Fakultet Tehničkih Nauka, Novi Sad

PROBNI TEST ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Za koje vrednosti parametra $p \in \mathbb{R}$ polinom $f(x) = 2x^2 + (p+1)x - p$ ima tačno jedan, i to pozitivan realan koren?

2. U skupu realnih brojeva rešiti po x nejednačinu $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} < -1$.

3. U skupu realnih brojeva rešiti po x jednačinu $4\sin^2 x + 5\sin x + \cos(2x) + 1 = 0$.

4. U skupu realnih brojeva rešiti po x i y sistem jednačina
   $\log_2 (x+2)^3 + \log_3 (y+1)^2 = 6$
   $\log_4 (x+2)^4 + \log_9 \frac{1}{y+1} = 4$.

5. U skupu realnih brojeva rešiti po x jednačinu $2^{x+1} - 2^{2-x} + 7 = 0$.

6. Odrediti preseke sa y-osom onih tangenti elipse $E : \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ koje sa pozitivnim delom x-ose zaklapaju orijentisani ugao $\frac{\pi}{4}$.

7. Izračunati površinu trapeza čije su kraća osnovica i kraci dužine 2, a duža osnovica sa kracima zaklapa 2 puta manji ugao od ugla između kraće osnovice i kraka.

8. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom pravouglog trougla čije su katete $a = 2$ i $b = 3$ oko ose koja sadrži teme kod pravog ugla i paralelna je sa hipotenuzom.

9. Neka je T težište (centar opisanog kruga) pravilnog šestougla $ABCDEF$, i neka je O proizvoljna tačka u prostoru.
   (a) Dokazati da je $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right)$.
   (b) Ako je O koordinatni početak, a ako je $A\left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ i $B\left(-\sqrt{3}, 1, 2\right)$, izračunati ugao između vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

10. Dokazati da je broj $3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4$ deljiv sa 9 za svaki prirodan broj n.

11. Koliko se četvorocifrenih brojeva može napisati koristeći cifre $1, 3, 5, 7, 9$, takvih da se među ciframa bar jednom pojavljuje cifra 1.

12. Izračunati graničnu vrednost niza $a_n = \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{2n^2-1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Data je funkcija $f(x) = e^{x+3} - x$.
    (a) Izračunati prvi izvod funkcije f.
    (b) Izračunati tačku minimuma funkcije f na intervalu $[-4, 0]$.

REŠENJA:

1. Koreni polinoma $f(x)$ su $x_{1,2} = \dfrac{-(p+1) \pm \sqrt{(p+1)^2 + 8p}}{4} = \dfrac{-p-1 \pm \sqrt{p^2+10p+1}}{4}$, te su x_1 i x_2 jednaki, pozitivni realni brojevi ako i samo ako su zadovoljeni uslovi

   (1) $p^2 + 10p + 1 = 0$ i (2) $x_1 = x_2 = \frac{-p-1}{4} > 0$.

   Analizom ovih uslova dobijamo:

   (1) $p^2 + 10p + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; p_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{6}$;

   (2) $\dfrac{-p-1}{4} > 0 \;\Leftrightarrow\; p+1 < 0 \;\Leftrightarrow\; p < -1$.

   - Kako je očigledno $p_1 = -5 - 2\sqrt{6} < -1$, sledi da $-5 - 2\sqrt{6}$ jeste rešenje zadatka,
   - kako je $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$, to je $2\sqrt{6} > 4$, te je $p_2 = -5 + 2\sqrt{6} > -1$, tako da $-5 + 2\sqrt{6}$ nije rešenje zadatka.

   Dakle, skup rešenja postavljenog problema je $\mathcal{R} = \left\{-5 - 2\sqrt{6}\right\}$.

2. Domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, i za $x \in \mathcal{D}$ je

   $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4} < -1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4} + 1 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{2x^2+x-6}{x^2-4} < 0.$

   * Funkcija $f(x) = 2x^2 + x - 6$ je konveksna, a koreni su joj $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4} = \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$.
   * Funkcija $g(x) = x^2 - 4$ je konveksna, a koreni su joj $x_{1,2} = \pm 2$.

   Sledi:

	-2	$\frac{3}{2}$	2	
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$	$+$	$-$	$+$

   Prema tome, skup rešenja nejednačine je $\mathcal{S} = \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

3. Koristeći jednakosti $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ i $\cos^s x = 1 - \sin^2 x$ dobijamo

   $4\sin^2 x + 5\sin x + \cos(2x) + 1 = 4\sin^2 x + 5\sin x + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 1 =$
   $= 3\sin^2 x + 5\sin x + \cos^2 x + 1 = 3\sin^2 x + 5\sin x + \left(1 - \sin^2 x\right) + 1 = 2\sin^2 x + 5\sin x + 2.$

   Dakle,

   $4\sin^2 x + 5\sin x + \cos(2x) + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\quad \left(t = \sin x \;\wedge\; 2t^2 + 5t + 2 = 0\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(t = \sin x \;\wedge\; t_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}\right) \quad\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\quad \left(t = \sin x \;\wedge\; \left(t = -2 \;\vee\; t = -\frac{1}{2}\right)\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sin x = -2 \;\vee\; \sin x = -\frac{1}{2}\right).$

   Jednačina $\sin x = -2$ nema rešenja, a jednakost $\sin x = -\frac{1}{2}$ važi za $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Dakle, skup rešenja jednačine je $\mathcal{R} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. S obzirom na to da je logaritamska funkcija definisana na skupu pozitivnih realnih brojeva, sistem jednačina je definisan za one x, y za koje je

   $\left((x+2)^3 > 0 \;\wedge\; (y+1)^2 > 0 \;\wedge\; (x+2)^4 > 0 \;\wedge\; \frac{1}{y+1} > 0\right) \quad\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\quad (x+2 > 0 \;\wedge\; y+1 \neq 0 \;\wedge\; x+2 \neq 0 \;\wedge\; y+1 > 0) \quad\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\quad (x > -2 \;\wedge\; y \neq -1 \;\wedge\; x \neq -2 \;\wedge\; y > -1),$

   te je domen rešavanja sistema jednačina skup $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x > -2 \;\wedge\; y > -1\}$.

   Kako je

$\log_2 (x+2)^3 = 3\log_2 (x+2)$,

$\log_3 (y+1)^2 = 2\log_3 (y+1)$,

$\log_4 (x+2)^4 = 4\log_{2^2} (x+2) = 4\frac{1}{2}\log_2 (x+2) = 2\log_2 (x+2)$,

$\log_9 \frac{1}{y+1} = \log_{3^2} (y+1)^{-1} = -\frac{1}{2}\log_3 (y+1)$,

polazni sistem je ekvivalentan sa $\begin{array}{l} 3\log_2 (x+2) + 2\log_3 (y+1) = 6 \\ 2\log_2 (x+2) - \frac{1}{2}\log_3 (y+1) = 4. \end{array}$,

te uvođenjem smene $p = \log_2 (x+2)$ i $q = \log_3 (y+1)$ dobijamo

$$\begin{array}{rcrcl} 3p & + & 2q & = & 6 \\ 2p & - & \frac{1}{2}q & = & 4 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 11p & & & = & 22 \\ 2p & - & \frac{1}{2}q & = & 4 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p = 2 \\ q = 0 \end{array}.$$

Vraćanjem smene sledi

$$\begin{array}{l} \log_2 (x+2) = 2 \\ \log_3 (y+1) = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x+2 = 2^2 = 4 \\ y+1 = 3^0 = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array}.$$

Kako je $(2,0) \in \mathcal{D}$, sistem ima jedno rešenje, tj. skup rešenja je $\mathcal{R} = \{(2,0)\}$.

5. $2^{x+1} - 2^{2-x} + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^x - 4 \cdot (2^x)^{-1} + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow$

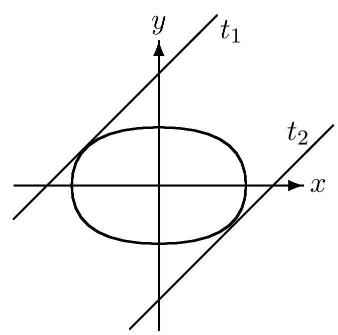
$\Leftrightarrow \quad \big(2^x = t \ \wedge \ 2t - 4t^{-1} + 7 = 0 \ \ / \cdot t \neq 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$

(za $t = 0$, jednačina $2^x = 0$ nema rešenja)

$\ldots \quad \Leftrightarrow \quad \big(2^x = t \ \wedge \ 2t^2 + 7t - 4 = 0\big) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \Big(2^x = t \ \wedge \ t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \big\{-4, \frac{1}{2}\big\}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(2^x = -4 \ \vee \ 2^x = \frac{1}{2}\big).$

Vrednost eksponencijalne funkcije je uvek pozitivna, te jednačina $2^x = -4$ nema rešenja, a rešenje jednačine $2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ je $x = -1$. Dakle, skup rešenja je $\mathcal{R} = \{-1\}$.



6. Tangenta t koja sa pozitivnim delom x-ose zaklapa ugao od 45° ima jednačinu $t: \ y = \mathrm{tg}\,(45^\circ)x + n = x + n$. Presek tangente t sa y-osom je tačka $(0,n)$, tako da je zadatak odrediti $n \in \mathbb{R}$ za koje prava $t: \ y = x + n$ dodiruje elipsu, tj. ima tačno jednu zajedničku tačku sa elipsom, odnosno treba odrediti $n \in \mathbb{R}$ za koje sistem jednačina

$$[\mathrm{e}] \ \ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad\qquad [\mathrm{t}] \ \ y = x + n$$

ima tačno jedno rešenje po (x,y). Uvrštavanjem [t] u [e] dobijamo

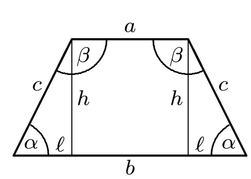
$\frac{x^2}{1} + \frac{(x+n)^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + (x+n)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 + 2nx + \big(n^2 - 4\big) = 0.$

Poslednja kvadratna jednačina ima tačno jedno rešenje akko joj je diskriminanta jednaka nuli, tj. akko je

$4n^2 - 20\big(n^2 - 4\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4n^2 + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = \pm\sqrt{5}.$

Dakle, dve tangente na elipsu su $t_1: \ y = x - \sqrt{5}$ i $t_2: \ y = x - \sqrt{5}$, i njihovi preseci sa y-osom su $\big\{\big(0, -\sqrt{5}\big), \big(0, \sqrt{5}\big)\big\}$.

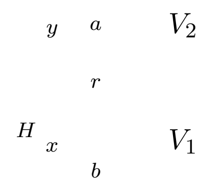
7. Neka je $a = 2$ kraća osnovica, b duža osnovica, neka su $c = 2$ kraci, i neka je α oštar, a β tup ugao trapeza. Neka je h visina trapeza, i $\ell = \frac{b-1}{2}$ (vidi sliku).



Iz $\beta = 2\alpha \ \wedge \ \alpha + \beta = 180^\circ$ sledi $\alpha = 60^\circ$.
Iz $\sin\alpha = \frac{h}{2}$ tj. sledi $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2}$ sledi $h = \sqrt{3}$.
Dalje dobijamo $\ell = \sqrt{c^2 - h^2} = 1$ i $b = a + 2\ell = 4$.
Konačno, površina trapeza je $P = \frac{a+b}{2}h = 3\sqrt{3}$.

8. Rotacijom posmatranog trougla nastaje valjak V iz koga su izvađene kupe V_1 i V_2 (vidi sliku), tako da ćemo zapreminu posmatranog tela dobiti tako što ćemo od zapremine valjka oduzeti zapremine kupa V_1 i V_2.

   Visina valjka V je hipotenuza posmatranog pravouglog trougla: $H = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$. Neka je r visina posmatranog trougla koja odgovara stranici H tj. temenu kod pravog ugla. Iz površine trugla $P = \frac{ab}{2} = \frac{Hr}{2}$ sledi $\frac{2\cdot 3}{2} = \frac{\sqrt{13}r}{2}$, odnosno $r = \frac{6}{\sqrt{13}}$. Sada dobijamo zapreminu valjka: $V = r^2\pi H = \frac{36}{\sqrt{13}}\pi$.

   Označimo sa x i y odsečke na H koje gradi visina r. Duži x i y su redom visine valjaka V_1 i V_2. Njihove dužine su
   $x = \sqrt{b^2-r^2} = \frac{9}{\sqrt{13}}, \qquad y = H - x = \frac{4}{\sqrt{13}}.$
   Zapremine kupa V_1 i V_2 su
   $V_1 = \frac{1}{3}r^2\pi x = \frac{108}{13\sqrt{13}}\pi, \qquad V_2 = \frac{1}{3}r^2\pi y = \frac{48}{13\sqrt{13}}\pi,$
   te je zapremina obrtnog tela
   $$V - V_1 - V_2 = \frac{24}{\sqrt{13}}\pi.$$

9. (a) Sabiranjem očiglednih jednakosti
   $$\begin{array}{lll} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} & \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} & \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TE} \\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} & \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TD} & \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TF} \end{array}$$
   dobijamo
   $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = 6\overrightarrow{OT} + \left(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TD}\right) + \left(\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TE}\right) + \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TF}\right) =$
   $= 6\overrightarrow{OT} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = 6\overrightarrow{OT},$
   te deljenjem zadnje jednakosti sa 6 sledi tvrđenje.

   (b) $\overrightarrow{OA} = A\big(1, \sqrt{3}, 2\big), \quad \overrightarrow{OB} = B\big(-\sqrt{3}, 1, 2\big).$
   S jedne strane je
   $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot \big(-\sqrt{3}\big) + \sqrt{3} \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4,$
   a s druge
   $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right) =$
   $= \sqrt{1^2 + \big(\sqrt{3}\big)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{\big(-\sqrt{3}\big)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right) = 8 \cdot \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right).$
   Iz $4 = 8 \cdot \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right)$ sledi $\cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right) = \frac{1}{2}$, odakle sledi da je $\measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$.

10. Matematičkom indukcijom dokazujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ važi
   $F(n): \quad 9 \mid \big(3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4\big),$
   tj. da je $3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4 = 9m_n$ za neko $m_n \in \mathbb{Z}$.

   - Za $n = 1$ je $3 \cdot 4^{1+1} + 10^{1-1} - 4 = 45 = 9 \cdot 5$;
   - pretpostavimo da je tačno $[*]F(k)$, tj. da je $3 \cdot 4^{k+1} + 10^{k-1} - 4 = 9m_k$;
   - za $n = k+1$ je
     $3 \cdot 4^{(k+1)+1} + 10^{(k+1)-1} - 4 = 12 \cdot 4^{k+1} + 10 \cdot 10^{k-1} - 4 =$
     $3 \cdot 4^{k+1} + 10^{k-1} - 4 + 9 \cdot 4^{k+1} + 9 \cdot 10^{k-1} \overset{[*]}{=} 9m_k + 9 \cdot 4^{k+1} + 9 \cdot 10^{k-1} = 9\big(m_k + 4^{k+1} + 10^{k-1}\big),$
     gde je $m_k + 4^{k+1} + 10^{k-1} = m_{k+1}$ očigledno ceo broj.

11. Traženi broj n možemo dobiti tako što ćemo od ukupnog broja 4-cifrenih brojeva napisanih pomoću cifara $1, 3, 5, 7, 9$ oduzeti broj 4-cifrenih brojeva napisanih pomoću cifara $3, 5, 7, 9$ (tj. bez ijedne cifre 1). Tako dobijamo
   $$n = 5^4 - 4^4 = 625 - 256 = 369.$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n+3} - \dfrac{2n^2-1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2-1\right)(n+1)-(n+3)\left(2n^2-1\right)}{(n+3)(n+1)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^3-5n^2+2}{n^2+4n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^3-5n^2+2}{n^2+4n+3} : \dfrac{n^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n-5+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = \dfrac{-\infty-5+0}{1+0+0} = -\infty.$

13. Data je funkcija $f(x) = e^{x+3} - x$.

   (a) $f'(x) = e^{x+3}\cdot 1 - 1 = e^{x+3} - 1$.

   (b) Najpre izračunavamo stacionarne tačke:
   $f'(x) = e^{x+3} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+3} = 1 = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \in [-4, 0]$.
   Kako je $f''(x) = e^{x+3}\cdot 1 - 0 = e^{x+3}$ i $f''(-3) = 1 > 0$, sledi da je $x_0 = -3$ tačka lokalnog minimuma funkcije $f(x)$ na intervalu $[-4, 0]$, i funkcija f u njoj dostiže vrednost
   $f(-3) = e^{-3+3} - (-3) = 4$. Pri tome na krajevima intervala važi
   $f(-4) = e^{-4+3} - (-4) = \frac{1}{e} + 4 > 4$ i $f(0) = e^3 - 0 > 2^3 = 8 > 4$, te je tačka $x_0 = 3$ tačka u kojoj funkcija f dostiže apsolutni minimum na intervalu $[-4, 0]$.