FTN, MAS, Teorija odlučivanja - kolokvijum 1 — 09.07.2022.

1. Neka je po konvenciji $\inf \emptyset = 0$ i $\sup \emptyset = 0$. Neka je $X = [0, \infty)$, i neka je funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definisana sa: $\quad m(A) = \sup A - \inf A, \quad A \in \mathcal{P}(X)$.
   (a) Dokazati da je m fazi mera u širem smislu.
   (b) Dokazati da je fazi mera m nije neprekidna od gore.
2. Neka je $X = \{1, 2, 3, 4\}$, i neka je skupovna funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definisana sa:
   $$m(A) = \begin{cases} 0 & , \quad A = \emptyset \\ \left(\sum\limits_{i \in A} i \right)^2 & , \quad A \neq \emptyset \end{cases}.$$
   (a) Dokazati da je m fazi mera u širem smislu, i da nije aditivna.
   (b) Izračunati Šokeov integral funkcije $f : X \to [0, \infty)$ definisane sa $f(i) = (i-2)^2$, $i \in X$.
3. Neka je proizvoljan X konačan neprazan skup, i neka je skupovna funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ osnovna verovatnosna dodela. Ispitati tačnost iskaza: $\quad A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B)$.

FTN, MAS, Teorija odlučivanja - kolokvijum 2 — 09.07.2022.

1. Data je matrica isplata

	S_1	S_2	S_3
A_1	823	512	128
A_2	722	637	424
A_3	855	788	218
A_4	418	424	216
A_5	230	318	323

   sa skupom akcija A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i skupom događaja S_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Sevidžovim metodom minimax kajanja formirati dopunjenu tabelu gubitaka i maksimalnih kajanja i odrediti najbolje akcije.

2. Proizvođač bicikala investira u razvoj novog modela bicikla. Akcije, događaji (niska, prosečna, velika i izuzetno visoka tražnja) i njihove verovatnoće, kao i ishodi u nekim novčanim jedinicama su prikazana u sledećoj tabeli.

	Nivo tražnje			
Akcije	Nizak	Prosečan	Veliki	Izuzetno visok
A_1	64	86	122	530
A_2	-30	52	350	460
A_3	36	78	162	780
A_4	-42	40	244	620
p_j	0.1	0.3	0.4	0.2

   (a) Izračunati očekivanu vrednost potpune informacije OVUI.
   (b) Metodom maksimalne očekivane vrednosti MOV doneti odluku o najboljoj akciji.
   (c) Izračunati očekivanu vrednost potpune informacije OVPI.

3. Neka je $\mathcal{X} = \{x, y, z, w\}$ skup svih preferencija, i neka grupa broji 50 članova. Nakon glasanja je utvrđeno da je glasano za 4 različite rang liste koje su redom dobile po 17, 20, 9 i 4 glasa. Rang liste R_1, R_2, R_3 i R_4, sa odgovarajućim brojevima glasova $I_1 = 17$, $I_2 = 20$, $I_3 = 9$ i $I_4 = 4$ i odgovarajućim brojem poena su prikazani u sledećoj tabeli odlučivanja.

Individualne rang liste			
$R_1,\ I_1 = 17$	$R_2,\ I_2 = 20$	$R_3,\ I_3 = 9$	$R_4,\ I_4 = 4$
y	z	w	z
z	y	x	w
x	w	z	y
w	x	y	x

   Metodom dvokružnog izbora apsolutnom većinom glasova DAVG odrediti alternativu sa najvećim skorom.

REŠENJA KOLOKVIJUMA 1

1. Za svako $A \in \mathcal{P}(X)$ postoje $\inf A$ i $\sup A$ (gde je $\inf \emptyset = 0$ i $\sup \emptyset = 0$). Pri tome zbog $A \in \mathcal{P}(X)$ imamo da je $\inf A \in [0, \infty)$ i $\sup A \in [0, \infty]$.

   (a) Dokazujemo da za m važe aksiome [FM01] i [FM02] fazi mere.

   [FM01] Po usvojenoj konvenciji je $m(\emptyset) = \sup \emptyset - \inf \emptyset = 0 - 0 = 0$.

   [FM02] Iz $A \subseteq B$ očigledno sledi da važi $\inf A \geq \inf B$ i $\sup A \leq \sup B$. Pri tome iz nejednakosti $\inf A \geq \inf B$ sledi da je $-\inf A \leq -\inf B$. Sabiranjem nejednakosti $\sup A \leq \sup B$ i $-\inf A \leq -\inf B$ dobijamo da važi nejednakost $\sup A - \inf A \leq \sup B - \inf B$, odnosno $m(A) \leq m(B)$.

   (b) Konstruisaćemo skupove $A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ takve da $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, za koje postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $m(A_{n_0}) = \sup A_{n_0} - \inf A_{n_0} < \infty$, a za koje pri tome ne važi jednakost $m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$. Označimo $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Neka su skupovi $A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ definisani sa
$$A_n = \left\{ 2 - \frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \{n, n+1, n+2, \ldots\} \right\} \cup \{3\}$$
za svako $n \in \mathbb{N}$, odnosno
$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots\right\} \cup \{3\},\\
A_2 &= \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots\right\} \cup \{3\},\\
A_3 &= \left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots\right\} \cup \{3\},\\
A_4 &= \left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots\right\} \cup \{3\},\\
A_5 &= \left\{\frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots\right\} \cup \{3\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$
Očigledno je $\sup A_n = 3$ i $\inf A_n = \dfrac{2n-1}{n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, odnosno
$$\inf A_1 = 1, \quad \inf A_2 = \frac{3}{2}, \quad \inf A_3 = \frac{5}{3}, \quad \inf A_4 = \frac{7}{4}, \quad \inf A_5 = \frac{9}{5}, \ldots$$
Takođe je očigledno $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{3\}$, te dobijamo
$$\begin{aligned}
&m(A) = \sup A - \inf A = 3 - 3 = 0,\\
&\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} (\sup A_n - \inf A_n) = \lim_{n\to\infty} \sup A_n - \lim_{n\to\infty} \inf A_n\\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 3 - 2 = 1,
\end{aligned}$$
dakle $m(A) \neq \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$.

2. (a) Po definiciji je $m(\emptyset) = 0$. Elementi skupova $A, B \in \mathcal{P}(X)$ su pozitivni realni brojevi, te iz $A \subseteq B$ sledi $\sum\limits_{i\in A} i \leq \sum\limits_{i\in B} i$, a odatle i $\left(\sum\limits_{i\in A} i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i\in B} i\right)^2$, dakle $m(A) \leq m(B)$. Sledeći primer potvrđuje da m nije aditivna tj. klasična mera. Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{3, 4\}$, gde je očigledno $A \cap B \neq \emptyset$. S jedne strane je
$$m(A \cup B) = m(\{1, 2, 3, 4\}) = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100,$$
a s druge strane je
$$m(A) = m(\{1, 2\}) = (1 + 2)^2 = 9,$$
$$m(B) = m(\{3, 4\}) = (3 + 4)^2 = 49,$$
dakle $m(A \cup B) = 100 \neq 58 = m(A) + m(B)$.

   (b) Funkciju f možemo zapisati sa $f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Sortirajmo elemente skupa X po neopadajućem poretku vrednosti funkcije f u tačkama skupa X, sa fiktivnim elementom x_0 za koji je $f(x_0) = 0$. Tako dobijamo

$$f : \begin{pmatrix} x_0 & x_1 = 2 & x_2 = 1 & x_3 = 3 & x_4 = 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Koristeći formulu

$$(\mathrm{C}) \int_X f dm = \sum_{i=1}^{4} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \cdot m\left(\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_4\}\right)$$

za izračunavanje Šokeovog integrala nad konačnim skupom dobijamo

$$\begin{aligned}(\mathrm{C}) \int_X f dm &= \left(f(x_1) - f(x_0)\right) \cdot m\left(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}\right) + \left(f(x_2) - f(x_1)\right) \cdot m\left(\{x_2, x_3, x_4\}\right) \\ &+ \left(f(x_3) - f(x_2)\right) \cdot m\left(\{x_3, x_4\}\right) + \left(f(x_4) - f(x_3)\right) \cdot m\left(\{x_4\}\right) \\ &= (0-0) \cdot m\left(\{0,1,4\}\right) + (1-0) \cdot m\left(\{1,4\}\right) + (1-1) \cdot m\left(\{1,4\}\right) + (4-1) \cdot m\left(\{4\}\right) \\ &= 0 \cdot (0+1+4)^2 + 1 \cdot (1+4)^2 + 0 \cdot (1+4)^2 + 3 \cdot 4^2 = 0 + 25 + 0 + 48 = 73.\end{aligned}$$

3. Sledeći primer pokazuje da u opštem slučaju za osnovnu verovatnosnu dodelu ne mora da važi
$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B)$.
Neka je $X = \{1, 2\}$, i neka je funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ definisana sa
$m(\emptyset) = 0, \quad m(\{1\}) = 0, \quad m(\{2\}) = \dfrac{2}{3}, \quad m(X) = \dfrac{1}{3}.$
Funkcija m je osnovna verovatnosna dodela jer je po njenoj definiciji $m(\emptyset) = 0$ i
$\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} m(A) = 0 + 0 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$. Pri tome je $\{2\} \subseteq X$ i $m(\{2\}) = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3} = m(X)$.

REŠENJA KOLOKVIJUMA 2

1. Najbolji ishodi događaja su

   $U_1 = \max\{823, 722, 855, 418, 230\} = 855,$

   $U_2 = \max\{512, 637, 788, 424, 318\} = 788,$

   $U_3 = \max\{128, 424, 218, 216, 323\} = 424.$

   Vrednosti kajanja dobijene po formuli

   $k_{i,j} = U_j - v_{i,j}, \quad i \in \{1,2,3,4,5\}, \quad j \in \{1,2,3,4\}$

   su prikazane u sledećoj tabeli isplata i kajanja.

	Tabela isplata			Tabela gubitaka			
	S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3	K_i
A_1	823	512	128	32	276	286	286
A_2	722	637	424	133	151	0	151
A_3	855	788	218	0	0	206	206
A_4	418	424	216	137	364	208	364
A_5	230	318	323	625	470	101	625
	855	788	424				151

   Maksimalna kajanja su

   $K_1 = \max\{32, 276, 286\} = 286, \quad K_2 = \max\{133, 151, 0\} = 151,$

   $K_3 = \max\{0, 0, 206\} = 206, \quad K_4 = \max\{137, 364, 208\} = 364,$

   $K_5 = \max\{625, 470, 101\} = 625,$

   i njihova minimalna vrednost je $K = \min\{286, 151, 206, 364, 625\} = 151$ koja odgovara akciji A_2 koju stoga smatramo najboljom.

2. (a) $\mathsf{OVUI} = p_1 \cdot m_1 + p_2 \cdot m_2 + p_3 \cdot m_3 + p_4 \cdot m_4,$

   gde je

   $m_1 = \max\{64, -30, 36, -42\} = 64,$

   $m_2 = \max\{86, 52, 78, 40\} = 86,$

   $m_3 = \max\{122, 350, 162, 244\} = 350,$

   $m_4 = \max\{530, 460, 780, 620\} = 780,$

   te je očekivana vrednost potpune informacije

   $\mathsf{OVUI} = 0.1 \cdot 64 + 0.3 \cdot 86 + 0.4 \cdot 350 + 0.2 \cdot 780 = 328.2.$

   (b) $\mathsf{OV}(A_1) = 0.1 \cdot 64 + 0.3 \cdot 86 + 0.4 \cdot 122 + 0.2 \cdot 530 = 187,$

   $\mathsf{OV}(A_2) = 0.1 \cdot (-30) + 0.3 \cdot 52 + 0.4 \cdot 350 + 0.2 \cdot 460 = 244.6,$

   $\mathsf{OV}(A_3) = 0.1 \cdot 36 + 0.3 \cdot 78 + 0.4 \cdot 162 + 0.2 \cdot 780 = 247.8,$

   $\mathsf{OV}(A_4) = 0.1 \cdot (-42) + 0.3 \cdot 40 + 0.4 \cdot 244 + 0.2 \cdot 620 = 229.4,$

   te primenom metode maksimalne očekivane vrednosti dobijamo

   $\mathsf{MOV} = \max\{\mathsf{OV}(A_1), \mathsf{OV}(A_2), \mathsf{OV}(A_3), \mathsf{OV}(A_4)\} = 247.8,$

   gde maksimalnu očekivanu vrednost 247.8 dobijamo izborom akcije A_3.

   (c) $\mathsf{OVPI} = \mathsf{OVUI} - \mathsf{MOV} = 328.2 - 247.8 = 80.4.$

3. Neka je $\mathcal{X} = \{x, y, z, w\}$ skup svih preferencija, i neka grupa broji 50 članova. Nakon glasanja je utvrđeno da je glasano za 4 različite rang liste koje su redom dobile po 17, 20, 9 i 4 glasa. Rang liste R_1, R_2, R_3 i R_4, sa odgovarajućim brojevima glasova $I_1 = 17$, $I_2 = 20$, $I_3 = 9$ i $I_4 = 4$ i odgovarajućim brojem poena su prikazani u sledećoj tabeli odlučivanja.

Individualne rang liste			
$R_1,\ I_1 = 17$	$R_2,\ I_2 = 20$	$R_3,\ I_3 = 9$	$R_4,\ I_4 = 4$
y	z	w	z
z	y	x	w
x	w	z	y
w	x	y	x

Metodom Borde MB dobijamo sledeće skorove alternativa:

$\mathsf{Score}\,(x) = 0 \cdot 17 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 4 = 0,$

$\mathsf{Score}\,(y) = 1 \cdot 17 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 4 = 17,$

$\mathsf{Score}\,(z) = 0 \cdot 17 + 1 \cdot 20 + 0 \cdot 9 + 1 \cdot 4 = 24,$

$\mathsf{Score}\,(w) = 0 \cdot 17 + 0 \cdot 20 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 4 = 9.$

Dakle, u drugi krug glasanja ulaze alternative y i z, te na osnovu tabele drugog kruga glasanja

Individualne rang liste			
$R_1,\ I_1 = 17$	$R_2,\ I_2 = 20$	$R_3,\ I_3 = 9$	$R_4,\ I_4 = 4$
y	z	z	z
z	y	y	y

dobijamo skorove

$\mathsf{Score}\,(y) = 1 \cdot 17 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 4 = 17,$

$\mathsf{Score}\,(z) = 0 \cdot 17 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 = 33.$

te DAVG metodom biramo kao najbolju alternativu z.