The 6th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, June 11-13th 2021

AGREGACIJA FAZI MERA

Đorđe Dragić [1], Endre Pap [2], Ljubo Nedović [3]

Sažetak. U ovom preglednom radu prikazujemo ranija istraživanja na temu konstrukcije novih fazi mera primenom proširene funkcije agregacije na niz inicijalnih fazi mera. Uveden je i pojam funkcije distorzije i proširene funkcije agregacije WAMDA koja je, sa odgovarajućim parametrima, pogodna za konstrukciju novih fazi mera.

AMS klasifikacija (2010): 26E50, 28E10, 39B62, 47S40

Ključne reči: fazi mera, funkcija agregacije, funkcija distorzije

1. Uvod

Funkcije agregacije predstavljaju široku klasu fazi operacija i imaju veliku primenu u teoriji odlučivanja, veštačkoj inteligenciji, obradi slike, finansijama i drugim oblastima, videti [1]. Glavna karakteristika klasičnih mera je ispunjavanje uslova prebrojive aditivnosti. Fazi mere predstavljaju opštiju klasu od klasičnih mera. One zadovoljavaju uslov monotonosti i koriste se u različitim oblastima za prevazilaženje nedostataka drugih modela, posebno onih zasnovanih na klasičnim merama, koji nisu zadovoljavajući, videti [4].

U ovom članku dajemo pregled aktuelnih istraživanja sprovedenih u radu [2], gde je prikazana konstrukcija novih fazi mera primenom proizvoljne funkcije agregacije na niz inicijalnih fazi mera, definisanih na konačnom ili beskonačnom intervalu. Agregacija fazi mera je uopštenje različitih tipova neaditivnih mera i drugih merljivih funkcija u najširem smislu, definisanih na prostoru sa σ-algebrom, sa najširim klasama i tipovima operatora agregacije. Primenom funkcije agregacije na niz klasičnih mera, novu meru dobijamo samo u slučaju kada je primenjena funkcija agregacije linearna transformacija. Primenom proizvoljne funkcije agregacije na niz fazi mera se dobija nova fazi mera. Dodatne osobine nove, konstruisane, fazi mere zavise od osobina inicijalnih fazi mera, kao i od dodatnih osobina primenjene funkcije agregacije.

U odeljku 2 predstavljene su definicije i neke osobine funkcija agregacije i fazi mera, kao i novi metod konstrukcije fazi mera koristeći proširenu funkciju agregacije i dati niz fazi mera. U odeljku 3 dat je pojam funkcije distorzije i nove proširene funkcije agregacije WAMDA, koja je korišćena za pomenutu konstrukciju.

[1] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: djordje.dragic@uns.ac.rs

[2] Departman za poslediplomske studije, Univerzitet Singidunum u Beogradu, e-mail: epap@singidunum.ac.rs

[3] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: nljubo@uns.ac.rs

2. Agregacija fazi mera

U ovom odeljku navodimo neke osnovne pojmove vezane za funkcije agregacije i fazi mere, kao i njihove osobine koje su relevantne za rezultate dobijene u radu [2]. Argumenti i vrednosti funkcije agregacije su realni brojevi iz konačnog ili beskonačnog intervala $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. U zavisnosti od prirode primene funkcije agregacije, za I možemo izabrati jedan od sledećih intervala:

- Ograničeni interval $I_1 = [0, 1]$,
- Beskonačni interval $I_2 = [0, \infty[$,
- Beskonačni interval $I_3 = [0, \infty]$, gde je u ovom slučaju po definiciji
  $\forall a \in [0, \infty],\ a + \infty = \infty, \quad 0 \cdot \infty = 0, \quad \forall a \in]0, \infty],\ a \cdot \infty = \infty.$

Slede definicije funkcije agregacije i proširene funkcije agregacije, videti [1].

Definicija 2.1 (Funkcija agregacije)**.** Za svako $n \in \mathbb{N}$, n-arna *funkcija agregacije* je funkcija $A_{[n]} : I^n \to I$ sa sledećim osobinama:

(a01) Važe granični uslovi:

$$A_{[n]}(0, \dots, 0) = 0,$$

i u zavisnosti od posmatranog intervala I,

- $I = I_1$: $\quad A_{[n]}(1, \dots, 1) = 1,$
- $I = I_2$: $\quad \lim\limits_{\forall i \in \{1,\dots,n\}, a_i \to \infty} A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = \infty,$
- $I = I_3$: $\quad A_{[n]}(\infty, \dots, \infty) = \infty.$

(a02) Funkcija A je monotono neopadajuća po svakoj komponenti, tj., važi implikacija

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad a_i \leq b_i \quad \Rightarrow \quad A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) \leq A_{[n]}(b_1, \dots, b_n)$$

za sve $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in I^n$.

Za $n = 1$, po definiciji je $A_{[1]}(x) = x$, $x \in I$.

Definicija 2.2 (Proširena funkcija agregacije)**.** *Proširena funkcija agregacije* je funkcija $A : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ takva da je njena restrikcija $A_{[n]} : I^n \to I$ n-arna funkcija agregacije za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dalje, navodimo neke dodatne osobine koje proširena funkcija agregacije može da ima i koje su značajne u različitim primenama u teorijskim rezultatima, videti [1, 2, 3].

Definicija 2.3. Proširena funkcija agregacije $A : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ može imati sledeće dodatne osobine.

(a03) Funkcija A je *neprekidna*, tj. svako $A_{[n]} : I^n \to I$, $n \in \mathbb{N}$ je neprekidna funkcija agregacije.

(a04) Funkcija A je *aditivna*, tj. za sve $n \in \mathbb{N}$ i $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in I^n$ koji ispunjavaju uslov $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in I^n$, važi

$$A_{[n]}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = A_{[n]}(a_1, \ldots, a_n) + A_{[n]}(b_1, \ldots, b_n).$$

(a05) Funkcija A je *subaditivna*, tj. za sve $n \in \mathbb{N}$ i $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in I^n$ koji ispunjavaju uslov $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in I^n$, važi

$$A_{[n]}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \leq A_{[n]}(a_1, \ldots, a_n) + A_{[n]}(b_1, \ldots, b_n).$$

(a06) Funkcija A je *superaditivna*, tj. za sve $n \in \mathbb{N}$ i $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in I^n$ koji ispunjavaju uslov $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in I^n$, važi

$$A_{[n]}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \geq A_{[n]}(a_1, \ldots, a_n) + A_{[n]}(b_1, \ldots, b_n).$$

Jedan od tipova neaditivnih mera koji je pogodan za agregaciju je fazi mera. Fazi mere su skupovne funkcije definisane na nekoj σ-algebri, videti [4].

Definicija 2.4. Familija skupova $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra na $X \neq \emptyset$ ako

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$,

(iii) $\forall A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, $\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X. Neka je I jedan od intervala I_1, I_2 ili I_3.

Definicija 2.5. Funkcija $m : \mathcal{A} \to I$ je fazi mera na σ-algebri $\mathcal{A}$ ako

(FM1) $m(\emptyset) = 0$,

(FM2) $\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$.

U sledećoj definiciji su date neke dodatne moguće osobine fazi mera, videti [4].

Definicija 2.6. Fazi mera $m : \mathcal{A} \to I$ može imati i neke od sledećih osobina.

(FM3) Za svaki niz skupova $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, takvih da je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ važi *neprekidnost od dole*:

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} m(A_i), \tag{2.1}$$

(FM4) Za svaki niz skupova $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, takvih da je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ i takvih da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ za koje je $m(A_{n_0}) < \infty$, važi *neprekidnost od gore*:

$$m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} m(A_i), \tag{2.2}$$

(FM5) Za svaki disjunktan par skupova $A, B \in \mathcal{A}$ važi *subaditivnost*:

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B), \tag{2.3}$$

(FM6) Za svaki disjunktan par skupova $A, B \in \mathcal{A}$ važi *superaditivnost*:

$$m(A \cup B) \geq m(A) + m(B). \tag{2.4}$$

U sledećoj definiciji prikazana je konstrukcija nove fazi mere primenom proizvoljne funkcije agregacije na niz inicijalnih fazi mera, definisanih na konačnom ili beskonačnom intervalu. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra na $X \neq \emptyset$.

Definicija 2.7. Neka je $m_i : \mathcal{A} \to I$, $i \in \mathbb{N}$, niz fazi mera na $\mathcal{A}$, gde je I jedan od intervala I_1, I_2 ili I_3. Neka je $A : \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ proizvoljna proširena funkcija agregacije. Za $n \in \mathbb{N}$, definišimo funkciju $m_{[n]} : \mathcal{A} \to I$ sa

$$m_{[n]}(F) = A_{[n]}(m_1(F), \ldots, m_n(F)), \quad F \in \mathcal{A}. \tag{2.5}$$

Funkcija $m_{[n]}$ je skupovna funkcija na $\mathcal{A}$ sa vrednostima u I, kao i funkcije m_i, $i \in \mathbb{N}$. U sledećoj teoremi, videti [2], je pokazano da za svako $n \in \mathbb{N}$, funkcija $m_{[n]}$ je fazi mera na $\mathcal{A}$, i u zavisnosti od odgovarajućih osobina funkcije agregacije $A_{[n]}$, fazi mera $m_{[n]}$ može naslediti neke važne osobine od inicijalnih fazi mera m_i, $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.8. *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na $X \neq \emptyset$, i neka je $m_i : \mathcal{A} \to I$, $i \in \mathbb{N}$ niz fazi mera na $\mathcal{A}$. Tada, za svako $n \in \mathbb{N}$, funkcija $m_{[n]} : \mathcal{A} \to I$ definisana sa* (2.5)*, je fazi mera na $\mathcal{A}$. Pri tome, važe još i sledeća tvrđenja.*

(a) *Ako su sve fazi mere m_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ neprekidne od dole (osobina* (2.1)*) i A je neprekidna proširena funkcija agregacije, onda je fazi mera $m_{[n]}$ takođe neprekidna od dole.*

(b) *Ako su sve fazi mere m_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ neprekidne od gore (osobina* (2.2)*) i A je neprekidna proširena funkcija agregacije i, u slučaju $I = [0, \infty]$ neka važi da iz $A_{[n]}(a_1, \ldots, a_n) < \infty$ sledi $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_i < \infty$, tada je i fazi mera $m_{[n]}$ neprekidna od gore.*

(c) *Ako su sve fazi mere m_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ subaditivne (osobina* (2.3)*) i A je subaditivna proširena funkcija agregacije, tj. ima osobinu* (a05) *iz definicije* 2.3*, tada je i fazi mera $m_{[n]}$ subaditivna.*

(d) *Ako su sve fazi mere m_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ superaditivne (osobina* (2.4)*) i A je superaditivna proširena funkcija agregacije, tj. ima osobinu* (a06) *iz definicije* 2.3*, tada je i fazi mera $m_{[n]}$ superaditivna.*

3. Konveksna kombinacija funkcija distorzije

U ovoj sekciji je prikazan pojam funkcije distorzije definisan u [3], kao i primer jednog tipa funkcije agregacije definisane u [2]. Reč je o WAMDA funkciji agregacije koja je konstruisana primenom funkcije agregacije WAM (konveksne kombinacije argumenata) na niz funkcija distorzije.

Definicija 3.1 (Funkcija distorzije). *Funkcija distorzije* je monotono neopadajuća funkcija $f : I \to I$ koja zadovoljava granični uslov

$$f(0) = 0, \tag{3.1}$$

i u zavisnosti od posmatranog intervala I, jedan od sledećih graničnih uslova:

i) ako je $I = I_1$,

$$f(1) = 1, \tag{3.2}$$

ii) ako je $I = I_2$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \tag{3.3}$$

iii) u slučaju $I = I_3$,

$$f(\infty) = \infty. \tag{3.4}$$

Definicija 3.2 (WAMDA). Neka je
$\omega = \Big\{\omega_{n,i} \geq 0 \,\Big|\, n \in \mathbb{N},\, i \in \{1, \dots, n\} \wedge \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \in \{1, \dots, n\},\, \omega_{n,i} > 0\Big\}$
familija nenegativnih realnih brojeva koja zadovoljava uslov $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_{n,i} = 1$ u slučaju $I = I_1$, i neka je
$\mathcal{F} = \{f_{n,i} : I \to I \,|\, n \in \mathbb{N},\, i \in \{1, \dots, n\}\}$
familija funkcija distorzije koje zadovoljavaju osobinu (3.1), i jednu od odgovarajućih osobina (3.2), (3.3) ili (3.4). Za svako $n \in \mathbb{N}$, neka je funkcija $\mathrm{WAMDA}_{[n]}^{\omega,\mathcal{F}} : I^n \to I$ definisana sa

$$\mathrm{WAMDA}_{[n]}^{\omega,\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) = \omega_{n,1} f_{n,1}(a_1) + \cdots + \omega_{n,n} f_{n,n}(a_n),$$

i neka je funkcija $\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}} : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ definisana sa

$$\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{WAMDA}_{[n]}^{\omega,\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ i sve $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$.

Napomena 3.3. Funkcija $\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}}$ je proširena funkcija agregacije. Naime, granični uslov (a01) sledi iz graničnih uslova funkcija $f_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ i osobina koeficijenata ω, a monotonost (a02) sledi iz monotonosti funkcija distorzije $f_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sledeća teorema, dokazana u [2], daje dovoljan uslov pod kojim je neprekidna fazi mera konstruisana primenom WAMDA funkcije agregacije na niz inicijalnih fazi mera.

Teorema 3.4. *Neka je* $WAMDA^{\omega,\mathcal{F}}$ *proširena funkcija agregacije iz definicije* 3.2, *neka je* m_i, $i \in \mathbb{N}$ *niz fazi mera, i neka je za proizvoljno* $n \in \mathbb{N}$ *fazi mera* $m_{[n]}$ *definisana sa* (2.5). *Neka su* $f_{n,i} \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *neprekidne funkcije distorzije. U slučaju intervala* $I = [0, \infty]$, *neka je* ω *familija strogo pozitivnih koeficijenata, i svaka od funkcija* $f_{n,i} \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *dostiže vrednost* $f_{n,i}(x) = \infty$ *samo za* $x = \infty$. *Tada je fazi mera* $m_{[n]}$ *neprekidna, tj. zadovoljava uslove* (2.1) *i* (2.2).

Sledi primer $\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}}$ proširene funkcije agregacije koji se može primeniti u tvrđenjima teoreme 2.8.

Primer 3.5. Neka su
$\omega = \{\omega_{n,i} > 0 \,|\, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}$,
$K = \{k_{n,i} > 0 \,|\, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}$
familije pozitivnih koeficijenata, i neka su $f_{n,i} : I \to I$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ funkcije definisane sa $f_{n,i}(x) = \sqrt{x}$ u slučaju intervala $I = I_1$, odnosno sa $f_{n,i}(x) = \sqrt{k_{n,i} \cdot x}$ u slučaju intervala $I = I_2$ i $I = I_3$. Ovako definisane funkcije $f_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ su funkcije distorzije, tj. zadovoljavaju uslov (3.1) i jedan od odgovarajućih uslova (3.2), (3.3) ili (3.4). Za familiju funkcija $\mathcal{F} = \{f_{n,i} \,|\, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}$, funkcija $\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}}$ je konveksna kombinacija funkcija distorzije. Kako su na svim posmatranim intervalima I funkcije $f_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ neprekidne, tada je i $\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}}$ neprekidna funkcija. Stoga se primenom $\mathrm{WAMDA}^{\omega,\mathcal{F}}$ funkcije na niz neprekidnih (sa osobinama (2.1) i (2.2)) fazi mera m_i, $i \in \mathbb{N}$ u formuli (2.5), dobija neprekidna fazi mera $m_{[n]}$ (sa osobinama (2.1) i (2.2)).

Zahvalnica

Prvi i treći autor su podržani od strane Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakultet Tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, u okviru projekta „Teorijska i primenjena matematika u tehničkim i informatičkim naukama". Drugi autor je podržan od strane Fonda za nauku Republike Srbije u okviru projekta „Artificial Intelligence ATLAS, grant No. 6524105".

Literatura

[1] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar and E. Pap, *Aggregation functions*, vol. 127 of the *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] Lj. Nedović and E. Pap, "Aggregation of sequence of fuzzy measures", *Iranian journal of fuzzy systems*, vol. 17, no. 6, pp. 39-55, University of Sistan and Baluchestan, 2020.

[3] Lj. Nedović, E. Pap and Đ. Dragić, "Aggregation of triangle of distortion functions", *Information Sciences*, vol. 563, pp. 401-417, Elsevier Inc., 2021.

[4] V. Torra, Y. Narukawa and M. Sugeno, *Non-additive measures: theory and applications.* Springer International Publishing, 2014.