The Second Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, June 16-17th 2017

AGREGIRANE MERE I FAZI-MERE

Ljubo Nedović[1]

Sažetak. U ovom radu je prikazana konstrukcija mera i fazi-mera primenom operatora agregacije na polazne mere i fazi-mere. Ispitane su osobine konstruisanih funkcija u zavisnosti od osobina polaznih mera i fazi-mera, kao i osobina primenjenog operatora agregacije. Prikazani su i neki primeri ovako konstruisanih skupovnih funkcija.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 28A10, 28E10, 47S40

Ključne reči: mera, neaditivna mera, fazi-mera, operatori agregacije

1. Uvod

Teorija mera i integrala je jedna od kapitalnih oblasti matematike, i odavno formirana i bogata teorija - vidi npr. [1]. U drugoj polovini 20-og veka se formirala i teorija raznih vrsta fazi-mera koja je našla bogatu primenu u raznim naukama, vidi npr. [2, 3]. U sekcijama 2 i 4 su razmotreni samo neki tipovi fazi-mera. Operatori agregacije su jedan tip fazi-operacija, koje su našle veliku primenu u informatičkim i drugim naukama. Osnovne definicije i primeri operatora agregacije su dati u sekciji 3. U sekciji 4 su izložene neke nove ideje, pristupi i primeri konstrukcije mera i fazi-mera primenom operatora agregacije na niz polaznih mera i fazi-mera.

2. Mere i fazi-mere

Neka je X proizvoljan neprazan skup, i neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa X koja je σ-algebra na X, tj. ima svojstva

[S1] $\emptyset \in \mathcal{F}$, [S2] $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$,

[S3] $(\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F} \ \wedge\ \forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Klasična pozitivna realna mera m na merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$ je skupovna funkcija $m : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ sa osobinama

[m1] $m(\emptyset) = 0$,

[m2] $(\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F} \ \wedge\ \forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Pod pojmom fazi-mera se podrazumevaju razne vrste skupovnih funkcija sa raznim vrednostima i osobinama. U ovoj sekciji su navedeni neki tipovi fazi-mera koji se razmatraju u sekciji 4. Vrednosti ovih fazi-mera ne moraju biti pozitivni realni brojevi, već npr. elementi nekih drugih skupova i struktura. Jedan tip pomenutih struktura je naveden u sledećoj definiciji, vidi npr. [2]

[1]Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: nljubo@uns.ac.rs

Definition 2.1. Neka je $[a,b] \subseteq \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, a $\preceq$ neka relacija poretka na $[a,b]$. Uređena trojka $([a,b], \oplus, \odot)$ se naziva *poluprsten* ili *pseudo-prsten* (eng. *semiring*), operaciju $\oplus$ nazivamo *pseudo-sabiranje* (eng. *pseudo-addition*), a $\odot$ *pseudo-množenje* (eng. *pseudo-multiplication*), ukoliko su $\oplus$ i $\odot$ binarne operacije skupa $[a,b]$ sa sledećim osobinama. Pseudo-sabiranje $\oplus$ je asocijativna, komutativna, neopadajuća u odnosu na $\preceq$ operacija sa neutralnim elementom (tzv. *nulom*) $\mathbf{0}$. Pseudo-sabiranje $\odot$ je asocijativna, komutativna operacija sa neutralnim elementom (tzv. *jedinicom*) $\mathbf{1}$, i pozitivno je neopadajuća u odnosu na $\preceq$ operacija, dakle: $\forall x, y, z \in [a,b]$, $(x \preceq y \wedge \mathbf{0} \preceq z) \ \Rightarrow \ x \odot z \preceq y \odot z$. $\forall x \in [a,b]$, $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$, i operacija $\odot$ je distributivna u odnosu na operaciju $\oplus$.

Jedan tip fazi-mere sa vrednostima u pseudo-prstenu se definiše na sledeći način (vidi [2]).

Definition 2.2. Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljna σ-algebra na nekom skupu X, i neka je $\oplus$ operacija pseudo-sabiranja iz definicije 2.1. Funkcija $m : \mathcal{F} \to [a,b]$ je σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na $(X, \mathcal{F})$ ukoliko je:

$$\text{[sdm1]}\ m(\emptyset) = \mathbf{0}, \qquad \text{[sdm2]}\ m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} m(A_i)$$

za svaku familiju skupova $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, koji su po parovima disjunktni ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna, a inače proizvoljni.

3. Operatori agregacije

Aksiomatika operatora agregacije u literaturi nije usaglašena, vidi [4]. U ovoj sekciji je navedena definicija pogodna za razmatranja u sekciji 4.

Definition 3.1. Operator agregacije je funkcija $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0,\infty)^n \to [0,\infty)$ sa sledećim osobinama.

[A1] Važe *granični uslovi*

$$\forall n \geq 2,\ A\,(\underbrace{0,\ldots,0}_{n}) = 0, \qquad \forall n \geq 2,\ \lim_{\forall i,\, x_i \to \infty} A\,(x_1,\ldots,x_n) = \infty.$$

[A2] Funkcija A je *monotono neopadajuća po svim komponentama*, odnosno za svako $n \geq 2$ i sve $(x_1,\ldots,x_n), (y_1,\ldots,y_n) \in [0,\infty)^n$ važi

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \ x_i \leq y_i \ \ \Rightarrow \ \ A(x_1,\ldots,x_n) \leq A(y_1,\ldots,y_n).$$

Osim ovih, funkcija A može da ima i sledeće poželjne osobine.

[A3] Funkcija A je *neprekidna*.

[A4] Funkcija A je *simetrična* po svim komponentama, odnosno za sve $n \geq 2$, svaku n-torku $(x_1,\ldots,x_n) \in [0,\infty)^n$, i za svaku permutaciju p skupa $\{1,\ldots,n\}$ važi $A\,(x_1,\ldots,x_n) = A\left(x_{p(1)},\ldots,x_{p(n)}\right)$.

[A5] Funkcija A je *idempotentna*, odnosno za svako $n \geq 2$ i svaku n-torku $(a,\ldots,a) \in [0,\infty)^n$ važi $A(a,\ldots,a) = a$.

Sledi jedan primer agregacionog operatora koji se razmatra i u sekciji 4.

Example 3.2. Neka je $\lambda_{n,i} > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ familija pozitivnih realnih brojeva, i neka je funkcija $A_{plk} : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ definisana sa
$A_{plk}(x_1, \dots, x_n) = \lambda_{n,1} x_1 + \cdots + \lambda_{n,n} x_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$.

Za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je funkcija $A_{plk}^{[n]} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ definisana sa

$A_{plk}^{[n]}(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_{plk}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_{n,1} x_1 + \lambda_{n,2} x_2 + \cdots + \lambda_{n,n} x_n$

restrikcija na $[0, \infty)^n$ jedne linearne transformacije iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$. Funkcija $A_{plk} : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ je agregacioni operator, i to neprekidan, a nije idempotentan niti simetričan, osim u specijalnom slučaju $\lambda_{n,i} = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Agregacioni operator ovog tipa ćemo nazivati *pozitivna linearna kombinacija kombinacija.* Ako je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tada ćemo A_{plk} nazivati *konveksna kombinacija.* ☑

Sledi još nekoliko dobro poznatih i u primenama često korišćenih operatora agregacije.

Example 3.3. Operacije min i max

$A_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$A_{\max}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$

su neprekidna, simetrične i idempotentne operacije agregacije. ☑

Example 3.4. Aritmetička sredina A_{ma}, geometrijska sredina A_{mg} i harmonijska sredina A_{mh}

$$A_{ma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$
$$A_{mg}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}},$$
$$A_{mh}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} & , \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \neq 0 \\ 0 & , \quad \exists i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0 \end{cases}$$

su neprekidne, simetrične i idempotentne operacije agregacije. ☑

4. Konstrukcija mera i fazi-mera primenom operatora agregacije

4.1. Agregacija klasičnih mera

Neka je m_i, $i \in \mathbb{N}$ niz mera na istom merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$, gde je $\mathcal{F}$ proizvoljna σ-algebra na skupu X, i neka je $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ proizvoljan operator agregacije. Neka je za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ skupovna funkcija $m^{[n]} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ definisana sa

$$m^{[n]}(S) = A(m_1(S), m_2(S), \dots, m_n(S)), \quad S \in \mathcal{F}. \tag{4.1}$$

Ukoliko je operator A aditivan, dakle

$$A(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)=A(x_1,\ldots,x_n)+A(y_1,\ldots,y_n) \tag{4.2}$$

za sve $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ i sve $x_i,y_i\in[0,\infty)$, tada za svaku familiju brojeva $x_{i,j}\geq 0$, $i,j\in\mathbb{N}$, za svako $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ na osnovu (4.2) induktivno dobijamo

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad A\left(\sum_{j=1}^{m}x_{1,j},\ldots,\sum_{j=1}^{m}x_{n,j}\right)=\sum_{j=1}^{m}A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})\,. \tag{4.3}$$

Neka je nadalje A neprekidan operator agregacije. Zbog (4.3) i neprekidnosti operatora A, za svako $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ važi

$$A\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}x_{1,j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^{\infty}x_{n,j_n}\right)=A\left(\lim_{m_1\to\infty}\sum_{j_1=1}^{m_1}x_{1,j_1},\ldots,\lim_{m_n\to\infty}\sum_{j_n=1}^{m_n}x_{n,j_n}\right)$$
$$=\lim_{\forall k,\,m_k\to\infty}A\left(\sum_{j_1=1}^{m_1}x_{1,j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^{m_n}x_{n,j_n}\right)=\lim_{m\to\infty}A\left(\sum_{j=1}^{m}x_{1,j},\ldots,\sum_{j=1}^{m}x_{n,j}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j}).$$

Dakle, za svako $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ i svaku familiju brojeva $x_{i,j}\in[0,\infty)$, $i,j\in\mathbb{N}$ važi

$$A\left(\sum_{j=1}^{\infty}x_{1,j},\ldots,\sum_{j=1}^{\infty}x_{n,j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j}) \tag{4.4}$$

Sada za neprekidan i aditivan agregacioni operator A možemo zaključiti da za svako $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ funkcija $m^{[n]}$ ima sledeća svojstva.

1) Koristeći granično svojstvo $A(0,0,\ldots,0)=0$ operatora agregacije dobijamo $m^{[n]}(\emptyset)=A(m_1(\emptyset),m_2(\emptyset),\ldots,m_n(\emptyset))=A(0,0,\ldots,0)=0$.

2) Neka su $S_i\in\mathcal{F}$, $i\in\mathbb{N}$ po parovima disjunktni merljivi skupovi. Koristeći σ-aditivnost mera m_i i σ-aditivnost (4.4) operatora agregacije A dobijamo

$$m^{[n]}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)=A\left(m_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right),\ldots,m_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\right)$$
$$=A\left(\sum_{i=1}^{\infty}m_1(S_i),...,\sum_{i=1}^{\infty}m_n(S_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}A(m_1(S_i),...,m_n(S_i))=\sum_{i=1}^{\infty}m^{[n]}(S_i).$$

Time je dokazano sledeće tvrđenje.

Theorem 4.1. *Neka je A neprekidan i aditivan agregacioni operator. Neka je m_i, $i\in\mathbb{N}$ niz mera na istom merljivom prostoru $(X,\mathcal{F})$, gde je $\mathcal{F}$ proizvoljna σ-algebra na X. Neka je za $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ skupovna funkcija $m^{[n]}:\mathcal{F}\to[0,\infty)$ definisana sa $m^{[n]}(S)=A(m_1(S),m_2(S),\ldots,m_n(S))$, $S\in\mathcal{F}$. Tada je funkcija $m^{[n]}:\mathcal{F}\to[0,\infty)$ mera na $(X,\mathcal{F})$ za svako $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.*

Kao restrikcija linearne transformacije, agregacioni operator tipa *pozitivna linearna kombinacija* $A_{plk}:\bigcup_{n=2}^{\infty}[0,\infty)^n\to[0,\infty)$,

$A_{plk}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_{n,1}x_1 + \lambda_{n,2}x_2 + \cdots + \lambda_{n,n}x_n,$
gde je $\lambda_{n,i} > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ proizvoljna familija pozitivnih realnih brojeva, je neprekidan i aditivan agregacioni operator, te se njegovom primenom na niz mera m_i, $i \in \mathbb{N}$ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$, za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ dobija mera

$$m_{plk}^{[n]}(S) = \lambda_{n,1}m_1(S) + \lambda_{n,2}m_2(S) + \cdots + \lambda_{n,n}m_n(S), \quad S \in \mathcal{F}$$

na merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$.

Razmotrimo sada za koje se agregacione operatore A, primenom na niz mera m_i, $i \in \mathbb{N}$ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$, dobija mera $m^{[n]}$ na $(X, \mathcal{F})$ definisana sa (4.1). U klasi neprekidnih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, rešenja poznate Košijeve funkcionalne jednačine $f(x+y) = f(x) + f(y)$ su samo linearne funkcije, dakle funkcije oblika $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ za neke $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, što je takođe dobro poznata teorema - vidi npr. [5]. Iz dokaza teoreme 4.1 je jasno da je aditivnost neprekidnog operatora A i neophodan uslov da se njegovom primenom na niz mera dobije mera $m^{[n]}$. Na osnovu prethodno navedenog, sledi i sledeće tvrđenje kao dopuna tvrđenja teoreme 4.1 za neprekidne i aditivne agregacione operatore.

Theorem 4.2. *Neka je A neprekidan i aditivan agregacioni operator. Neka je m_i, $i \in \mathbb{N}$ niz mera na istom merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$, gde je $\mathcal{F}$ proizvoljna σ-algebra na skupu X. Neka je za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ skupovna funkcija $m^{[n]} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ definisana sa $m^{[n]}(S) = A(m_1(S), m_2(S), \ldots, m_n(S))$, $S \in \mathcal{F}$. Ako je za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ skupovna funkcija $m^{[n]} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ mera na $(X, \mathcal{F})$, tada je agregacioni operator A tipa* pozitivna linearna kombinacija.

Kao prostor za daljnja istraživanja ostaje sledeće otvoreno pitanje. Osim neprekidnih aditivnih operatora agregacije, primenom kojih još operatora agregacije na niz mera možemo dobiti novu meru na istom merljivom prostoru?

4.2. Agregacija fazi-mera

U ovom odeljku se razmatra primena operatora agregacija na jedan tip fazimere iz sekcije 2. Posmatrajmo niz sup-dekompozabilnih mera na σ-algebri $(X, \mathcal{F})$ sa vrednostima u $[0, \infty)$, dakle niz skupovnih funkcija $m_k : \mathcal{F} \to [0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ sa osobinama

[supm1] $\forall k \in \mathbb{N}, \quad m_k(\emptyset) = 0,$

[supm2] $\forall k \in \mathbb{N}, \quad m_k\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} m_k(A_i)$ za svaku familiju $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

Neka je A proizvoljan operator agregacije, i neka je za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ skupovna funkcija $m^{[n]} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ definisana sa

$$m^{[n]}(S) = A(m_1(S), m_2(S), \ldots, m_n(S)), \quad S \in \mathcal{F}.$$

Iz graničnog svojstva agregacionog operatora A sledi da $m^{[n]}$ ima osobinu [supm1], naime $m^{[n]}(\emptyset) = A(m_1(\emptyset), \ldots, m_n(\emptyset)) = A(0, \ldots, 0) = 0$. Ispitajmo sada da li skupovna funkcija $m^{[n]}$ ima osobinu [supm2] za proizvoljnu familiju $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$. S jedne strane je

$$m^{[n]}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = A\left(m_1\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right), \dots, m_n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)\right)$$
$$= A\left(\sup_{i\in\mathbb{N}} m_1(A_i), \dots, \sup_{i\in\mathbb{N}} m_n(A_i)\right),$$

a s druge strane $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} m^{[n]}(A_i) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} A(m_1(A_i), \dots, m_n(A_i))$.

Prema tome, da bi skupovna funkcija $m^{[n]}$ imala osobinu [supm2], tj. da bi važila jednakost $m^{[n]}\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} m^{[n]}(A_i)$, potreban i dovoljan uslov je da agregacioni operator A ima svojstvo da za svaku familiju brojeva $x_{i,j} \geq 0$, $i, j \in \mathbb{N}$ i svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ važi

$$A\left(\sup_{j_1\in\mathbb{N}} x_{1,j_1}, \dots, \sup_{j_n\in\mathbb{N}} x_{n,j_n}\right) = \sup_{j\in\mathbb{N}} A(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}). \tag{4.5}$$

Na primer, lako se proverava da agregacioni operator max iz primera 3.3 ima osobinu 4.5, te se njegovom primenom na familiju sup-dekompozabilnih mera dobija sup-dekompozabilna mera $m^{[n]}$. Takođe se lako proverava da agregacioni operator tipa *pozitivna linearna kombinacija* iz primera 3.2 nema osobinu 4.5, te se njegovom primenom na familiju sup-dekompozabilnih mera ne dobija sup-dekompozabilna mera $m^{[n]}$. Ipak, funkcija $m^{[n]}$ dobijena primenom agregacionog operatora *pozitivna linearna kombinacija* može imati dobre osobine u primeni iako nije dekompozabilna mera. Kao ciljevi istraživanja se nameću sledeća pitanja. Kombinacijom kojih agregacionih operatora i σ-dekompozabilnih mera se dobija σ-dekompozabilna mera $m^{[n]}$ nekog tipa? Kombinacijom kojih agregacionih operatora i σ-dekompozabilnih mera se dobija skupovna funkcija $m^{[n]}$ koja ima dobre osobine za određene vidove primene?

Zahvalnica

Rad je finansiran sredstvima sa projekta Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu, u okviru projekta „Matematika primenjena u fizičko-tehničkim i ekonomsko-finansijskim disciplinama”.

Literatura

[1] P. R. Halmos, *Measure Theory.* New York: Springer-Verlag NewYork-Heidelberg-Berlin, 1950.

[2] E. Pap, *Null-Additive Set Functions.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[3] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[4] M. Grabish, J.-L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap, *Aggregation Functions.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[5] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality.* Springer Science & Business Media, 2009.