2 Funkcije rastojanja

Definicija 1 *Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija $d : X^2 \to [0,\infty)$ je funkcija rastojanja ukoliko važi*

(d01) $\forall x \in X,\ d(x,x) = 0,$ (refleksivnost)

(d02) $\forall x,y \in X,\ d(x,y) = d(y,x).$ (simetričnost)

Funkcija rastojanja $d : X^2 \to [0,\infty)$ može da ima i neke od sledećih dodatnih osobina.

(d03) $\forall x,y \in X,\ d(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y.$ (jednoznačnost)

(d04) $\forall x,y,z \in X,\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$ (nejednakost trougla)

(d05) $\forall x,y,z \in X,\ d(x,z) \le \max(d(x,y), d(y,z)).$ (ultrametrička nejednakost)

(d06) $\exists C \in [1,\infty),\ \forall x,y,z \in X,\ d(x,z) \le C \cdot (d(x,y) + d(y,z)).$ (C-nejedn. trougla)

(d07) $\exists C \in [1,\infty),\ \forall x,y,z \in X,\ x \neq z\ \Rightarrow\ 0 < d(x,z) \le C \cdot \max\{d(x,y), d(y,z)\}.$
(slaba C-ultrametrička nejednakost)

(d08) $\exists D \in [0,\infty),\ \forall x,y \in X,\ d(x,y) \le D.$ (ograničenost)

Definicija 2 *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, i neka je $f : X \to [0,\infty)$.*

- *Funkcija f je subaditivna ako za sve $x,y \in X$ važi $f(x+y) \le f(x) + f(y)$.*
- *Funkcija f je superaditivna ako za sve $x,y \in X$ važi $f(x+y) \ge f(x) + f(y)$.*
- *Funkcija f je pozitivno subhomogena ako za sve $x \in X$ i svako $t \ge 0$ važi da je $f(tx) \le t f(x)$.*
- *Funkcija f je pozitivno superhomogena ako za sve $x \in X$ i svako $t \ge 0$ važi da je $f(tx) \ge t f(x)$.*

1. Na vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ je funkcija $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ definisana sa
$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|.$$
Dokazati da je funkcija d metrika na skupu $\mathbb{R}^n$, tj. da važi

(d01) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y,$

(d02) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = d(y,x),$

(d03) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n,\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$

Rešenje: Posmatrajmo proizvoljne elemente $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ i $z = (z_1,\dots,z_n)$ prostora $\mathbb{R}^n$.

(d01) $d(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i-y_i|=0,$

$\Leftrightarrow \quad \forall i\in\{1,\dots,n\},\ |x_i-y_i|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i=y_i$

$\Leftrightarrow \quad x=y.$

(d02) $d(x,y)=\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}|x_i-y_i|=\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}|y_i-x_i|=d(y,x),$

(d03) Za proizvoljne $a,b\in\mathbb{R}$ važi poznata nejednakost trougla $|a+b|\le|a|+|b|$, te dobijamo

$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ |x_i-z_i|=|(x_i-y_i)+(y_i-z_i)|\le|x_i-y_i|+|y_i-z_i|$

a odatle sledi

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}|x_i-z_i|\le\max_{i\in\{1,\dots,n\}}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|). \qquad [*]$$

Dokažimo da za proizvoljne n-torke $a_i,\ i\in\{1,\dots,n\}$ i $b_i,\ i\in\{1,\dots,n\}$ realnih brojeva važi

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}(a_i+b_i)\le\max_{i\in\{1,\dots,n\}}a_i+\max_{i\in\{1,\dots,n\}}b_i.$$

Neka je $\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}a_i=a_{i_0}$ za neko $i_0\in\{1,\dots,n\}$ i $\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}b_i=b_{j_0}$ za neko $j_0\in\{1,\dots,n\}$. Tada je $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ a_i\le a_{i_0}$ i $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ b_i\le b_{j_0}$. Sledi da je $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ a_i+b_i\le a_{i_0}+b_{j_0}$, te je

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}(a_i+b_i)\le a_{i_0}+b_{j_0}=\max_{i\in\{1,\dots,n\}}a_i+\max_{i\in\{1,\dots,n\}}b_i.$$

Primenom ove nejednakosti u $[*]$ dobijamo

$$\begin{aligned}\max_{i\in\{1,\dots,n\}}|x_i-z_i| &\le \max_{i\in\{1,\dots,n\}}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|)\\ &\le \max_{i\in\{1,\dots,n\}}|x_i-y_i|+\max_{i\in\{1,\dots,n\}}|y_i-z_i|,\end{aligned}$$

dakle $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.