FTN, MAS, Slučajni procesi, KOLOKVIJUM 1 **07.04.2022.**

1. Fabrika pravi tri modela patent-olovaka. Svaki dan se napravi 1000 olovaka modela M_1 i to podjednak broj olovaka bele i crvene boje. Olovaka modela M_2 se pravi 600 i to samo u beloj boji, a olovaka modela M_3 se pravi 400 i to u podjednakom broju olovaka bele, crvene, plave i zelene boje.
   (a) Koliko iznosi verovatnoća da će slučajno izabrana olovka biti bele boje?
   (b) Ako je slučajno izabrana olovka bele boje, koliko iznosi verovatnoća da je ona tipa M_2?

2. U procesu sabiranja brojeva, računar zaokružuje brojeve na najbliži ceo broj, pri čemu su greške zaokruživanja nezavisne jedna od druge i uniformno su raspodeljene na intervalu $[-0.5, 0.5]$.
   (a) Koliko približno iznosi verovatnoća da apsolutna vrednost ukupne greške pri sabiranju 1500 brojeva premaši 15?
   (b) Koliko se najviše brojeva može sabrati a da sa verovatnoćom 0.9 apsolutna vrednost greške bude manja od 10?

3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) je zadana svojim dvodimenzionalnim zakonom raspodele

X/Y	-1	2	3	7
2	0.12	0.07	0.10	0.01
3	0.04	0.02	0.05	0.04
5	0.24	0.22	0.01	0.08

   (a) Naći marginalne zakone raspodela slučajnih promenljivih X i Y, i ispitati njihovu nezavisnost.
   (b) Izračunati uslovni zakon raspodele za $X|\{Y=-1\}$.
   (c) Izračunati uslovni zakon raspodele za $X|\{Y \in \{-1,3\}\}$.
   (d) Izračunati uslovni zakon raspodele za $Y|\{X > 2.5\} = Y|\{X \in \{3,5\}\}$.

FTN, MAS, Slučajni procesi, KOLOKVIJUM 2 **07.04.2022.**

1. U frizerskom salonu radi jedna frizerka i u salonu ima 3 mesta za čekanje. Na svaki sat se u proseku pojave 3 mušterije u skladu sa Poasonovom raspodelom. Vreme usluživanja jedne mušterije ima eksponencijalnu raspodelu i prosečno traje 30 minuta.
   (a) Napisati brzine rađanja i umiranja opisanog sistema opsluživanja.
   (b) Izračunati očekivani broj mušterija u frizerskom salonu.

2. U kutiji X se nalaze 2 bele, a u kutiji Y se nalaze 3 crne kuglice. Izvođač eksperimenta pri jednom premeštanju kuglica nasumice vadi po jednu kuglicu iz svake kutije i zameni im mesta. Označimo sa X_n i Y_n redom broj belih kuglica u kutijama X i Y nakon n premeštanja ($n \in \{0,1,2,\dots\}$). Koje je najverovatnije stanje slučajnog procesa $\xi_n = X_n - Y_n$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$ nakon 4 premeštanja kuglica?

3. Izračunati matematičko očekivanje, disperziju i autokovarijansnu funkciju slučajnog procesa $X_t = \sum_{n=0}^{3} t^n U_n$, $t \in \mathbb{R}$, gde su $U_n : \mathcal{E}\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $n \in \{0,1,2,3\}$ nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnim raspodelama.

REŠENJA KOLOKVIJUMA 1

1. Označimo događaje:

   B - „slučajno izabrana olovka će biti bele boje",

   H_i - „slučajno izabrana olovka će biti tipa M_i", $i \in \{1,2,3\}$.

   Događaji H_i, $i \in \{1,2,3\}$ čine potpun sistem događaja, a po uslovu zadatka važi (ukupno se proizvodi 2000 olovaka)

   $$\mathsf{P}(H_1) = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{P}(H_2) = \frac{600}{2000} = \frac{3}{10}, \qquad \mathsf{P}(H_3) = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5},$$
   $$\mathsf{P}(B \mid H_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{P}(B \mid H_2) = 1, \qquad \mathsf{P}(B \mid H_3) = \frac{1}{4}.$$

   (a) Koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo
   $$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(B \mid H_i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{5}.$$

   (b) Traženu verovatnoću dobijamo primenom Bajesove formule:
   $$\mathsf{P}(H_2 \mid B) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(B \mid H_2)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot 1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

2. Neka je X_i, $i \in \mathbb{N}$ slučajna promenljiva koja predstavlja grešku pri zaokruživanju nakon i-tog sabiranja. Slučajne promenljive X_i, $i \in \mathbb{N}$ su uyajamno nezavisne, i svaka ima uniformnu $\mathcal{U}(-0.5;0.5)$ raspodelu. Slučajna promenljiva $U_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupnu grešku zaokruživanja pri sabiranju n brojeva, pri čemu je

   $$\mathsf{E}(X_i) = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0, \qquad \mathsf{D}(X_i) = \frac{(0.5-(-0.5))^2}{12} = \frac{1}{12},$$
   $$\mathsf{E}(U_n) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 0, \qquad \mathsf{D}(U_n) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = \frac{n}{12},$$

   a slučajna promenljiva $U_n^* = \dfrac{U_n - \mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}} = \dfrac{U_n}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{n}}$ na osnovu centralne granične teoreme ima približno normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu.

   (a)
   $$\begin{aligned}
   \mathsf{P}(|U_{1500}| > 15) &= 1 - \mathsf{P}(|U_{1500}| \le 15) = 1 - \mathsf{P}(-15 \le U_{1500} \le 15)\\
   &= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{-15-\mathsf{E}(U_{1500})}{\sqrt{\mathsf{D}(U_{1500})}} < \frac{U_{1500}-\mathsf{E}(U_{1500})}{\sqrt{\mathsf{D}(U_{1500})}} < \frac{15-\mathsf{E}(U_{1500})}{\sqrt{\mathsf{D}(U_{1500})}}\right)\\
   &= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{-15}{5\sqrt{5}} < U_{1500}^* < \frac{15}{5\sqrt{5}}\right) \approx 1 - \mathsf{P}(-1.34 < U_{1500}^* < 1.34)\\
   &\approx 1 - (\phi(1.34) - \phi(-1.34)) = 1 - (\phi(1.34) - (1-\phi(1.34)))\\
   &= 2 - 2\phi(1.34) \approx 2 - 2\cdot 0.9099 \approx 0.1802.
   \end{aligned}$$

   (b) Rešavamo po $n \in \mathbb{N}$ jednačinu $\mathsf{P}(|U_n| < 10) = 0.9$.
   $$\begin{aligned}
   &\mathsf{P}(|U_n| < 10) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(-10 < U_n < 10) = 0.9\\
   \Leftrightarrow \quad & \mathsf{P}\left(\frac{-10-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}} < \frac{U_n-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}} < \frac{10-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}}\right) = 0.9\\
   \Leftrightarrow \quad & \mathsf{P}\left(\frac{-20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} < U_n^* < \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) = 0.9\\
   \Leftrightarrow \quad & 2\phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.95\\
   \Leftrightarrow \quad & \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \approx \phi^{-1}(0.95) \approx 1.645 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx \frac{20\sqrt{3}}{1.645} \approx 21.0584\\
   \Leftrightarrow \quad & n \approx 21.0584^2 \approx 443.4549.
   \end{aligned}$$

   Dakle, najviše 443 broja možemo sabrati pa da se sa približnom verovatnoćom 0.9 ne prekorači zadana apsolutna greška 10.

3. (a) Sabiranjem verovatnoća po vrstama i kolonama tablice dobijamo marginalne zakone raspodela slučajnih promenljivih X i Y: $X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0.30 & 0.15 & 0.55 \end{pmatrix}$, $Y : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0.40 & 0.31 & 0.16 & 0.13 \end{pmatrix}$

Slučajne promenljive X i Y nisu nezavisne jer je npr. $\mathsf{P}(X=3,Y=-1) = 0.04 \neq \mathsf{P}(X=3)\cdot\mathsf{P}(Y=-1) = 0.06$.

(b) Po definiciji uslovnih verovatnoća dobijamo

$$\mathsf{P}(X=2 \mid Y=-1) = \frac{\mathsf{P}(X=2,Y=-1)}{\mathsf{P}(Y=-1)} = \frac{0.12}{0.40} = \frac{3}{10},$$

$$\mathsf{P}(X=3 \mid Y=-1) = \frac{\mathsf{P}(X=3,Y=-1)}{\mathsf{P}(Y=-1)} = \frac{0.04}{0.40} = \frac{1}{10},$$

$$\mathsf{P}(X=5 \mid Y=-1) = \frac{\mathsf{P}(X=5,Y=-1)}{\mathsf{P}(Y=-1)} = \frac{0.24}{0.40} = \frac{6}{10}.$$

Dakle, zakon raspodele uslovne slučajne promenljive $X|\{Y=-1\}$ glasi $X|\{Y=-1\} : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix}$.

(c) Izračunajmo uslovni zakon raspodele za $X|\{Y\in\{-1,3\}\}$, gde je

$\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\}) = \mathsf{P}(Y=-1)+\mathsf{P}(Y=3) = 0.40+0.16 = 0.56$.

Po definiciji uslovnih verovatnoća dobijamo

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=2 \mid Y\in\{-1,3\}) &= \frac{\mathsf{P}(X=2,Y\in\{-1,3\})}{\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\})} \\ &= \frac{\mathsf{P}(X=2,Y=-1)+\mathsf{P}(X=2,Y=3)}{\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\})} = \frac{0.12+0.10}{0.56} = \frac{0.22}{0.56},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=3 \mid Y\in\{-1,3\}) &= \frac{\mathsf{P}(X=3,Y\in\{-1,3\})}{\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\})} \\ &= \frac{\mathsf{P}(X=3,Y=-1)+\mathsf{P}(X=3,Y=3)}{\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\})} = \frac{0.04+0.05}{0.56} = \frac{0.09}{0.56},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=5 \mid Y\in\{-1,3\}) &= \frac{\mathsf{P}(X=5,Y\in\{-1,3\})}{\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\})} \\ &= \frac{\mathsf{P}(X=5,Y=-1)+\mathsf{P}(X=5,Y=3)}{\mathsf{P}(Y\in\{-1,3\})} = \frac{0.24+0.01}{0.56} = \frac{0.25}{0.56}.\end{aligned}$$

Dakle, zakon raspodele uslovne slučajne promenljive $X|\{Y\in\{-1,3\}\}$ glasi

$$X|\{Y\in\{-1,3\}\} : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \frac{0.22}{0.56} & \frac{0.09}{0.56} & \frac{0.25}{0.56} \end{pmatrix}.$$

(d) Za uslovnu slučajnu promenljivu $Y|\{X>2.5\} = Y|\{X\in\{3,5\}\}$ je

$\mathsf{P}(X\in\{3,5\}) = \mathsf{P}(X=3)+\mathsf{P}(X=5) = 0.15+0.55 = 0.7$,

te je

$$\mathsf{P}(Y=j \mid X\in\{3,5\}) = \frac{\mathsf{P}(Y=j,X\in\{3,5\})}{\mathsf{P}(X\in\{3,5\})} = \frac{\mathsf{P}(X=3,Y=j)+\mathsf{P}(X=5,Y=j)}{0.7}$$

za sve $j\in\mathcal{R}_Y = \{-1,2,3,7\}$. Na taj način dobijamo uslovni zakon raspodele

$$Y|\{X>2.5\} : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ \frac{0.28}{0.7} & \frac{0.24}{0.7} & \frac{0.06}{0.7} & \frac{0.12}{0.7} \end{pmatrix}.$$

REŠENJA KOLOKVIJUMA 2

1. Ovaj sistem masovnog usluživanja sa otkazom je tipa $M|M|1|3$. Neka je vremenska jedinica 1 sat.

   (a) Vreme V usluživanja jedne mušterije ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu gde je $\mathsf{E}(V) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$, tj. $\mu = 2$. Broj mušterija W koji pristižu u salon tokom jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}o(\lambda)$ raspodelu i $\mathsf{E}(W) = \lambda = 3$. Stanja sistema su $0,1,2,3,4$. Matrica koja određuje opisani sistem opsluživanja je

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & & \mu & -\mu \end{bmatrix}_{(k+m+1)\times(k+m+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{5\times 5}.$$

   (b) Finalne verovatnoće $p^* = [\, p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^* \;\; p_4^* \,]$ dobijamo rešavanjem sistema jednačina $p^* \cdot \Lambda = 0$, $\sum_{n=0}^{4} p_n^* = 1$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\hline
-3p_0^* & + & 2p_1^* & & & & & & & = & 0 \\
3p_0^* & - & 5p_1^* & + & 2p_2^* & & & & & = & 0 \\
 & & 3p_1^* & - & 5p_2^* & + & 2p_3^* & & & = & 0 \\
 & & & & 3p_2^* & - & 5p_3^* & + & 2p_4^* & = & 0 \\
 & & & & & & 3p_3^* & - & 2p_4^* & = & 0 \\
p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & + & p_4^* & = & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-3p_0^* & + & 2p_1^* & & & & & & & = & 0 \\
 & & -3p_1^* & + & 2p_2^* & & & & & = & 0 \\
 & & & - & 3p_2^* & + & 2p_3^* & & & = & 0 \\
 & & & & & - & 3p_3^* & + & 2p_4^* & = & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{211}{81}p_4^* & = & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$p_4^* = \dfrac{81}{211}$, $p_3^* = \dfrac{54}{211}$, $p_2^* = \dfrac{36}{211}$, $p_1^* = \dfrac{24}{211}$, $p_0^* = \dfrac{16}{211}$.

Nakon „dovoljno dugo” vremena, broj mušterija u sistemu je slučajna promenljiva X_∞ sa zakonom raspodele $\mathsf{P}(X_\infty = n) = p_n^*$, $n \in \{0,1,2,3,4\}$,

odnosno $X_\infty : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{16}{211} & \frac{24}{211} & \frac{36}{211} & \frac{54}{211} & \frac{81}{211} \end{pmatrix}$.

Očekivani broj kupaca u sistemu je

$$\mathsf{E}(X_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n^* = \frac{24}{211} + 2\frac{36}{211} + 3\frac{54}{211} + \frac{81}{211} = \frac{582}{211} \approx 3.$$

2. Primetimo da slučajne promenljive (slučajni proces) Y_n možemo predstaviti kao $Y_n = 2 - X_n$ odakle je

$$\xi_n = X_n - (2 - X_n) = 2X_n - 2$$

(slučajni proces ξ_n je linearna transformacija procesa X_n). Moguće vrednosti slučajnog procesa X_n su 0, 1 i 2, odakle sledi da je skup stanja procesa ξ_n skup $\{-2,0,2\}$, a verovatnoće prelaska procesa ξ_n glase

$$p_{i,j} = \mathsf{P}(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i) = \mathsf{P}(2X_{n+1} - 2 = j \mid 2X_n - 2 = i)$$
$$= \mathsf{P}\left(X_{n+1} = \frac{j}{2} + 1 \mid X_n = \frac{i}{2} + 1\right),$$

za $i, j \in \{-2,0,2\}$. Dakle

$$p_{-2,-2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$p_{-2,0} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$p_{-2,2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 0) = 0,$$

$$p_{0,-2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6},$$

$$p_{0,0} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{6},$$

$p_{0,2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,
$p_{2,-2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2) = 0$,
$p_{2,0} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2) = 1$,
$p_{2,2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2) = 0$,

i time smo dobili matricu prelaza (za jedno premeštanje), a zatim nalazimo matricu prelaza $P(4) = P^4 = \left(P^2\right)^2$ za 4 premeštanja:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad P(4) = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{66}{216} & \frac{127}{216} & \frac{23}{216} \end{bmatrix}.$$

Početni broj beli kuglica u kutiji X je 2, pa početno stanje procesa ξ iznosi
$\xi_0 = 2X_0 - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$,

odnosno vektor početne raspodele verovatnoća glasi: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$.
Vektor raspodele verovatnoća nakon 4 premeštanja:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0) \cdot P^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{66}{216} & \frac{127}{216} & \frac{23}{216} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Prema tome, nakon 4 premeštanja se proces ξ najverovatnije nalazi u stanju 0.

3. $U_n : \mathcal{E}\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\qquad \mathsf{E}(U_n) = \frac{1}{\frac{1}{2^n}} = 2^n$, $\qquad \mathsf{D}(U_n) = \frac{1}{\frac{1}{(2^n)^2}} = 2^{2n}$,
$\mathsf{E}\left(U_n^2\right) = \mathsf{D}(U_n) + (\mathsf{E}(U_n))^2 = 2^{2n+1}$.

Matematičko očekivanje:

$$m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n U_n\right) \overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^{3} t^n \mathsf{E}(U_n) = \sum_{n=0}^{3} 2^n t^n = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3.$$

Autokovarijansna funkcija:

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_X(t,s) &= \mathsf{E}((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))) = \\
&= \mathsf{E}\left(\left(\sum_{n=0}^{3} t^n U_n - \sum_{n=0}^{3} 2^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{3} s^n U_n - \sum_{n=0}^{3} 2^n s^n\right)\right) \\
&= \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n (U_n - 2^n) \cdot \sum_{n=0}^{3} s^n (U_n - 2^n)\right) \\
&= \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n (U_n - \mathsf{E}(U_n)) \cdot \sum_{n=0}^{3} s^n (U_n - \mathsf{E}(U_n))\right) \\
&\overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^{3} t^n s^n \mathsf{E}\left((U_n - \mathsf{E}(U_n))^2\right) + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{3} t^n s^m \mathsf{E}((U_n - 2^n)(U_m - 2^m)) \\
&\overset{[2]}{=} \sum_{n=0}^{3} t^n s^n \mathsf{D}(U_n) + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{3} t^n s^m \mathsf{E}(U_n - 2^n)\,\mathsf{E}(U_m - 2^m) \\
&= \sum_{n=0}^{3} 2^{2n} (ts)^n + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{3} t^n s^m \cdot 0 \cdot 0 = 1 + 4(ts) + 16(ts)^2 + 64(ts)^3.
\end{aligned}$$

Disperzija:

Prvi način: koristeći osobine disperzije dobijamo

$$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{D}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n U_n\right) \overset{[2]}{=} \sum_{n=0}^{3} (t^n)^2 \mathsf{D}(U_n) = \sum_{n=0}^{3} 2^{2n} t^{2n} = 1 + 4t^2 + 16t^4 + 64t^6.$$

Drugi način: koristeći autokovarijansnu funkciju dobijamo

$$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = 1 + 4t^2 + 16\left(t^2\right)^2 + 64\left(t^2\right)^3 = 1 + 4t^2 + 16t^4 + 64t^6.$$

[1] - Matematičko očekivanje je linearna funkcija.

[2] - Slučajne promenljive U_n, $n \in \{0,1,2,3\}$ su uzajamno nezavisne.