FTN, MAS, Slučajni procesi, KOLOKVIJUM 1 26.02.2022.

1. U kutiji A se nalaze 2 bele i 5 crvenih kuglica, a u kutiji B se nalaze 4 bele i 4 crvene kuglice. Iz svake kutije se na slučajan način biraju po dve kuglice, a zatim se od ove 4 kuglice na slučajan način bira jedna. Ako se zna da je poslednja izabrana kuglica bele boje, koliko iznosi verovatnoća da ona potiče iz kutije B.

2. U kutiji se nalazi 6 belih i 2 crne kuglice. Strelac na slučajan način izvlači 3 kuglice i gađa metu onoliko puta koliko je belih kuglica izvukao. Pri svakom gađanju, udaljenost pogotka od centra mete ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu. Izračunati verovatnoću da će svi pogoci završiti u krugu poluprečnika 1 oko centra mete.

3. Slučajna promenljiva Y ima raspodelu određenu gustinom raspodele $\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad y \in [1,3] \\ 0 & , \quad y \notin [1,3] \end{cases}$, a slučajna promenljiva X pod uslovom $\{Y = y\}$ ima raspodelu određenu uslovnom gustinom $\varphi_{X|\{Y=y\}}(x) = \begin{cases} ye^{-yx} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$, $y \in [1,3]$. Izračunati funkciju raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y).

FTN, MAS, Slučajni procesi, KOLOKVIJUM 2 26.02.2022.

1. Mile ima tri automobila, crveni, plavi i zeleni. Svaki dan ide na posao jednim od svojih automobila. Ako nekog dana koristi crveni, sledećeg dana jednakoverovatno ide plavim ili zelenim. Ako nekog dana koristi plavi, sledećeg dana jednakoverovatno ide crvenim ili zelenim automobila. Ako nekog dana koristi zeleni, sutradan sigurno ide crvenim.
   (a) Napisati matricu prelaza sistema S_n koji predstavlja boju automobila kojim Mile ide na posao n-tog dana.
   (b) Koji automobil Mile koristi najčešće u proseku?

2. Na službi za obradu zahteva radi šalterska službenica Mica. Na svakih pola sata se podnese prosečno 5 novih zahteva i broj podnetih zahteva ima Poasonovu raspodelu. Vreme obrade jednog zahteva ima eksponencijalnu raspodelu i ono traje prosečno 5 minuta. Red za čekanje zahteva za obradu nema ograničenja.
   (a) Napisati brzine rađanja i umiranja opisanog sistema opsluživanja i izračunati očekivani broj zahteva u sistemu.
   (b) Koliko vremena (prosečno) ima Mica da popije kafu u toku smene od 6 sati?

3. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$, i neka je X_t, $t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U + t^2 V$. Naći sledeće karakteristike slučajnog procesa X_t:
   (a) matematičko očekivanje,
   (b) autokovarijansnu funkciju,
   (c) disperziju.

REŠENJA KOLOKVIJUMA 1

1. D - „izvučena je bela kuglica”, A - „izvučena kuglica je iz kutije A”, B - „izvučena kuglica je iz kutije B”.
   Događaji A i B čine potpun sistem događaja, a po postavci zadatka važi
   $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(D\mid A)=\frac{2}{7}$, $\mathsf{P}(D\mid B)=\frac{1}{2}$, te je
   $\mathsf{P}(D)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(D\mid A)+\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(D)B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{28}.$
   Na osnovu Bajesove formule je: $\mathsf{P}(B\mid D)=\frac{\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(D\mid B)}{\mathsf{P}(D)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{11}{28}}=\frac{7}{11}.$

2. Među 3 izvučene kuglice mogu da se nalaze jedna, dve ili tri bele kuglice (ne mogu sve tri izvučene biti crne jer se u kutiji nalaze samo dve crne). Označimo sa A_i, $i\in\{1,2,3\}$ događaj: „broj izvučenih belih kuglica je i”, a sa B događaj „svi hici će završiti u krugu poluprečnika 1 oko centra mete”. Kako direktno ili indirektno nije naznačeno drugačije, događaji A_i, $i\in\{1,2,3\}$ čine potpun sistem događaja gde je
   $$\mathsf{P}(A_1)=\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{3}{28},\quad \mathsf{P}(A_2)=\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{15}{28},\quad \mathsf{P}(A_3)=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{8}{3}}=\frac{10}{28}.$$
   Slučajna promenljiva koja predstavlja udaljenost pogotka od centra mete ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu, te verovatnoća da jedan pojedinačni ispaljeni hitac završi u krugu poluprečnika 1 oko centra mete iznosi
   $\mathsf{P}(X<1)=F_X(1)=1-e^{-1}$, te je: $\mathsf{P}(B\mid A_1)=1-e^{-1}$, $\mathsf{P}(B\mid A_2)=\left(1-e^{-1}\right)^2$, $\mathsf{P}(B\mid A_3)=\left(1-e^{-1}\right)^3$.
   Primenom formule totalne verovatnoće dobijamo
   $$\mathsf{P}(B)=\sum_{i=1}^{3}\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B\mid A_i)=\frac{3}{28}\left(1-e^{-1}\right)+\frac{15}{28}\left(1-e^{-1}\right)^2+\frac{10}{28}\left(1-e^{-1}\right)^3\approx 0.371993.$$

3. Po formuli (?????) je: $\varphi_{X,Y}(x,y)=\varphi_Y(y)\cdot\varphi_{X\mid\{Y=y\}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}ye^{-yx} & , \ x>0\land y\in[1,3]\\ 0 & , \ x\le 0\lor y\notin[1,3]\end{cases}$,

   te funkciju raspodele $F_{X,Y}(x,y)=\iint\limits_{t<x,\,u<y}\varphi_{X,Y}(t,u)\,dtdu=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_{X,Y}(t,u)\,dtdu$

   dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) dobijamo diskusijom po sledećim slučajevima.

   (1) Za $x<0$ ili $y<1$ je: $F_{X,Y}(x,y)=\iint\limits_{t<x,\,u<y}0\,dtdu=0.$

   (2) Za $x\ge 0$ i $1\le y\le 3$ je
   $$F_{X,Y}(x,y)=\int\limits_1^y\left(\int\limits_0^x\frac{1}{2}ue^{-ut}dt\right)du=\frac{1}{2}\int\limits_1^y u\left(\int\limits_0^x e^{-ut}dt\right)du\overset{[1]}{=}\frac{1}{2}\int\limits_1^y u\left(-\frac{1}{u}\right)\left(\int\limits_0^{-ux}e^zdz\right)du$$
   $$=-\frac{1}{2}\int\limits_1^y\left(e^z\Big|_0^{-ux}\right)du=-\frac{1}{2}\int\limits_1^y\left(e^{-ux}-1\right)du=-\frac{1}{2}\int\limits_1^y e^{-ux}du+\frac{1}{2}\int\limits_1^y du=\ldots$$

   (2.1) za $x=0$ je: $\cdots=-\frac{1}{2}\int\limits_1^y du+\frac{1}{2}\int\limits_1^y du=0,$

   (2.2) a za $x>0$: $\ldots\overset{[2]}{=}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\int\limits_{-x}^{-yx}e^zdu+\frac{1}{2}u\Big|_1^y=\frac{1}{2x}e^z\Big|_{-x}^{-yx}+\frac{1}{2}(y-1)=\frac{1}{2x}\left(e^{-yx}-e^{-x}\right)+\frac{1}{2}(y-1).$

   (3) Za $x\ge 0$ i $3<y$ je
   $$F_{X,Y}(x,y)=\int\limits_1^3\left(\int\limits_0^x\frac{1}{2}ue^{-ut}dt\right)du=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u\left(\int\limits_0^x e^{-ut}dt\right)du$$
   $$\overset{[1]}{=}\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u\left(-\frac{1}{u}\right)\left(\int\limits_0^{-ux}e^zdz\right)du=-\frac{1}{2}\int\limits_1^3\left(e^{-ux}-1\right)du=-\frac{1}{2}\int\limits_1^3 e^{-ux}du+\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du=\ldots$$

   (3.1) za $x=0$ je: $\cdots=-\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du+\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du=0,$

   (3.2) a za $x>0$: $\ldots\overset{[3]}{=}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\int\limits_{-x}^{-3x}e^zdu+\frac{1}{2}u\Big|_1^3=\frac{1}{2x}e^z\Big|_{-x}^{-3x}+\frac{1}{2}(3-1)=\frac{1}{2x}\left(e^{-3x}-e^{-x}\right)+1.$

[1] - Smenom $z=-ut$, $dt=-\frac{1}{u}dz$ (gde je $u\in[1,y]\subseteq[1,3]$), uz promenu granica $t=0\mapsto z=0$, $t=x\mapsto z=-ux$.

[2] - U prvom integralu smenom $z=-ux$, $du=-\frac{1}{x}dz$ (gde je $x>0$), uz promenu granica $u=1\mapsto z=-x$, $u=y\mapsto z=-yx$.

[3] - U prvom integralu smenom $z=-ux$, $du=-\frac{1}{x}dz$ (gde je $x>0$), uz promenu granica $u=1\mapsto z=-x$, $u=3\mapsto z=-3x$.

Dakle, tražena funkcija raspodele je

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le 0\vee y\le 1\\ \frac{1}{2x}\left(e^{-yx}-e^{-x}\right)+\frac{1}{2}(y-1) & , \quad 0<x\wedge 1<y\le 3\\ \frac{1}{2x}\left(e^{-3x}-e^{-x}\right)+1 & , \quad 0<x\wedge 3<y\end{cases}.$$

REŠENJA KOLOKVIJUMA 2

1. Označimo sa c, p i z stanja sistema redom po crvenoj, plavoj i zelenoj boji automobila.

   (a) Na osnovu opisa sledi da je matrica prelaza

$$P=\begin{array}{c} \\ c\\ p\\ z\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} c & p & z\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}.$$

   (b) Koji automobil koliko koristi Mile u proseku možemo modelirati finalnim verovatnoćama $x,y,z\in[0,1]$, gde je $x+y+z=1$. Dobijamo ih rešavanjem odgovarajućeg sistema linearnih jednačina. $([\,x\ y\ z\,]\cdot P=[\,x\ y\ z\,]\ \wedge\ x+y+z=1)$

$$\Leftrightarrow\ \begin{array}{rcrcrcl} & & \frac{1}{2}y & + & z & = & x\\ \frac{1}{2}x & & & & & = & y\\ \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & & & = & z\\ x & + & y & + & z & = & 1\end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \frac{1}{2}y & + & z & = & 0\\ \frac{1}{2}x & - & y & & & = & 0\\ \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & - & z & = & 0\\ x & + & y & + & z & = & 1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \frac{1}{2}y & + & z & = & 0\\ \frac{1}{2}x & - & y & & & = & 0\\ -\frac{1}{2}x & + & y & & & = & 0\\ 2x & + & \frac{1}{2}y & & & = & 1\end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \frac{1}{2}y & + & z & = & 0\\ \frac{1}{2}x & - & y & & & = & 0\\ \frac{9}{4}x & & & & & = & 1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x=\tfrac{4}{9},\ y=\tfrac{2}{9},\ z=\tfrac{3}{9}\right).$$

   Najveću od finalnih verovatnoća ima vrednost $x=\frac{4}{9}$, što znači da Mile najčešće koristi crveni automobil.

2. Posmatrani sistem masovnog usluživanja je tipa $M|M|1|\infty$ (jedno mesto za usluživanje tj. šalter, a red za čekanje je beskonačan). Neka je vremenska jedinica $30min=\frac{1}{2}h$.

   (a) Vreme V obrade jednog zahteva ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu. Kako je za obradu jednog zahteva prosečno potrebno 5 minuta (tj. $\frac{1}{6}$ sata, sledi da je $\mathsf{E}(V)=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{6}$, odakle je $\mu=6$. Broj podnetih zahteva W tokom pola sata ima Poasonovu $\mathcal{P}o(\lambda)$ raspodelu, gde je prosečan broj novih zahteva tokom pola sata $\mathsf{E}(W)=\lambda=5$. Stanja sistema su $0,1,2,3,\ldots$. Matrica koja određuje opisani sistem opsluživanja je

$$\Lambda=\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ 6 & -11 & 5 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 6 & -11 & 5 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & 6 & -11 & 5 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}.$$

   Nakon „beskonačno mnogo" vremena, broj klijenata (zahteva na čekanju za obradu) u sistemu je slučajna promenljiva X_∞ sa zakonom raspodele

   $p_n^*=\mathsf{P}(X_\infty=n)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

   gde su p_n^* finalne verovatnoće ovog sistema usluživanja, koje dobijamo rešavanjem sistema jednačina $p^*\cdot\Lambda=0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k^*=1$. Očekivani broj zahteva na čekanju u sistemu je (u proseku)

$$\mathsf{E}(X_\infty)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\overset{[1]}{=}\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=5.$$

[1] - Koristeći formulu za sumu reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, za $|x|<1$.

(b) Verovatnoća da Mica u nekom trenutku nema posla, tj. da nema zahteva na čekanju je $p_0^*=\dfrac{1}{6}$, te tokom smene od $6h$, Mica za kafenisanje u proseku ima na raspolaganju $6h\cdot\dfrac{1}{6}=1h$.

3. Kako slučajne promenljive U i V imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, sledi da je $\mathsf{E}(U)=\mathsf{E}(V)=0$ i $\mathsf{D}(U)=\mathsf{D}(V)=1$, a iz $\mathsf{D}(U)=\mathsf{E}\left(U^2\right)-(\mathsf{E}(U))^2$ dobijamo da je $\mathsf{E}\left(U^2\right)=\mathsf{D}(U)+(\mathsf{E}(U))^2=1+0=1$, i analogno $\mathsf{E}\left(V^2\right)=1$.

(a) $m_X(t)=\mathsf{E}\left(e^tU+t^2V\right)\overset{[1]}{=}e^t\mathsf{E}(U)+t^2\mathsf{E}(V)=e^t\cdot 0+t^2\cdot 0=0.$

(b)
$$\begin{aligned}\mathsf{K}_X(t,s)&=\mathsf{E}\left((X_t-m_X(t))(X_s-m_X(s))\right)=\mathsf{E}(X_tX_s)\\&=\mathsf{E}\left(\left(e^tU+t^2V\right)\left(e^sU+s^2V\right)\right)\\&=\mathsf{E}\left(e^{s+t}U^2+\left(e^ts^2+e^st^2\right)UV+t^2s^2V^2\right)\\&\overset{[1],[2]}{=}e^{s+t}\mathsf{E}\left(U^2\right)+\left(e^ts^2+e^st^2\right)\mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)+t^2s^2\mathsf{E}\left(V^2\right)\\&=e^{s+t}\cdot 1+0+(ts)^2\cdot 1=e^{s+t}+t^2s^2.\end{aligned}$$

(c) $\mathsf{D}_X(t)=\mathsf{K}_X(t,t)=e^{t+t}+(tt)^2=e^{2t}+t^4.$

[1] - Matematičko očekivanje je linearna transformacija.

[2] - Slučajne promenljive U i V su nezavisne, te je $\mathsf{E}(UV)=\mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)$.