_\phi \geq \liminf_{\phi \in \Phi} \|g_k\|_\phi \overset{(3.9)}{\geq} \bigvee_E g d\Pi - \frac{1}{k}.$$

Pošto je zadnja nejednakost zadovoljena za svako $k \in \mathbb{N}$, sledi

$$\liminf_{\phi \in \Phi} \|g\|_\phi \geq \bigvee_E g d\Pi,$$

čime je dokaz završen za funkciju g za koju je $\|g\| = 1$.

Ako je $\|g\| = 0$, tada je nejednakost $\liminf_{\phi \in \Phi} \|g\|_\phi \geq \bigvee_E g d\Pi$ trivijalno zadovoljena.

Ako je $\|g\| \neq 1$ i $\|g\| \neq 0$, tada za funkciju $\tilde{g} = \frac{1}{\|g\|} \cdot g$ važi $\|\tilde{g}\| = 1$, te za nju, kao što je dokazano, važi $\liminf_{\phi \in \Phi} \|\tilde{g}\|_\phi \geq \bigvee_E \tilde{g} d\Pi$. Primenom teoreme 3.5 pod (c) se dobija

$$\frac{1}{\|g\|} \liminf_{\phi \in \Phi} \|g\|_\phi = \liminf_{\phi \in \Phi} \|\tilde{g}\|_\phi \geq \bigvee_E \tilde{g} d\Pi = \frac{1}{\|g\|} \bigvee_E g d\Pi,$$

te nejednakost $\liminf_{\phi \in \Phi} \|g\|_\phi \geq \bigvee_E g d\Pi$ važi za svako $g \in \underline{C}_b^+(E)$.

Slično se dokazuje implikacija $[(\mathbf{3}.\mathbf{b}) \Longrightarrow (\mathbf{2}.\mathbf{b})]$. □

Posledica 3.1 *Neka je E prostor Tikhonov-a. Ako* $\mathsf{P}_\phi \xrightarrow{ld} \Pi$, *tada za svako* $z \in E$ *važi*

$$\Pi(z) = \lim_{U \in \mathcal{U}'_z} \liminf_{\phi \in \Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(U) = \lim_{U \in \mathcal{U}'_z} \limsup_{\phi \in \Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(\overline{U}\right)$$

gde je $\mathcal{U}'_z$ *familija otvorenih okolina tačke z čija zatvaranja opadaju ka* $\{z\}$. *Specijalno, ako je E metrički prostor, tada je*

$$\Pi(z) = \lim_{r\to 0} \limsup_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(B(z,r)).$$

Posledica 3.2 *Neka je E prostor Tikhonov-a, neka je $E_0 \subseteq E$ Borel-ov skup opremljen indukovanom topologijom iz E, i neka su $\tilde{\Pi}$ i $\tilde{\mathsf{P}}_\phi$, $\phi\in\Phi$ redom restrikcije funkcija Π i P_ϕ, $\phi\in\Phi$ na skup E_0. Ako je $\mathsf{P}_\phi(E\setminus E_0) = \Pi(E\setminus E_0) = 0$, i ako je $\tilde{\Pi}$ τ-glatka u odnosu na familiju zatvorenih potskupova od E_0, tada je*

$$\mathsf{P}_\phi \xrightarrow{ld} \Pi \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{\mathsf{P}}_\phi \xrightarrow{ld} \tilde{\Pi}_\phi$$

Posledica 3.3 *Neka je E prostor Tikhonov-a, i neka idempotentna verovatnoća Π ima nosač u skupu $E_0 \subseteq E$ (tj. važi $\Pi(E\setminus E_0) = 0$). Ukoliko $\mathsf{P}_\phi \xrightarrow{ld} \Pi$, tada važi:*

(1) *za svaku ograničenu Borel-merljivu funkciju $f : E \to \mathbb{R}^+$ koja je neprekidna na skupu E_0 važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \|f\|_\phi = \bigvee_E f d\Pi\,;$$

(2) (2.a) *za svaku ograničenu Borel-merljivu funkciju $f : E \to \mathbb{R}^+$ koja je odozdo poluneprekidna na skupu E_0 važi*

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \|f\|_\phi \geq \bigvee_E f d\Pi\,,$$

(2.b) *za svaku ograničenu Borel-merljivu funkciju $f : E \to \mathbb{R}^+$ koja je odozgo poluneprekidna na skupu E_0 važi*

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \|f\|_\phi \leq \bigvee_E f d\Pi\,;$$

(3) *za svaki neprekidan u odnosu na E_0, Borel-merljivi skup $H \subseteq E$ važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(H) = \Pi(H)\,;$$

(4) (4.a) *za svaki Borel-merljiv skup $G \subseteq E$ koji je otvoren u E_0 važi*

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(G) \geq \Pi(G)\,,$$

(4.b) *za svaki Borel-merljiv skup $F \subseteq E$ koji je otvoren u E_0 važi*

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(F) \leq \Pi(F)\,.$$

Definicija 3.37 *Borel-merljiva funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$ je **uniformno eksponencijalno integrabilna** u poretku r_ϕ u odnosu na uopšteni niz $\{\mathsf{P}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$ ukoliko je*

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{\phi\in\Phi} \int_E f^{r_\phi}(z) \chi_{\{z \;|\; f(z)>a\}} d\mathsf{P}_\phi(z) = 0.$$

Lema 3.13 *Neka je E prostor Tikhonov-a, i neka idempotentna verovatnoća Π ima nosač u skupu $E_0 \subseteq E$. Ukoliko $\mathsf{P}_\phi \xrightarrow{ld} \Pi$ pri $\phi\in\Phi$, tada važi:*

(1) *za svaku Borel-merljivu funkciju $f : E \to \mathbb{R}^+$ koja je neprekidna na E_0 i uniformno eksponencijalno integrabilna u odnosu na uopšteni niz $\{\mathsf{P}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$, važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi}\left(\int_E f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi\right)^{1/r_\phi} = \bigvee_E f d\Pi;$$

(2) *za svaku Borel-merljivu funkciju $f : E \to \mathbb{R}^+$ koja je odozdo poluneprekidna na skupu E_0, važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi}\left(\int_E f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi\right)^{1/r_\phi} \geq \bigvee_E f d\Pi;$$

Lema 3.14 *Neka je E topološki prostor Tikhonov-a, i neka $\mathsf{P}_\phi \xrightarrow{ld} \Pi$ pri $\phi \in \Phi$. Ako su $f_\phi : E \to \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi$ uniformno ograničene Borel-merljive funkcije, i ako je funkcija $f : E \to \mathbb{R}^+$ je takva da za Π-skoro svako $z \in E$ i svaki uopšteni niz z_ϕ, $\phi \in \Phi$ elemenata iz E sa osobinom $\lim_{\phi\in\Phi} z_\phi = z$, važi $\lim_{\phi\in\Phi} f_\phi(z_\phi) = f(z)$, tada je*

$$\lim_{\phi\in\Phi}\int_E \left(f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi\right)^{1/r_\phi} = \bigvee_E f d\Pi.$$

Teorema 3.26 *Neka je E Hausdorff-ov topološki prostor, neka je E' prostor Tikhonov-a, i neka je Π devijabilnost na E. Neka su $f_\phi : E \to E'$, $\phi \in \Phi$ Borel-merljive funkcije, a $f : E \to E'$ je Π-Luzin-merljiva funkcija takva da za Π-skoro svako $z \in E$ i svaki uopšteni niz z_ϕ, $\phi \in \Phi$ sa osobinom $\lim_{\phi\in\Phi} z_\phi = z$ važi $\lim_{\phi\in\Phi} f_\phi(z_\phi) = f(z)$. Ukoliko $\mathsf{P}_\phi \xrightarrow{ld} \Pi$, tada $\mathsf{P}_\phi \circ f_\phi^{-1} \xrightarrow{ld} \Pi \circ f^{-1}$.*

Definicija 3.38 *$\mathcal{F}$-idempotentna verovatnoća Π na E je* ***tačka nagomilavanja u smislu velikih devijacija uopštenog niza*** P_ϕ***,*** $\phi \in \Phi$ ***po stopi*** r_ϕ *(skraćeno* **LD** ***tačka nagomilavanja uopštenog niza*** P_ϕ***,*** $\phi \in \Phi$*) (eng.* ***a large deviation accumulation point for rate*** r_ϕ*) ukoliko postoji podniz $\mathsf{P}_{\phi'}$, $\phi' \in \Phi'$ uopštenog niza P_ϕ, $\phi \in \Phi$ koji* LD *konvergira po stopi $r_{\phi'}$ ka Π.*

Definicija 3.39 *Za uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$ se kaže da je* ***relativno kompaktan u smislu velikih devijacija po stopi*** r_ϕ *(skraćeno* **LD** ***relativno kompaktan****) (eng.* ***a large deviation relatively compact for rate*** r_ϕ*) ukoliko svaki podniz $\mathsf{P}_{\phi'}$, $\phi' \in \Phi'$ uopštenog niza P_ϕ, $\phi \in \Phi$ ima neku* LD *tačku nagomilavanja po stopi $r_{\phi'}$.*

Nadalje je u tekstu sa $\mathcal{K}$ označena familija svih kompaktnih podskupova od E.

Definicija 3.40 *Uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$ je* ***eksponencijalno čvrst u poretku*** r_ϕ *(eng.* ***exponentially tight of order*** r_ϕ*) ukoliko je $\inf_{K\in\mathcal{K}} \limsup_{\phi\in\Phi} \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}\left(K^{\mathsf{C}}\right)$.*

Definicija 3.41 *Neka je E prostor Tikhonov-a i $E_0 \subseteq E$. Uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$ je E_0-**eksponencijalno čvrst** (eng. E_0-**exponentially tight**) ukoliko je eksponencijalno čvrst i svaka* LD *tačka nagomilavanja Π ima nosač u E_0.*

Teorema 3.27 *Neka je E prostor Tikhonov-a.*

(a) *Ako je uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$ eksponencijalno čvrst, tada je on i* LD *relativno kompaktan, i njegove* LD *tačke nagomilavanja su devijabilnosti.*

(b) *Neka je E još i lokalno kompaktan Hausdorff-ov topološki prostor. Ukoliko je uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$* LD *relativno kompaktan, tada je on i eksponencijalno čvrst.*

Posledica 3.4 *Neka je E prostor Tikhonov-a, neka je $E_0 \subseteq E$, i neka je E' lokalno kompaktan Hausdorff-ov prostor. Ako je uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$ eksponencijalno čvrst i ako je funkcija $f : E \to E'$ Borel-merljiva i neprekidna na E_0, tada je uopšteni niz $\mathsf{P}_\phi \circ f^{-1}$, $\phi \in \Phi$ eksponencijalno čvrst.*

Sada će biti razmotren slučaj kada je E metrički prostor sa metrikom ρ, a na skupu Borelovih mera na E će biti definisane metrike u odnosu na koju će biti analizirana LD konvergencija. Za $A \subseteq E$ i $\varepsilon > 0$ će sa A^ε biti označen skup $A^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in E \mid \rho(z,A) \leq \varepsilon\}$.

Neka je P_ϕ, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz Borel-ovih mera na E, neka je r_ϕ, $\phi \in \Phi$ uopšteni niz realnih brojeva većih od 1 sa osobinom $\lim\limits_{\phi \in \Phi} r_\phi = \infty$, i neka je Π $\mathcal{F}$-idempotentna verovatnoća na E. Funkcija p_ϕ^{ld} definisana sa

$$p_\phi^{ld}\left(\mathsf{P}_\phi, \Pi\right) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\Big\{\varepsilon > 0 \,|\, \text{za svaki zatvoren skup } F \subseteq E,$$
$$\mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(F) \leq \Pi(F^\varepsilon) + \varepsilon \,\wedge\, \Pi(F) \leq \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(F^\varepsilon) + \varepsilon\Big\}$$

je metrika. Ova metrika je analogon metrike Prohorov-a.

Lema 3.15 *Za metriku p_ϕ^{ld} važi*

$$p_\phi^{ld}\left(\mathsf{P}_\phi, \Pi\right) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 \mid \forall A \in \mathcal{B}_E, \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(A) \leq \Pi(A^\varepsilon) + \varepsilon \,\wedge\, \Pi(A) \leq \mathsf{P}_\phi^{1/r_\phi}(A^\varepsilon) + \varepsilon\Big\}.$$

Teorema 3.28 *Uopšteni niz P_ϕ, $\phi \in \Phi$* LD *konvergira ka $\mathcal{F}$-idempotentnoj verovatnoći Π ako i samo ako je*

$$\lim_{\phi \in \Phi} p_\phi^{ld}\left(\mathsf{P}_\phi, \Pi\right) = 0.$$

Funkcija $p_{\phi_{BL}}^{ld}$ definisana sa

$$p_{\phi_{BL}}^{ld}\left(\mathsf{P}_\phi, \Pi\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in C_b^+(E): \\ \|f\|_{BL} \leq 1}} \left| \left(\int_E f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi \right)^{1/r_\phi} - \bigvee_E f d\Pi \right|.$$

je takođe metrika. Ova metrika je analogon metrike Kantorovich-Wasserstein.

Teorema 3.29 *Uopšteni niz* P_ϕ, $\phi \in \Phi$ LD *konvergira ka* $\mathcal{F}$*-idempotentnoj verovatnoći* Π *ako i samo ako je*

$$\lim_{\phi\in\Phi} p^{ld}_{\phi_{BL}}\left(\mathsf{P}_\phi, \Pi\right) = 0.$$

Definicija 3.42 *Niz* P_n, $n \in \mathbb{N}$ *je* **LD *relativno sekvencijalno konpaktan po stopi*** r_n *ukoliko svaki podniz* $\mathsf{P}_{n'}$ *sadrži svoj podniz* $\mathsf{P}_{n''}$ *koji* LD *konvergira po stopi* $r_{n''}$ *ka nekoj* $\mathcal{F}$*-idempotentnoj verovatnoći na* E.

Teorema 3.30 *Neka je* E *metrički prostor.*

(a) *Ako je niz verovatnosnih mera* P_n, $n \in \mathbb{N}$ *na* $(E, \mathcal{B}_E)$ *eksponencijalno čvrst, tada je on* LD *relativno sekvencijalno konpaktan, i svaka njegova* LD *tačka nagomilavanja je devijabilnost.*

(b) *Neka je prostor* E *homeomorfan sa nekim kompletnim, separabilnim metričkim prostorom. Ako je niz* P_n, $n \in \mathbb{N}$ LD *relativno sekvencijalno konpaktan, tada je on eksponencijalno čvrst.*

Teorema 3.31 *Neka je* X_ϕ, $\phi \in \Phi$ *uopšteni niz slučajnih vektora sa vrednostima u skupu* $\mathbb{R}^k$*, definisanih na odgovarajućim prostorima verovatnoće* $\left(\Omega_\phi, \mathcal{F}_\phi, \mathsf{P}_\phi\right)$, $\phi \in \Phi$*, takav da za svako* $\lambda \in \mathbb{R}^k$ *važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi} \frac{1}{r_\phi} \ln \mathsf{E}_\phi\left(e^{r_\phi \cdot \langle \lambda, X_\phi\rangle}\right) = G(\lambda),$$

gde je $G : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ *odozdo poluneprekidna, esencijalno glatka, konveksna funkcija takva da* $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_G$*. Tada* $\mathsf{P}_{X_\phi} \xrightarrow{ld} \Pi$ *po stopi* r_ϕ*, gde je* Π *devijabilnost zadana gustinom*

$$\Pi(x) \overset{\text{def}}{=} \exp\left(-\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^k}\left\{\langle\lambda, x\rangle - G(\lambda)\right\}\right), x \in \mathbb{R}^k.$$

Definicija 3.43 *Uopšteni niz verovatnosnih mera* P_ϕ, $\phi \in \Phi$ *na* $(E, \mathcal{B}_E)$ ***neodređeno*** **LD *konvergira po stopi*** r_ϕ *ka* $\mathcal{K}$*-idempotentnoj verovatnoći* Π *na* E *(eng.* ***vaguely*** **LD *converge at rate*** r_ϕ*) ukoliko za svako* $f \in C^+_{\mathcal{K}}(E)$ *važi*

$$\lim_{\phi\in\Phi}\left(\int_E f^{r_\phi} d\mathsf{P}_\phi\right)^{1/r_\phi} = \bigvee_E f d\Pi.$$

Glava 4

LDP za $\oplus$-dekompozabilne mere

U ovom odeljku je definisan princip velikih devijacija za pseudo-verovatnosne mere, tj. definisana je LD konvergencija niza $\oplus$-dekompozabilnih verovatnosnih mera ka sup-dekompozabilnoj meri. Kao ideja za ovakav pristup poslužile su teoreme 4.1, 4.6 i 4.7 iz [MePa99]. O svojstvima neaditivnih mera može se videti u [MaSa92] i [Pa95].

4.1 Poluprsten

U ovom odeljku su navedeni neki pojmovi i rezultati iz pseudo-analiza (videti [MaSa92], [Pa95] i [MePa99]). Neka je $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$ (u nekim situacijama se posmatraju poluzatvoreni intervali), neka su $\oplus$ i $\odot$ binarne operacije na intervalu $[a,b]$, i neka je relacija $\preceq$ linearni poredak na $[a,b]$. Nadalje će se u tekstu koristiti konvencija $\infty \cdot 0 = 0$.

Definicija 4.1 *Uređena trojka* $([a,b],\oplus,\odot)$ *je* ***poluprsten*** *ukoliko važi:*

(a) *operacija* $\oplus$ *je asocijativna, komutativna, neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$ *(*$\forall x,y,z \in [a,b], x \preceq y \;\Rightarrow\; x \oplus z \preceq y \oplus z$*), i postoji neutralni element (**nula**)* $\mathbf{0}$ *(obično je* $\mathbf{0} = a$ *ili* $\mathbf{0} = b$*),*

(b) *operacija* $\odot$ *je asocijativna, komutativna, pozitivno neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$ *(*$\forall x,y,z \in [a,b], (x \preceq y \wedge \mathbf{0} \preceq z) \;\Rightarrow\; x \odot z \preceq y \odot z$*), i postoji neutralni element (**jedinica**)* $\mathbf{1}$*,*

(c) (c.1) $\forall x \in [a,b], \mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$*,*

(c.2) *operacija* $\odot$ *je distributivna u odnosu na operaciju* $\oplus$*.*

Operacije $\oplus$ *i* $\odot$ *nazivamo redom* ***pseudo-sabiranje*** *i* ***pseudo-množenje****.*

Postoje tri važna tipa poluprstena.

(I) Operacija $\oplus$ je idempotentna ($\oplus = \sup$ ili $\oplus = \inf$), a operacija $\odot$ to nije.

(Ia) Ako je $\oplus = \sup$, a $\odot$ je proizvoljna operacija na intervalu $[a,b]$ (ili $[a,b)$) koja nije idempotentna, tada je $\mathbf{0} = a$, a relacija $\preceq$ je obična $\leq$. Pri tome je $\mathbf{1} \neq a$. Posebno je važan slučaj kada se pseudo-množenje $\odot$ može predstaviti pomoću generatora g, tj. neprekidne, striktno rastuće, sirjektivne funkcije $g : [a,b] \to [0,\infty]$ takve da je

$$g(\mathbf{0}) = g(a) = 0,$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

(Ib) Ako je $\oplus = \inf$, a $\odot$ je proizvoljna operacija na $[a,b]$ (ili $(a,b]$) koja nije idempotentna, tada je $\mathbf{0} = b$, a relacija $\preceq$ je obična $\geq$. Pri tome je $\mathbf{1} \neq b$. Posebno je važan slučaj kada se pseudo-množenje $\odot$ može predstaviti pomoću generatora g, tj. neprekidne, striktno opadajuće, sirjektivne funkcije $g : [a,b] \to [0,\infty]$ takve da je

$$g(\mathbf{0}) = g(b) = 0,$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

(II) Obe operacije $\oplus$ i $\odot$ su generisane neprekidnom i striktno monotonom funkcijom g, tj. postoji funkcija $g : [a,b] \to [0,\infty]$ takva da je

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)),$$
$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

U ovom slučaju je $g(\mathbf{0}) = 0$ i $g(\mathbf{1}) = 1$.

Poluprsten ovog tipa se naziva ***g-poluprsten***.

(III) Obe operacije $\oplus$ i $\odot$ su idempotentne (tj. $([a,b], \oplus, \odot) = ([a,b], \sup, \inf)$ ili $([a,b], \oplus, \odot) = ([a,b], \inf, \sup)$).

Što se tiče slučaja (II), na osnovu Aczél-ove teoreme reprezentacije za svaku striktno rastuću operaciju $\oplus$ postoji striktno monotona, sirjektivna funkcija (generator) $g : [a,b] \to [0,\infty]$ operacije $\oplus$ takva da je $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ i $g(\mathbf{0}) = 0$. Ako je $\mathbf{0} = a$, tada je g rastuća funkcija i važi $g(a) = 0$, $g(b) = \infty$, i funkcija g je izomorfizam između $([a,b], \oplus)$ i $([0,\infty], +)$. U slučaju $\mathbf{0} = b$, situacija je obrnuta. Pseudo-množenje definisano sa $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$ je takva operacija da je uređena trojka $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten.

Primer 4.1 *Slede primeri za svaki od gore pomenutih tipova poluprstena.*

(I) (I.1) *Uređena trojka* $([-\infty,\infty), \sup, +)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = -\infty$, $\mathbf{1} = 0$, *i pseudo-množenje* $\odot$ *je generisano funkcijom* $g(x) = e^x$. *Uz konvenciju* $(-\infty) + (+\infty) = -\infty$ *dobijamo poluprsten* $([-\infty,\infty], \sup, +)$.

Analogno, uređena trojka $((-\infty,\infty], \inf, +)$ *je takođe poluprsten.*

(I.2) *Uređena trojka* $([0,\infty], \sup, \cdot)$, *uz konvenciju* $0 \cdot \infty = 0$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = 0$, $\mathbf{1} = 1$.

(II) (II.1) *Za monotono rastući generator* $g : [-\infty, \infty) \to [0, \infty]$, $g(x) = e^x$, *uz konvenciju* $e^{-\infty} = 0$, *dobijaju se na intervalu* $[-\infty, \infty)$ *operacije*

$$x \oplus y = \ln(e^x + e^y) \qquad x \odot y = x + y.$$

Uređena trojka $([-\infty, \infty), \oplus, \odot)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = -\infty$ *i* $\mathbf{1} = 0$.

(II.2) *Za monotono rastući generator* $g : [0, \infty] \to [0, \infty]$, $g(x) = x^2$, *dobijaju se na intervalu* $[0, \infty]$ *operacije*

$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x \odot y = x \cdot y.$$

Uređena trojka $([0, \infty], \oplus, \odot)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = 0$ *i* $\mathbf{1} = 1$.

(III) (III.1) *Za* $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, *uređena trojka* $([a, b), \sup, \inf)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = a$, $\mathbf{1} = b$, *a relacija* $\preceq$ *je uobičajeni linearni poreak* $\leq$.

(III.2) *Za* $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, *uređena trojka* $([a, b), \inf, \sup)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbf{0} = b$, $\mathbf{1} = a$, *a relacija* $\preceq$ *je uobičajeni obrnuti linearni poredak* $\geq$.

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten tipa (II) sa generatorom $g : [a, b] \to [0, \infty]$. Kao što je pokazano u radu [MePa99], za $\lambda \in (0, \infty)$ je funkcija g^λ generator za poluprsten $([a, b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$, gde je

$$x \oplus_\lambda y = \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)\right),$$
$$x \odot_\lambda y = \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(g^\lambda(x) \cdot g^\lambda(y)\right) = x \odot y.$$

Stoga je $([a, b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda) = ([a, b], \oplus_\lambda, \odot)$.

Naredna teorema, dokazana u [MePa99], pokazuje da se poluprsten tipa (I) može dobiti kao granična vrednost familije g^λ-generisanih poluprstenova $([a, b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$ (pri čemu je $\odot_\lambda = \odot$).

Teorema 4.1 *Neka je* $g : [a, b] \to [0, \infty]$ *striktno opadajuća funkcija - generator poluprstena* $([a, b], \oplus, \odot)$ *koji je tipa* (II), *i neka je* g^λ *funkcija* g *na stepen* $\lambda \in (0, \infty)$. *Tada je* g^λ *generator poluprstena* $([a, b], \oplus_\lambda, \odot)$, *i za svako* $\varepsilon > 0$ *i svako* $(x, y) \in [a, b]^2$ *postoji* λ_0 *takvo da je* $|x \oplus_\lambda y - \inf(x, y)| < \varepsilon$ *for all* $\lambda \geq \lambda_0$. *Ako je* g *rastuća funkcija, isti rezultat važi za* sup *umesto* inf.

4.2 Mere i integrali sa vrednostima u poluprstenu

U ovom odeljku su navedene definicije i osobine mera i integrala sa vrednostima u poluprstenu. Ovakve mere i itegrale nazivamo još i ***dekompozabilnim merama*** odnosno ***pseudo-integralima***. Kao glavni izvor za ovaj odeljak je korišćeno [Pa95]. Takođe su navedena i dva rezultata iz [MePa99] vezana za konvergenciju dekompozabilnih mera i pseudo-integrala.

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten[1] sa standardnom relacijom poretka $\leq$, sa neutralnim elementima $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ redom operacija $\oplus$ i $\odot$, neka je $[a, b]_+ = \{x \in [a, b] \mid \mathbf{0} \leq x\}$, i neka je Σ σ-algebra podskupova skupa X.

[1] Umesto zatvorenog se po potrebi posmatra poluotvoreni interval.

Definicija 4.2 *Skupovna funkcija* $m : \sum \to [a,b]_+$ *je* $\oplus$***-dekompozabilna mera*** *ukoliko važi*

(1) $m(\emptyset) = \mathbf{0}$,

(2) *ako je* $\oplus$ *neidempotentna operacija, tada*
$\forall A, B \in \sum,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B)$,

(2') *ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija (*min *ili* max*), tada*
$\forall A, B \in \sum,\ m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B)$.

Specijalno, za $\oplus = \max$*, funkciju m nazivamo još i* ***konačno maksitivnom merom****.*
Ako je $\oplus$ *neidempotentna operacija, tada se* $\oplus$*-dekompozabilna mera* $m : \sum \to [a,b]_+$ *naziva* σ-$\oplus$***-dekompozabilna mera*** *ako*

(3) *za svaki niz* A_i*,* $i \in \mathbb{N}$ *po parovima disjunktnih elemenata* A_i σ*-algebre* $\sum$ *važi*

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

gde je $\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i$.

Specijalno, za $\oplus = \max$*, funkciju m nazivamo još i* ***prebrojivo maksitivnom merom****.*
Ako je $\oplus = \max$*, tada je maksitivna mera* $m : \sum \to [a,b]_+$ ***kompletno maksitivna*** *ako*

(3') *za svaku familiju* A_i*,* $i \in I$ *skupova* $A_i \in \sum$ *sa osobinom* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \sum$ *važi*

$$m\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} m(A_i).$$

Kompletno maksitivna mera je zapravo idempotentna mera iz glave 3*, i ona je jednoznačno određena svojom gustinom.*

Napomena 4.1 *Ako je m* σ-$\oplus$*-dekompozabilna mera pri čemu je operacija* $\oplus$ *generisana generatorom g, tada je* $\mu = g \circ m$ *Lebesgue-ova* σ*-aditivna mera, i pri tome važi* $m = g^{-1} \circ \mu$*.*

Konstrukcija integrala zasnovanog na σ-$\oplus$-dekompozabilnoj meri sa vrednostima u poluprstenu $([a,b], \oplus, \odot)$, analogna je konstrukciji Lebesgue-ovog integrala (vidi [Pa95]). Neka je m je σ-$\oplus$-dekompozabilna mera definisana na $\sum$.

Definicija 4.3 *Za* $c \in [a,b]$ *i funkcije* $f : X \to [a,b]$ *i* $g : X \to [a,b]$ *definiše se*

$$(c \odot g)(x) = c \odot g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x), \quad x \in X.$$

Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ***merljiva od dole*** ukoliko su merljivi (tj. pripadaju $\sum$) svi skupovi $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ i $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ za svako $c \in [a,b]$. Funkcija f je ***merljiva*** ako je merljiva od dole i merljivi su svi skupovi $\{x \in X \mid f(x) \geq c\}$ i $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ za svako $c \in [a,b]$.

Definicija 4.4 ***Pseudo-karakteristična funkcija skupa*** *$A \subseteq X$ je funkcija $\kappa_A : X \to [a,b]$ definisana sa*

$$\kappa_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad x \notin A \\ \mathbf{1} & , \quad x \in A \end{cases}.$$

Definicija 4.5 *Neka su $A_i \in \sum$, $i \in \mathbb{N}$ merljivi skupovi koji su disjunktni ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna, i neka su a_i, $i \in \mathbb{N}$ elementi intervala $[a,b]$. Funkcija oblika*

$$e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \kappa_{A_i}$$

odnosno oblika

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{A_i}$$

se naziva ***elementarna funkcija****.*

Naravno, elementarna funkcija je merljiva, i karakteristična funkcija skupa A je merljiva ako i samo ako je A merljiv skup (tj. $A \in \sum$).

Pretpostavićemo dalje da su polugrupe $([a,b], \oplus)$ i $([a,b], \odot)$ ***kompletne mreže sa poretkom***, tj. za svaki od gore ograničen skup $A \subseteq [a,b]$ postoji $\sup A$, i svaki od dole ograničen skup $A \subseteq [a,b]$ postoji $\inf A$. Takođe, neka je na $[a,b]$ definisana metrika $d : [a,b]^2 \to [0,\infty]$ koja je kompatibilna sa supremumom i infimumom, tj. za svaki niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ elemenata intervala $[a,b]$ važi

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \wedge \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = x\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

za koju važi još bar jedan od sledeća dva uslova:

(a) $\forall x, x', y, y' \in [a,b], \quad d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq d(x,x') + d(y,y')$,

(b) $\forall x, x', y, y' \in [a,b], \quad d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$,

i koja je monotona, tj. važi

$$x \leq z \leq y \quad \Rightarrow \quad \max\{d(x,z), d(y,z)\} \leq d(x,y).$$

Definicija 4.6 *Neka je $\varepsilon > 0$ i $B \subseteq [a,b]$. Niz $\left\{ l_i^{(\varepsilon)} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ je* ***ε-mreža*** *za skup B ukoliko za svako $x \in B$ postoji neko $l_i^{(\varepsilon)}$ takvo da je $d\left(l_i^{(\varepsilon)}, x\right) \leq \varepsilon$. Ako za svako $x \in B$ postoji $l_i^{(\varepsilon)}$ takvo da je $d\left(l_i^{(\varepsilon)}, x\right) \leq \varepsilon$ i $l_i^{(\varepsilon)} \leq x$, tada je $\left\{ l_i^{(\varepsilon)} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$* ***opadajuća ε-mreža****. $\left\{ l_i^{(\varepsilon)} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ je* ***monotona ε-mreža*** *ukoliko je $\forall i$, $l_i^{(\varepsilon)} \leq l_{i+1}^{(\varepsilon)}$.*

Teorema 4.2 *Neka je* $f : X \to [a,b]$ *funkcija koja je od dole merljiva ukoliko je* $\oplus$ *idempotentna operacija, ili je merljiva i za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(X)$. *Tada postoji niz elementarnih funkcija* e_n, $n \in \mathbb{N}$ *takvih da je*

$$\lim_{n \to \mathbb{N}} d(e_n(x), f(x)) = 0$$

uniformno po $x \in X$.

Definicija 4.7

(a) ***Pseudo-integral*** *elementarne funkcije oblika* $e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \kappa_{A_i}$, *odnosno oblika* $e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{A_i}$, *gde su skupovi* A_i *disjunktni ukoliko* $\oplus$ *nije idempotentna operacija, je definisan sa*

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot m(A_i)$$

odnosno

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot m(A_i).$$

(b) ***Pseudo-integral*** *ograničene, merljive, odnosno merljive od dole ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija, funkcije* $f : X \to [a,b]$, *za koju, ukoliko* $\oplus$ *nije idempotentna operacija važi da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(X)$, *je definisan sa*

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \mathbb{N}} \int_X^{\oplus} e_n \odot dm, \tag{4.1}$$

gde je e_n, $n \in \mathbb{N}$ *niz elementarnih funkcija iz teoreme* 4.2.

(c) ***Pseudo-integral*** *ograničene, merljive, odnosno merljive od dole ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija, funkcije* $f : X \to [a,b]$ *nad skupom* $A \in \sum$, *za koju, ukoliko* $\oplus$ *nije idempotentna operacija važi da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(A)$, *je definisan sa*

$$\int_A^{\oplus} f \odot dm \stackrel{\text{def}}{=} \int_X^{\oplus} (f \odot \kappa_A) \odot dm.$$

Napomena 4.2 *Integral definisan sa* (4.1) *ne zavisi od od izbora elementarnih funkcija* e_n.

Primer 4.2 *Posmatrajmo poluprsten* $([-\infty,\infty), \sup, +)$, *i neku proizvoljnu funkciju* $\varphi : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty)$. *Neka je* $\mathcal{B}$ *Borel-ova* σ*-algebra na* $\mathbb{R}$. *Funkcija* $m : \mathcal{B} \to [-\infty,\infty)$ *definisana sa*

$$m(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in A} \varphi(x), \quad A \in \mathcal{B}$$

je sup*-mera na skupu* $\mathbb{R}$*, i za pseudo operacije* $\oplus = \sup$ *i* $\odot = +$ *odgovarajući pseudo-integral od gore ograničene funkcije* $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ *se izračunava na sledeći način:*

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x\in\mathbb{R}} (f(x) + g(x)).$$

Primer 4.3 *Posmatrajmo g-poluprsten* $([a,b], \oplus, \odot)$*. Neka je* Σ σ*-algebra skupa* Ω*, i posmatrajmo i neku* $\oplus$*-dekompozabilnu meru na* Ω*. Funkcija* $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} g \circ m : \Sigma \to [-\infty, \infty]$ *je aditivna mera, i za merljivu funkciju* $f : \Omega \to [a,b]$ *se pseudo-integral funkcije* f *može izračunati na sledeći način:*

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_{\Omega} (g \circ f) d\lambda\right)$$

gde je integral sa desne strane Lebesque-ov integral.

Sledeće teoreme, koje se koriste u odeljku 4.3, daju neke osobine pseudo-integrala, i specijalno sup-integrala (vidi [Pa95] - glave 2 i 8, i [Pu01]). Neka je m neka σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na Ω.

Teorema 4.3 *Neka su* $\oplus$ *i* $\odot$ *neprekidne, i neka je* $\oplus$ *beskonačno komutativna operacija. Tada pseudo integral* 4.2 *ima sledeće osobine: za svako* $c \in [a,b]$ *i funkcije* $f : \Omega \to [a,b]$ *i* $g : \Omega \to [a,b]$ *za koje je pseudo-integral definisan, važi*

$$\text{(a)} \quad m(A) = \int_{\Omega}^{\oplus} \kappa_A(x) \odot dm, \tag{4.2}$$

$$\text{(b)} \quad \int_{\Omega}^{\oplus} (c \odot f) \odot dm = c \odot \int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm, \tag{4.3}$$

$$\text{(c)} \quad \int_{\Omega}^{\oplus} (f \oplus g) \odot dm = \int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm \oplus \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm, \tag{4.4}$$

$$\text{(d)} \quad f \le g \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm \le \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm. \tag{4.5}$$

Dokaz: Ilustracije radi, naveden je dokaz osobine (d).

* Neka su f i g elementarne funkcije, odnosno oblika

$$f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{A_i}, \qquad g = \bigoplus_{i=1}^{\infty} b_i \odot \kappa_{B_i},$$

gde su A_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ kao i B_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ neprazni disjunktni skupovi ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna. Neka je $C_{i,j} = A_i \cap B_j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Za funkcije f i g važi reprezentacija $f = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\bigoplus_{j=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{C_{i,j}}$ i $g = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\bigoplus_{j=1}^{\infty} b_j \odot \kappa_{C_{i,j}}$. Iz relacije $f \leq g$ sledi $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, $a_i \odot \kappa_{C_{i,j}}(x) \leq b_j \odot \kappa_{C_{i,j}}(x)$, odnosno sledi da za sve $i, j \in \mathbb{N}$ važi $C_{i,j} \neq \emptyset \ \Rightarrow \ a_i \leq b_j$ (slučaj $C_{i,j} = \emptyset$ je očigledan), te pošto je $\odot$ pozitivno neopadajuća operacija, sledi da je $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $a_i \odot m(C_{i,j}) \leq b_j \odot m(C_{i,j})$, odakle (operacija $\oplus$ je takođe neopadajuća) sledi tvrđenje

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\bigoplus_{j=1}^{\infty} a_i \odot m(C_{i,j}) \leq \bigoplus_{i=1}^{\infty}\bigoplus_{j=1}^{\infty} b_j \odot m(C_{i,j}) = \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm.$$

* Neka su sada f i g merljive, odnosno od dole merljive funkcije ako je operacija $\oplus$ idempotentna, i neka su φ_n, $n \in \mathbb{N}$ i ψ_n, $n \in \mathbb{N}$ nizovi elementarnih funkcija iz teoreme 4.2 koji odgovaraju funkcijama f i g, tj. takve da uniformno po $x \in \Omega$ važi

$$\lim_{n\to\mathbb{N}} d(\varphi_n(x), f(x)) = 0, \qquad \lim_{n\to\mathbb{N}} d(\psi_n(x), g(x)) = 0. \tag{4.6}$$

Neka su funkcije $\tilde{\psi}_n$, $n \in \mathbb{N}$ definisane sa $\tilde{\psi}_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}$, $x \in \Omega$. Očigledno je $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, $\varphi_n(x) \leq \tilde{\psi}_n(x)$. Pošto su navedene konvergencije uniformne po $x \in \Omega$, s obzirom na napomenu 4.2, iz (4.6) i relacije $f \leq g$ sledi

$$\lim_{n\to\mathbb{N}} d(\tilde{\psi}_n(x), g(x)) = 0 \quad \text{i} \quad \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm = \lim_{n\to\mathbb{N}} \int_{\Omega}^{\oplus} \tilde{\psi}_n(x) \odot dm$$

odakle se dobija

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = \lim_{n\to\mathbb{N}} \int_{\Omega}^{\oplus} \varphi_n(x) \odot dm \leq \lim_{n\to\mathbb{N}} \int_{\Omega}^{\oplus} \tilde{\psi}_n(x) \odot dm = \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm.$$

□

Neka je m sada σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na Ω sa vrednostima u poluprstenu $([0,\infty], \oplus, \odot)$, takva da je $m(\Omega) < \infty$. Koristimo konvenciju $\infty \cdot 0 = 0$, i umesto $m(\{\omega\})$ ćemo pisati $m(\omega)$. Za proizvoljnu familiju funkcija $f_j : \Omega \to [0,\infty]$, $j \in J$ su funkcije $\sup_{j\in J} f_j : \Omega \to [0,\infty]$ i $\inf_{j\in J} f_j : \Omega \to [0,\infty]$ definisane sa

$$\left(\sup_{j\in J} f_j\right)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in J} f_j(\omega), \qquad \left(\inf_{j\in J} f_j\right)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{j\in J} f_j(\omega).$$

Teorema 4.4 *Neka je $\odot$ neprekidna operacija. Za kompletno maksitivnu meru m i proizvoljnu familiju funkcija $f_j : \Omega \to [0,\infty)$, $j \in J$ važi*

$$\int_{\Omega}^{\sup} \left(\sup_{j\in J} f_j\right) \odot dm = \sup_{j\in J} \int_{\Omega}^{\sup} f_j \odot dm.$$

Dokaz:

$$\int_{\Omega}^{\sup} \left(\sup_{j \in J} f_j \right) \odot dm = \sup_{\omega \in \Omega} \left\{ \left(\sup_{j \in J} f_j \right) (\omega) \odot m(\omega) \right\} =$$

$$= \sup_{\omega \in \Omega} \left\{ \left(\sup_{j \in J} f_j(\omega) \right) \odot m(\omega) \right\} \overset{[1]}{=} \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{j \in J} \left\{ f_j(\omega) \odot m(\omega) \right\} =$$

$$= \sup_{j \in J} \sup_{\omega \in \Omega} \left\{ f_j(\omega) \odot m(\omega) \right\} = \sup_{j \in J} \int_{\Omega}^{\sup} f_j \odot dm.$$

[1] ako je $\varphi : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ neprekidna funkcija, tada za $b \in [0,\infty)$ i proizvoljnu familiju $a_j \in [0,\infty)$, $j \in J$ važi $\varphi \left(\sup_{j \in J} a_j, b \right) = \sup_{j \in J} \varphi(a_j, b)$; operacija $\odot$ je neprekidna funkcija.

□

Neka je $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih potskupova intervala $[0,\infty]$. Analogno kao u teoremi 1.7.7. u [Pu01], za sup-integral zasnovanom na poluprstenu $([0,\infty], \sup, \odot)$ sa operacijom $\odot$ generisanom neprekidnom funkcijom g, važi sledeća teorema.

Teorema 4.5 *Neka je m kompletno maksitivna mera na intervalu $[0,\infty]$ sa vrednostima u intervalu $[0,\infty]$, i neka je m pri tome $\mathcal{F}$-glatka, tj.*

(1) $m(\emptyset) = 0$,

(2) $m\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) = \sup_{j \in J} m(A_j)$ *za svaku familiju A_j, $j \in J$ merljivih skupova A_j,*

(3) $m\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} m(F_n)$ *za svaki opadajući niz F_n, $n \in \mathbb{N}$ elemenata familije $\mathcal{F}$.*

Tada, za svaku familiju $f_j : [0,\infty] \to [0,\infty)$, $j \in J$ ograničenih, od gore poluneprekidnih funkcija, koja je zatvorena u odnosu na minimume i infimume, važi

$$\int_{[0,\infty]}^{\sup} \left(\inf_{j \in J} f_j \right) \odot dm = \inf_{j \in J} \int_{[0,\infty]}^{\sup} f_j \odot dm$$

gde je operacija $\odot$ generisana neprekidnom funkcijom g.

Dokaz prethodne teoreme je analogan dokazu teoreme 3.12. Razlika je u tome što u teoremi 4.5 umesto množenja realnih brojeva figuriše pseudo-množenje $\odot$, koje ima iste osobine (neprekidna je i monotono rastuća), bitne za dokaz, kao obično množenje, odnosno važi $g(x \odot y) = g(x) \cdot g(y)$.

Naredne dve teoreme, dokazane u [MePa99], pokazuju da

1. dekompozabilna mera zasnovana na idempotentnom pseudo-sabiranju sa neprekidnom gustinom se može dobiti kao limes familije dekompozabilnih mera m_λ zasnovanih na pseudo-sabiranju sa generatorom,

2. pseudo-integral zasnovan na poluprstenu $([a,b], \sup, \odot)$ sa operacijom $\odot$ koja je generisana funkcijom g, i na sup-dekompozabilnoj meri sa neprekidnom gustinom, može se dobiti kao limes familije g-integrala.

Neka $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ označava σ-algebru Borel-ovih podskupova intervala $[0,\infty]$, a μ neka označava Lebesgue-ovu meru na $\mathbb{R}$. Esencijalni supremum nenegativne, merljive funkcije $f : \Omega \to [0,\infty]$ u odnosu na meru μ je definisan sa

$$\operatorname*{esssup}_{\mu} \{ f(x) \mid x \in \Omega \} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \alpha \in [0,\infty) \mid \mu(\{ x \in \Omega \mid f(x) > \alpha \}) \}$$

pri čemu uzimamo da je $\sup \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \infty$.

Teorema 4.6 *Neka je m sup-dekompozabilna mera na $\left([0,\infty], \mathcal{B}_{[0,\infty]}\right)$, pri čemu je*

$$m(A) = \operatorname*{esssup}_{\mu} \{ \varphi(x) \mid x \in A \},$$

gde je $\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ neprekidna funkcija - gustina mere m. Tada za proizvoljni generator g postoji familija $\{m_\lambda\}_{\lambda \in (0,\infty)}$ $\oplus_\lambda$-dekompozabilnih mera na $\left([0,\infty], \mathcal{B}_{[0,\infty]}\right)$, gde je operacija $\oplus_\lambda$ generisana funkcijom g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, takva da je $\lim_{\lambda \to \infty} m_\lambda = m$.[2]

Teorema 4.7 *Neka je $([0,\infty], \sup, \odot)$ poluprsten kod koga je operacija $\odot$ generisana funkcijom g. Neka je m sup-dekompozabilna mera kao u teoremi 4.6. Tada postoji familija $\{m_\lambda\}_{\lambda \in (0,\infty)}$ $\oplus_\lambda$-dekompozabilnih mera, gde je operacija $\oplus_\lambda$ generisana funkcijom g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, takva da za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ važi*

$$\int^{\sup} f \odot dm = \lim_{\lambda \to \infty} \int^{\oplus_\lambda} f \odot dm_\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(\int (g^\lambda \circ f) \odot dx \right).$$

4.3 LDP konvergencija pseudo-verovatnosnih mera

S obzirom na teoreme 4.6 i 4.7, sada će biti razmotrena konvergencija σ-$\oplus_{r_n}$-dekompozabilnih mera m_n na intervalu $[0,\infty]$ sa osobinom $m_n([0,\infty]) = \mathbf{1}$, ka sup-dekompozabilnoj meri m na intervalu $[0,\infty]$ sa osobinom $m([0,\infty]) = \mathbf{1}$, u smislu principa velikih devijacija (vidi [Pa90], [MaSa92] and [Pa95]).

Posmatraće se ponovo skupovi funkcija

$$C_b^+([0,\infty]) = \{ f \mid f : [0,\infty] \to \mathbb{R}^+, \ f \text{ je ograničena i neprekidna} \},$$

$$\overline{C}_b^+([0,\infty]) = \{ f \mid f : [0,\infty] \to \mathbb{R}^+, \ f \text{ je ograničena i odozgo poluneprekidna} \},$$

$$\underline{C}_b^+([0,\infty]) = \{ f \mid f : [0,\infty] \to \mathbb{R}^+, \ f \text{ je ograničena i odozdo poluneprekidna} \}.$$

Sa $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ će biti označena Borel-ova σ-algebra podskupova intervala $[0,\infty]$ (gde se na $[0,\infty]$ posmatra standardna topologija), i neka $\mathcal{O}$ i $\mathcal{F}$ redom označavaju familije svih otvorenih, odnosno zatvorenih podskupova intervala $[0,\infty]$.

[2] U smislu da je $\lim_{\lambda \to \infty} m_\lambda(A) = m(A)$ za svako $A \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}$.

Neka je $I = ([0,\infty], \oplus, \odot)$ poluprsten tipa (II) sa operacijama $\oplus$ i $\odot$ generisanim neprekidnom, striktno rastućom funkcijom $g : [0,\infty] \to [0,\infty]$, takvom da je $g(0) = 0$ i $g(\mathbf{1}) = 1$, gde su 0 i $\mathbf{1}$ redom neutralni elementi operacija $\oplus$ i $\odot$.

Neka je $S = ([0,\infty], \sup, \odot)$ poluprsten u kojem je operacija $\odot$ ista kao u poluprstenu I (pri čemu je 0 takođe neutralni element operacije sup). Neka je $m : \mathcal{B}_{[0,\infty]} \to [0,\infty]$ kompletno maksitivna, $\mathcal{F}$-glatka sup-mera na $[0,\infty]$ sa osobinom $m([0,\infty]) = \mathbf{1}$, tj.

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. $m([0,\infty]) = \mathbf{1}$,
3. $m\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \sup_{j\in J} m(A_j)$ za proizvoljnu familiju skupova $A_j \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}$, $j \in J$,
4. $m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(F_n)$ za svaki opadajući niz F_n, $n \in \mathbb{N}$ elemenata familije $\mathcal{F}$.

Neka je r_n, $n \in \mathbb{N}$ niz realnih brojeva većih od 1, i za koje važi $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$. Shodno sekciji 4.1, funkcija g^{r_n} je generator poluprstena $([0,\infty], \oplus_{r_n}, \odot)$.

Neka je m_n, $n \in \mathbb{N}$ niz σ-$\oplus_{r_n}$-dekompozabilnih mera na $\left([0,\infty], \mathcal{B}_{[0,\infty]}\right)$ sa osobinom $m_n([0,\infty]) = \mathbf{1}$, tj.

1. $m_n(\emptyset) = 0$,
2. $m_n([0,\infty]) = \mathbf{1}$,
3. $m_n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{\substack{r_n \\ i\in\mathbb{N}}} m_n(A_i)$ za svaki niz po parovima disjunktnih, merljivih skupova $A_i \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}$, $i \in \mathbb{N}$.

Definicija 4.8 *Niz m_n, $n \in \mathbb{N}$ σ-$\oplus_{r_n}$-dekompozabilnih mera* ***konvergira po principu velikih devijacija*** *po stopi $g - r_n$ ka* sup*-meri m (skraćeno* **LD *konvergira***) *ukoliko za svaku funkciju $f \in C_b^+([0,\infty])$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f \odot dm_n = \int_{[0,\infty]}^{\sup} f \odot dm. \tag{4.7}$$

LD *konvergencija će biti označavana sa $m_n \xrightarrow[g-r_n]{ld} m$, ili skraćeno $m_n \xrightarrow{ld} m$ ukoliko je iz konteksta jasno o kojoj stopi konvergencije se radi.*

Tvrđenje 4.1 *Ukoliko granična vrednost* (4.7) *postoji, tada važe sledeće jednakosti:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f \odot dm_n = \lim_{n\to\infty} (g^{r_n})^{-1} \left(\int_{[0,\infty]} (g^{r_n} \circ f) dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} g^{-1}\left(\left(\int_{[0,\infty]} (g^{r_n}\circ f)dx\right)^{\frac{1}{r_n}}\right) =$$

$$= g^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[0,\infty]} (g^{r_n}\circ f)dx\right)^{\frac{1}{r_n}}\right)$$

gde je dx Lebesgue-ova mera na $[0,\infty]$.

<u>*Dokaz:*</u> Navedene jednakosti slede zbog:

1. za poluprsten $([0,\infty],\oplus_{r_n},\odot)$ generisan funkcijom g^{r_n}, pseudo-integral ima reprezentaciju u obliku $\int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f\odot dm_n = (g^{r_n})^{-1}\left(\int_{[0,\infty]} (g^{r_n}\circ f)dx\right)$, gde je dx Lebesgue-ova mera,
2. $(g^{r_n})^{-1}(x) = g^{-1}\left(x^{\frac{1}{r_n}}\right)$,
3. g je neprekidna funkcija,

(vidi [MePa99] i [Pa95]). $\square$

Napomena 4.3 *Ukoliko granična vrednost* (4.7) *postoji, tada je ona jednoznačno određena.*

Nadalje će se koristiti oznaka: $\|f\|_{g-\oplus_{r_n}} = \int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f\odot dm_n.$

Teorema 4.8 *Ako niz m_n, $n\in\mathbb{N}$ $\oplus_{r_n}$-dekompozabilnih mera* LD *konvergira po stopi $g-r_n$ ka* sup-*dekompozabilnoj meri m, tada važi:*

(a) *za svaki otvoren skup $O\subseteq[0,\infty]$ važi*
$$\liminf_{n\to\infty} m_n(O) \geq m(O), \tag{4.8}$$

(b) *za svaki zatvoren skup $F\subseteq[0,\infty]$ važi*
$$\limsup_{n\to\infty} m_n(F) \leq m(F). \tag{4.9}$$

<u>*Dokaz:*</u> Neka niz m_n, $n\in\mathbb{N}$ LD konvergira po stopi $g-r_n$ ka m.

(a) Neka je $O\subseteq[0,\infty]$ otvoren skup.

(a.1) Važi jednakost $\kappa_O(x) = \sup\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\le\kappa_O}} f(x)$, $x\in[0,\infty]$ jer:

* ako je $x\notin O$, odnosno $\kappa_O(x)=0$, tada za svako $f\in C_b^+([0,\infty])$ sa osobinom $f\le\kappa_O$ važi $f(x)=0$, tako da je jednakost $\kappa_O(x) = \sup\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\le\kappa_O}} f(x)$ očigledno zadovoljena,

* ako je $x\in O$, odnosno $\kappa_O(x)=\mathbf{1}$, tada iz činjenice da je $[0,\infty]$ prostor Tihonova i da je komplement $O^{\complement}$ skupa O zatvoren skup sledi da postoji neprekidna funkcija $\tilde f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ takva da je $\tilde f(x)=\mathbf{1}$ i $\tilde f(y)=0$, $y\in O^{\complement}$, te za funkciju

$$f_x(t)=\begin{cases} 0 & , \quad \tilde f(t)<0\\ \tilde f(t) & , \quad 0\le\tilde f(t)\le\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & , \quad \mathbf{1}<\tilde f(t)\end{cases}$$

važi $f_x\in C_b^+([0,\infty])$, $f_x\le\kappa_O$ i $f_x(x)=\mathbf{1}$, odakle sledi $\sup\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\le\kappa_O}} f(x)=\mathbf{1}$; stoga je jednakost $\kappa_O(x) = \sup\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\le\kappa_O}} f(x)$ zadovoljena i u slučaju $x\in O$.

(a.2) Koristeći osobinu (4.2) pseudo-integrala iz teorema 4.3 i teoremu 4.4 dobija se

$$m(O)=\int_{[0,\infty]}^{\sup}\kappa_O\odot dm=\int_{[0,\infty]}^{\sup}\left(\sup_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\le\kappa_O}} f\right)\odot dm=\sup_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\le\kappa_O}}\int_{[0,\infty]}^{\sup} f\odot dm.$$

(a.3) Iz prethodno dobijene jednakosti sledi da za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji funkcija $f_\varepsilon\in C_b^+([0,\infty])$ takva da je $f_\varepsilon\le\kappa_O$ i

$$m(O)-\varepsilon<\int_{[0,\infty]}^{\sup} f_\varepsilon\odot dm.$$

(a.4) Iz $0\le f_\varepsilon\le\kappa_O$ i na osnovu osobina (4.2) i (4.5) iz teoreme 4.3 sledi

$$m_n(O)=\int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}}\kappa_O\odot dm_n\ge\int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f_\varepsilon\odot dm_n.$$

(a.5) Pošto niz m_n, $n\in\mathbb{N}$ LD konvergira po stopi $g-r_n$ ka m, to granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f_\varepsilon\odot dm_n$ postoji, pa na osnovu prethodnog koraka sledi zaključak

$$\liminf_{n\to\infty} m_n(O)\ge\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty]}^{\oplus_{r_n}} f_\varepsilon\odot dm_n$$

(pri čemu $\lim\limits_{n\to\infty} m_n(O)$ ne mora da postoji).

(a.6) Iz prethodne nejednakosti i koraka (a.3), koristeći da m_n, $n \in \mathbb{N}$ LD konvergira po stopi $g - r_n$ ka m, sledi

$$m(O) - \varepsilon < \int_{[0,\infty]}^{\sup} f_\varepsilon \odot dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]}^{\oplus r_n} f_\varepsilon \odot dm_n \leq \liminf_{n\to\infty} m_n(O).$$

(a.7) Pošto je nejednakost $m(O) - \varepsilon < \liminf\limits_{n\to\infty} m_n(O)$ zadovoljena za proizvoljno $\varepsilon > 0$, sledi (4.8).

(b) Neka je $F \subseteq [0,\infty]$ zatvoren skup.

(b.1) Analogno se, kao pod (a), dokazuje $\kappa_F(x) = \inf\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\geq\kappa_F}} f(x)$, $x \in [0,\infty]$:

* ako je $x \in F$, tj. $\kappa_F(x) = \mathbf{1}$, tada je $\kappa_F(x) = \inf\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\geq\kappa_F}} f(x)$ očigledno zadovoljeno,

* u slučaju $x \notin F$, tj. kada je $\kappa_F(x) = 0$, tada za zatvoren skup F postoji neprekidna funkcija $\tilde{f} : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ takva da je $\tilde{f}(x) = 0$ i $\tilde{f}(y) = \mathbf{1}$, $y \in F$, te za funkciju

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \tilde{f}(t) < 0 \\ \tilde{f}(t) & , \quad 0 \leq \tilde{f}(t) \leq \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & , \quad \mathbf{1} < \tilde{f}(t) \end{cases}$$

važi $f_x \in C_b^+([0,\infty])$, $f_x \geq \kappa_F$ i $f_x(x) = 0$, odakle sledi $\inf\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\geq\kappa_F}} f(x) = 0$, tako da je jednakost $\kappa_F(x) = \inf\limits_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\geq\kappa_F}} f(x)$ tačna i u slučaju $x \notin F$.

(b.2) Koristeći osobinu (4.2) pseudo-integrala (teorema 4.3) i teoremu 4.5 dobija se

$$m(F) = \int_{[0,\infty]}^{\sup} \kappa_F \odot dm = \int_{[0,\infty]}^{\sup} \left(\inf_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\geq\kappa_F}} f \right) \odot dm = \inf_{\substack{f\in C_b^+([0,\infty])\\ f\geq\kappa_F}} \int_{[0,\infty]}^{\sup} f \odot dm.$$

(b.3) Iz prethodne jednakosti sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji neka funkcija $f_\varepsilon \in C_b^+([0,\infty])$ takva da je $f_\varepsilon \geq \kappa_F$ i

$$m(F) + \varepsilon > \int_{[0,\infty]}^{\sup} f_\varepsilon \odot dm.$$

(b.4) Iz $f_\varepsilon \geq \kappa_F$, koristeći osobine (4.2) i (4.5) pseudo-integrala iz teoreme 4.3 sledi

$$m_n(F) = \int_{[0,\infty]}^{\oplus r_n} \kappa_F \odot dm_n \leq \int_{[0,\infty]}^{\oplus r_n} f_\varepsilon \odot dm_n.$$

(b.5) Pošto niz m_n, $n \in \mathbb{N}$ LD konvergira po stopi $g - r_n$ ka m, to granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty]}^{\oplus r_n} f_\varepsilon \odot dm_n$ postoji, te iz prethodne nejednakosti sledi

$$\limsup_{n\to\infty} m_n(F) \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty]}^{\oplus r_n} f_\varepsilon \odot dm_n.$$

(b.6) Pošto m_n, $n \in \mathbb{N}$ LD konvergira po stopi $g - r_n$ ka m, iz prethodne nejednakosti i koraka (b.3) sledi

$$m(F) + \varepsilon > \int\limits_{[0,\infty]}^{\sup} f_\varepsilon \odot dm = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty]}^{\oplus r_n} f_\varepsilon \odot dm_n \geq \limsup_{n\to\infty} m_n(F).$$

(b.7) Konačno, pošto nejednakost $m(F) + \varepsilon > \limsup\limits_{n\to\infty} m_n(F)$ važi za proizvoljno $\varepsilon > 0$, sledi tvrđenje (4.9).

□

Imajući u vidu teoremu 3.25, nameću se neka pitanja.

Problem 4.1 *Da li u teoremi* 4.8 *važi i obratno, tj. da li iz iskaza pod* (a) *i* (b) *sledi da niz mera m_n, $n \in \mathbb{N}$* LD *konvergira po stopi $g - r_n$ ka m?*

Problem 4.2 *Da li nejednakosti* (4.8) *i* (4.9)*, tj. iskazi pod* (a) *i* (b) *teoreme* 4.8 *impliciraju sledeće iskaze:*

(A) *za svaku funkciju $h \in \underline{C}_b^+([0,\infty])$ važi*

$$\liminf_{n\to\infty} \|h\|_{g-r_n} \geq \int\limits_{[0,\infty]}^{\sup} h \odot dm, \tag{4.10}$$

(B) *za svaku funkciju $f \in \overline{C}_b^+([0,\infty])$ važi*

$$\liminf_{n\to\infty} \|f\|_{g-r_n} \leq \int\limits_{[0,\infty]}^{\sup} f \odot dm, \tag{4.11}$$

ili, pod kojim dodatnim uslovima to eventualno važi? Takođe, da li je tačno (ili pod kojim dodatnim uslovima) obratno tvrđenje?

Indeks

Bibliografija

[Ac90] A. de Acosta, *Large deviations for empirical measures of Markov chains*, J. Theoretical Prob., 3:395-431, 1990.

[Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York, 1966.

[Ak95] M. Akian, *Densities of idempotent measures and large deviations*, INRIA, Rapport de recherche, N 2534, Avril 1995.

[Ak295] M. Akian, *Theory of cost measures: convergence of decision variables*, INRIA research report 2611, 1995.

[Ak96] M. Akian, *On the continuity of the Cramer transform*, INRIA, Rapport de recherche, N 2841, Mars 1996.

[BaBr95] P. Barbe, M. Broniatowski, *Large deviation probability and local density of sets*, INRIA, Rapport de recherche, N 2630, Août 1995.

[BoElTu99] C. Boucher, R. S. Ellis and B. Turgington, *Spatializing Random measures: doubly indexed processes and the large deviation principle*, The Annals of Probability, 1999, Vol. 27, No. 1, 297-324.

[DeZe98] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Tehniques and Applications*, Springer - Verlag, New York, second edition, 1998.

[De89] J. D. Deuschel, *Invariance principle and empirical mean large deviations of the critical Orenstein-Uhlenbeck process*, Ann. Probab., 17:74-90, 1989.

[DeSt98] J. D. Deuschel, D. W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, San Diego, 1989.

[DoVa85] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan, *Large deviations for stationary Gaussian processes*, Comm. Math. Physics, 97: 187-210, 1985.

[DuEl97] P. Dupuis and R. S. Ellis, *A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations*, Wiley, New York, 1997.

[DuPr80] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and applications*, Academic Press, New York, 1980.

[DuPr88] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988.

[El95] R. S. Ellis, *An Overview of the Theory of Large Deviations and Applications to Statistical Mechanics*, Scandinavian Actuarial Journal, Number 1, pages 97–142 (1995).

[Fe49] W. Fenchel, *On the conjugate convex functions*, Canadian Journal of Mathematics, vol. 1. p. (1949), 73-77.

[Fo00] A. de La Fortelle, *Large Deviation Probability for Markov Chains in Continuous Time*, INRIA, Rapport de recherche, N 3877, Février 2000.

[FoFa99] A. de La Fortelle et G. Fayolle, *Large Deviation Probability for Markov Chains in Discrete Time*, INRIA, Rapport de recherche, N 3791, Novembre 1999.

[FrWe84] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random Pertubations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[HaOl90] O. Hadžić, *Odabrane medote teorije verovatnoće*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1990.

[KMP00] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[Ko96] A. Kolesarova, *Integration of real functions with respect to a $\oplus$-measure*, Math. Slovaca 46 (1996), 41-52.

[KoMa89] V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, *Idempotent calculus as the apparatus of optimization theory. I*, Functional. Anal. i Prilozhen 23, no. 1, (1989), 1-14.

[MaJo89] J. Mališić, *Slučajni procesi*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

[MaSa92] V. P. Maslov, S. N. Samborskij (Eds.), *Idempotent Analysis*, Advances in Soviet Mathematics 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[MePa99] R. Mesiar, E. Pap, *Idempotent integral as limit of g-integrals*, Fuzzi sets and systems 102 (1999) 385-392.

[MlPa95] P. Mladenović, *Verovatnoća i statistika*, VESTA, Matematički fakultet, Beograd, 1995.

[NeGrRa03] Lj. M. Nedović, T. Grbić, N. M. Ralević, *Large Deviation Principle*, 1st Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent System, September 19-20, 2003, Subotica, Serbia and Montenegro (2003), 233-244.

[NeRaGr04] Lj. M. Nedović, N. M. Ralević, T. Grbić, *Large deviation principle with generated pseudo measures*, Fuzzy Sets and Systems (u pripremi)

[Pa82] E. Pap, *Funkcionalna analiza*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1982.

[Pa90] E. Pap, *An integral generated by decomposable measure*, Univ. Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat. Fak. Ser. Mat. 20 (1) (1990) 135-144.

[Pa93] E. Pap, *g-calculus*, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 23,1 (1993), 145-156.

[Pa95] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[Pa02] E. Pap, *Pseudo-additive measures and their applications*, in Handbook of Measure Theory (Ed. E. Pap), Volume II, Elsevier, North Holland, 2002, 1403-1465.

[PaRa98] E. Pap, N. Ralević, *Pseudo-Laplace transform*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 33 (1998), 533-550.

[PaRa99] E. Pap, N. Ralević, *Pseudo operations on finite intervals*, Novi Sad J. Math. Vol. 29, No. 1, 1999, 1-6.

[Pu01] A. Puhalskii, *Large deviations and idempotent probability*, CHAPMAN & HALL/CRC, 2001.

[PuSp98] A. Puhalskii, V. Spokoiny, *On Large Deviation Efficiency in Statistical Inference*, Bernoulli, v. 4, no. 2, pp. 203-272, 1998.

[RaNeRa01] B. M. Ralević, Lj. M. Nedović, N. M. Ralević, *Modelling uncertainty on the problem of water exploitation*, EKO-konferencija 2001, Novi Sad, poglavlje u monografiji „Zaštita životne sredine gradova i prigradskih naselja”, Eko. pok. Novi Sad, II (2001), 343-347.

[Ra97] N. M. Ralević, *Pseudo-analysis and applications on solution nonlinear equations*, Ph. D. Thesis, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.

[Ra0] N. Ralević, *The pseudo-probability*, Zb. rad. Prim’98 (2000), 111-116.

[RaNeGr98] N. M. Ralević, Lj. M. Nedović, T. Grbić, *Fuzzy Methods for the treatment of Experimental Data*, 3^{rd} International Symposium Interdisciplinary Regional Research (1998), 37-40.

[RaNe99] N. M. Ralević, Lj. M. Nedović, *The Probability Defined on Semirings*, Bulletins for Applied and Computing Mathematics (BAM) (1999) 7-14

[RaGrNe00] N. Ralević, T. Grbić, Lj. Nedović, *A law of large numbers in the pseudo-probability spaces*, Zb. rad. Prim’98, 117-120, 2000.

[RGMNR02] N. M. Ralević, T. Grbić, B. Mihailović, Lj. M. Nedović, M. Roca, *Law of Large Numbers in the Pseudo-Probability Spaces and Its Application*, 6^{th} International Symposium Interdisciplinary Regional Research, Hungary-Romania-Yugoslavia, 2002.

[RaNeGr04] N. M. Ralević, Lj. M. Nedović, T. Grbić, *The pseudo-linear superposition principle for nonlinear partial differential equations and representation of their solution by the pseudo-integral*, Fuzzy Sets and Systems (u pripremi).

[RuWa87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1987.

[Sa61] I. N. Sanov, *On the probability of large deviations of random variables*, Selected transl. Math. Statist. and Prob., 1:214-244, 1961.

[ScSk83] B. Schwizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier-North Holland, New York, 1983.

[SeYu01] T. Seppäläinen, J.E. Yukich, *Large deviation principles for Euclidian functionals and other nearly additive processes*, Probab. Theory Relat. Fields 120, 309-345, 2001.

[VaSRS66] S. R. S. Varadhan, *Asymptotic probabilities and differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 19:261-286, 1966.