1. Neka je po konvenciji $\inf \emptyset = 0$ i $\sup \emptyset = 0$. Neka je $X = [0, \infty)$, i neka je funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definisana sa
$$m(A) = \sup A - \inf A, \quad A \in \mathcal{P}(X).$$
   (a) Dokazati da je m fazi mera u širem smislu.
   (b) Dokazati da je fazi mera m neprekidna od dole.

2. Neka je $X = [0, \infty)$, i neka je skupovna funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definisana sa
$$m(A) = \begin{cases} 0 & , \quad A = \emptyset \\ \sup A & , \quad A \neq \emptyset \end{cases}.$$
Dokazati da je m fazi mera u širem smislu, i izračunati Šokeov integral funkcije
$$f : X \to [0, \infty), \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \quad x \in (0, \infty) \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$
u odnosu na fazi meru m, koristeći konvenciju da je $\int\limits_c^c \infty \cdot d\alpha = 0$.

3. Neka je $X = \{a, b, c, d\}$, i neka je fazi mera $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definisana sa
$$m : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{d\} \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad m(A) = \begin{cases} 0 & , \quad A = \emptyset \\ \max\limits_{x \in A} m(\{x\}) & , \quad A \neq \emptyset \end{cases}.$$
Izračunati Šokeov integral funkcije $m : X \to [0, \infty)$ definisane sa $f : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 11 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

REŠENJA

1. Za svako $A \in \mathcal{P}(X)$ postoje $\inf A$ i $\sup A$ (gde je $\inf \emptyset = 0$ i $\sup \emptyset = 0$). Pri tome zbog $A \in \mathcal{P}(X)$ imamo da je $\inf A \in [0, \infty)$ i $\sup A \in [0, \infty]$.

   (a) Dokazujemo da za m važe aksiome [FM01] i [FM02] fazi mere.

   [FM01] Po usvojenoj konvenciji je $m(\emptyset) = \sup \emptyset - \inf \emptyset = 0 - 0 = 0$.

   [FM02] Iz $A \subseteq B$ očigledno sledi da je $\inf A \geq \inf B$ i $\sup A \leq \sup B$. Pri tome iz nejednakosti $\inf A \geq \inf B$ sledi da je $-\inf A \leq -\inf B$. Sabiranjem nejednakosti $\sup A \leq \sup B$ i $-\inf A \leq -\inf B$ dobijamo da važi nejednakost $\sup A - \inf A \leq \sup B - \inf B$, odnosno $m(A) \leq m(B)$.

   (b) Neka je $A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ niz skupova takav da je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, i neka je $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

   Dokažimo da je $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$. Neka je $x_n = \inf A_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $x = \inf A$, i s druge strane neka je $y_n = \sup A_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $y = \sup A$. Dokazaćemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, odakle će tada da sledi

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} m(A_n) &= \lim_{n\to\infty} (\sup A_n - \inf A_n) = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= y - x = \sup A - \inf A = m(A).\end{aligned}$$

   (b.1) Iz $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A$, po definiciji infimuma je $\inf A_1 \geq \inf A_2 \geq \inf A_3 \geq \ldots \geq \inf A$ odnosno $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x$. Dakle, x_n, $n \in \mathbb{N}$ je monotono nerastući niz nenegativnih realnih brojeva, te postoji $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Pri tome je $x \geq 0$. Iz $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x$ sledi da je $x \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ i preostaje da dokažemo da važi striktna jednakost. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$, i pretpostavimo suprotno, da je $x < s$. Kako je $x = \inf A$, to postoji $t \in \mathbb{R}$ takvo da je $x < t < s$ i $t \in A$. Iz $t \in A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $t \in A_{n_0}$. Međutim, iz $t \in A_{n_0}$ sledi da je $x_{n_0} = \inf A_{n_0} \leq t$, a tada zbog $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$ dobijamo da je $s = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq x_{n_0} \leq t$, što je u kontradikciji sa $x < t < s$.

   (b.2) Iz $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A$, na osnovu definicije supremuma sledi da važe nejednakosti $\sup A_1 \leq \sup A_2 \leq \sup A_3 \leq \ldots \leq \sup A$ odnosno $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y$. Dakle, y_n, $n \in \mathbb{N}$ je monotono neopadajući niz nenegativnih realnih brojeva, te stoga postoji $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Pri tome važi da je $y \in [0, \infty]$. Iz $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y$ sledi da je $y \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ i preostaje da dokažemo da važi striktna jednakost. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = s$, i pretpostavimo suprotno, da je $s < y$. Kako je $y = \sup A$, to postoji $t \in \mathbb{R}$ takvo da je $s < t < y$ i $t \in A$. Iz $t \in A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $t \in A_{n_0}$. Međutim, iz $t \in A_{n_0}$ sledi da je $y_{n_0} = \sup A_{n_0} \geq t$, a tada zbog $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots$ dobijamo da je $s = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq y_{n_0} \geq t$, što je u kontradikciji sa $s < t < y$.

2. Po definiciji je $m(\emptyset) = 0$, a iz definicije supremuma sledi da $A \subseteq B$ implicira $\sup A \leq \sup B$ odnosno $m(A) \leq m(A)$, gde smatramo da je $\sup \emptyset = 0$.

   Za $\alpha \in [0, \infty)$ imamo da je

   - $F_0 = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{0\} \cup \left\{x \in (0, \infty) \mid \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 0\right\} = [0, \infty)$,
   - a za $\alpha > 0$ je
     $F_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} = \left\{x \in (0, \infty) \mid \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq \alpha\right\} = \left\{x \in (0, \infty) \mid x \leq \dfrac{1}{\alpha^2}\right\} = \left(0, \dfrac{1}{\alpha^2}\right]$.

   Pri tome je

   - $m(F_0) = m([0, \infty)) = \sup [0, \infty) = \infty$,
   - a za $\alpha > 0$ je $m(F_\alpha) = m\left(\left(0, \dfrac{1}{\alpha^2}\right]\right) = \sup \left(0, \dfrac{1}{\alpha^2}\right] = \dfrac{1}{\alpha^2}$,

te dobijamo

$$(C)\int f dm=\int\limits_0^{\infty} m\left(F_\alpha\right)d\alpha=\int\limits_0^0 \infty\cdot d\alpha+\int\limits_{(0,\infty)}\frac{1}{\alpha^2}d\alpha=0+\int\limits_{(0,\infty)}\alpha^{-2}d\alpha$$

$$=\lim_{\substack{t\to o^+\\ s\to\infty}}\int\limits_t^s\alpha^{-2}d\alpha=\lim_{\substack{t\to o^+\\ s\to\infty}}\frac{\alpha^{-1}}{-1}\Big|_t^s=-\lim_{\substack{t\to o^+\\ s\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\Big|_t^s=-\left(\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}-\lim_{t\to o^+}\frac{1}{t}\right)=-\left(0-\infty\right)=\infty.$$

3. Sortirajmo elemente skupa X po neopadajućem poretku vrednosti funkcije f u tačkama skupa X, sa fiktivnim elementom x_0 za koji je $f\left(x_0\right)=0$. Tako dobijamo

$$f:\begin{pmatrix} x_0 & x_1=c & x_2=d & x_3=b & x_4=a\\ 0 & 5 & 7 & 8 & 11\end{pmatrix}.$$

Koristeći formulu

$$(C)\int\limits_X f dm=\sum_{i=1}^{4}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\cdot m\left(\{x_i,x_{i+1},\ldots,x_4\}\right)$$

za izračunavanje Šokeovog integrala nad konačnim skupom dobijamo

$$(C)\int\limits_X f dm=\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)\right)\cdot m\left(\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\right)+\left(f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right)\cdot m\left(\{x_2,x_3,x_4\}\right)$$

$$+\left(f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)\right)\cdot m\left(\{x_3,x_4\}\right)+\left(f\left(x_4\right)-f\left(x_3\right)\right)\cdot m\left(\{x_4\}\right)$$

$$=(5-0)\cdot m\left(\{c,d,b,a\}\right)+(7-5)\cdot m\left(\{d,b,a\}\right)$$

$$+(8-7)\cdot m\left(\{b,a\}\right)+(11-8)\cdot m\left(\{a\}\right)$$

$$=5\cdot\max\left\{m\left(\{c\}\right),m\left(\{d\}\right),m\left(\{b\}\right),m\left(\{a\}\right)\right\}+2\cdot\max\left\{m\left(\{d\}\right),m\left(\{b\}\right),m\left(\{a\}\right)\right\}$$

$$+1\cdot\max\left\{m\left(\{b\}\right),m\left(\{a\}\right)\right\}+3\cdot\max\left\{m\left(\{a\}\right)\right\}$$

$$=5\cdot\max\{5,4,0,3\}+2\cdot\max\{4,0,3\}+1\cdot\max\{0,3\}+3\cdot\max\{3\}$$

$$=5\cdot5+2\cdot4+1\cdot3+3\cdot3=45.$$