Sadržaj

Predgovor

Ova knjiga sadrži dve celine

– teoriju verovatnoće,
– slučajne procese.

Namenjena je pre svega studentima Elektrotehničkog odseka Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, ali je zbog nivoa izlaganja i raznovrsnosti sadržaja mogu koristiti studenti ostalih odseka FTN, matematike i fizike, i svi koji žele da se upoznaju sa osnovama teorije verovatnoće, matematičke statistike i slučajnih procesa. Za uspešno razumevanje materije obrađene u knjizi, potrebno je da čitalac bude upoznat sa osnovama matematičke analize, čiji nivo odgovara standardnim kursevima koji se predaju na tehničkim fakultetima.

Nastojala sam da izlaganje s jedne strane bude postupno i pristupačno, a s druge strane da bude matematički korektno. Tekst sadrži veći broj rešenih primera koji ilustruju gradivo i olakšavaju njegovo usvajanje.

Zahvaljujem svima koji su mi na bilo koji način pomogli u realizaciji ovog udžbenika.

10. mart 2013.g. *Autor*

Uvod

Teorija verovatnoće je matematička disciplina koja daje okvir za ispitivanje slučajnih pojava tj. takvih empirijskih fenomena čiji ishodi nisu uvek definisani, ali za njih postoji neka statistička regularnost. Razjasnićemo to na vrlo jednostavnom primeru bacanja novčića. Pravilan novčić bacamo u vis iznad ravne površine i pri njegovom padu na tu površinu moguća su dva ishoda – na gornjoj strani je palo pismo ili glava. Iz iskustva znamo da je mogućnost da novčić ostane uspravan praktično nemoguć događaj. Takođe, ne možemo unapred znati da li će pasti pismo ili glava, što znači da ishod nije definisan. Ako novčić bacamo mnogo puta, glava će pasti u približno polovini slučajeva i to je statistička regularnost koja odlikuje ovu slučajnu pojavu. U svakodnevnom govoru opisujemo ovu pojavu rečenicom: „Verovatnoća da će pasti glava je 50%" i svima nam je intuitivno jasno šta ona znači.

Početak razvoja teorije verovatnoće se vezuje za XVII vek i za imena francuskih matematičara Paskala i Fermaa (Blaise Pascal, 1623-1662, Pierre de Fermat, 1601-1665). Naime, 1654. godine je Paskalu jedan prijatelj kockar postavio sledeći problem: Dva igrača se dogovore da ulog u igri dobije onaj koji prvi odnese 3 pobede. Posle dve pobede prvog i jedne pobede drugog, igra je sticajem okolnosti morala da bude prekinuta. Na koji način treba pošteno podeliti ulog a da to odražava realne šanse za pobedu koje ima svaki od igrača? Paskal je našao da su šanse za pobedu 3:1 u korist prvog igrača i predložio je podelu uloga u tom odnosu. Često se uzima da je tada počeo teorijski razvoj verovatnoće. Ona je dugo bila usko povezana sa problemima hazardnih igara.

Navodimo imena nekih matematičara koji su značajno doprineli razvoju teorije verovatnoća: Abraham de Moavr (Abraham de Moivre, 1667-1754), Žak Bernuli (Jacques Bernoulli, 1665-1705), Pjer Laplas (Pierre Laplace, 1749-1827), Simeon Poason (Siméon Poisson, 1781-1840), Karl Fridrih Gaus (Carl

Friedrich Gauss, 1777-1855), Pafnutij Ljvovič Čebišev (1821-1894), Andrej Andrejevič Markov (1856-1922). Posebno ističemo ruskog matematičara Andreja Nikolajeviča Kolmogorova(1903-1987) koji je najviše zaslužan za aksiomatizaciju verovatnoće (1933.g.) i njen dalji razvoj kao moderne matematičke nauke.

U današnje vreme teško je naći oblast nauke ili čovekove delatnosti koja se može korektno izučavati i predstaviti bez primena teorije verovatnoće. Srećemo je ne samo u slučajnim igrama, nego i u raznim problemima u prirodnim i društevenim naukama. Posebno je široko polje primena matematičke statistike, koja je zasnovana na teoriji verovatnoće.

Glava 1

Uvod u teoriju verovatnoće

Pri izvođenju nekog opita njegov ishod će zavisiti od mnogih uticaja. Osnovna podela svih opita je na determinirane (npr. one koji su zasnovani na klasičnim zakonima mehanike) i verovatnosne.

Karakteristika verovatnosnih opita je to što im je ishod slučajan, nejednoznačan. Ako se verovatnosni opit ponavlja mnogo puta pri istim uslovima, pojavljuje se određena zakonitost u skupu ishoda. Teorija verovatnoće se bavi tim zakonitostima.

Teorija verovatnoće se dugo razvijala pod uticajem vrlo praktičnih problema na bazi empirijsko–intuitivnih motivacija. To nije omogućilo izgradnju konzistentne matematičke teorije koja bi poslužila kao model za sve one realne fenomene za koje se intuitivno očekivalo da budu obuhvaćeni jednom takvom matematičkom teorijom. Tek je u XX veku verovatnoća postala matematička disciplina sa svojim jasno definisanim metodama i predmetom izučavanja. Ona se od tada razvija kao matematička disciplina ne samo u skladu sa konkretnim problemima, empirijskim i intuitivnim motivima, nego kao samostalna nauka sledeći logiku njenih unutrašnjih potreba kao nezavisne celine. Godina 1933, kada je N.A.Kolmogorov objavio rad u kojem je izložio osnovne postavke aksiomatske zasnovanosti teorije verovatnoće, smatra se početkom modernog razvoja ove matematičke oblasti. Ovakav pristup je omogućio formiranje jedne formalno–logičke teorije u kojoj su istaknute samo bitne osobine pojma verovatnoće i pojma događaja kao određenih matematičkih objekata i koja te pojmove povezuje sa drugim matematičkim pojmovima (brojevima, skupovima, funkcijama) koristeći i dalje razvijajući već poznatu teoriju iz ovih oblasti.

1.1. Algebra događaja

U ovom poglavlju ćemo uvesti pojmove koji će nam biti potrebni za formulisanje aksiomatske teorije verovatnoće.

Osnovni polazni pojam u teoriji verovatnoće je neprazan skup Ω koji ćemo nazivati **skup elementarnih događaja**. On predstavlja skup svih mogućih ishoda jednog verovatnosnog opita. Elemente skupa Ω nazivamo **elementarnim događajima** i označavamo ih sa ω.

Pri bacanju kockice za igru „Ne ljuti se čoveče", na gornjoj strani kockice će biti n tačkica, $n = 1, 2, \dots, 6$, tako da će u tom verovatnosnom opitu skup elementarnih događaja biti $\Omega = \{$⚀⚁⚂⚃⚄⚅$\}$, gde će svaki od mogućih ishoda $\omega_1 =$ ⚀, $\omega_2 =$ ⚁, …, $\omega_6 =$ ⚅ biti elementarni događaj.

Pojava koju posmatramo određuje sa kojim ćemo skupom elementarnih događaja raditi. Ovaj skup ne mora da bude konačan. Recimo, slučajan opit koji predstavlja težinu slučajno izabranog čoveka ima beskonačno mnogo ishoda.

Događaj A je podskup skupa Ω. Sastoji se od elementanih događaja ω koji imaju to svojstvo kojim se A definiše. Tako događaj A koji se realizuje ako padne paran broj pri bacanju kockice za „Ne ljuti se čoveče", je skup $\{$⚁, ⚃, ⚅$\}$.

Kažemo da se događaj A realizovao ako se realizovao neki od elementarnih događaja koji mu pripadaju.

Skup Ω nazivamo **sigurnim događajem** – on se mora dogoditi pri vršenju opita. Prazan skup $\emptyset$ je **nemoguć događaj** i on se nikada ne može dogoditi.

Ako je A događaj, onda komplement $\Omega \setminus A$ nazivamo **suprotnim događajem** i obeležavamo ga sa $\bar{A}$. Događaj $\bar{A}$ se realizuje ako i samo ako se A ne realizuje.

Za događaj A kažemo da **povlači** (implicira) događaj B ako je $A \subseteq B$.

Skup $A \cap B$ je **presek događaja** A i B i realizuje se ako i samo ako se realizuju oba događaja A i B. Presek događaja $A \cap B$ ćemo kraće označavati sa AB. Ako su A i B disjunktni skupovi ($A \cap B = \emptyset$) kažemo da se događaji A i B isključuju. Za konačnu ili prebrojivu familiju međusobno disjunktnih podskupova $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ kažemo da je familija događaja koji se međusobno isključuju ako je $A_k \cap A_n = \emptyset$, $k \neq n$, $\quad k, n = 1, 2, \dots$.

Skup $A \cup B$ je **unija događaja** A i B i realizuje se ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A i B. U slučaju kad su događaji A i B disjunktni ($A \cap B = \emptyset$) pisaćemo $A + B$. U slučaju unije familije međusobno disjunktnih događaja $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, uniju $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ćemo zapisivati sa $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Kako su operacije unije, preseka i komplementa uvedene nad skupom događaja na potpuno isti način kao što je to učinjeno u teoriji skupova, očito da sva pravila, odnosi i operacije koje važe u teoriji skupova važe i nad skupom događaja.

1.2. Aksiome teorije verovatnoće

Teorija verovatnoće se skoro tri stotine godina razvijala bez strogo definisanih aksioma verovatnoće. Svaki pokušaj uvođenja strogog matematičkog formalizma u ovu oblast zasnivao se na intuitivnoj predstavi verovatnoće događaja kao relativnoj učestalosti broja povoljnih ishoda i generalizaciji tog pojma. S jedne strane, takav pristup je omogućio da se dobiju mnogi veoma značajni rezultati ali, sa druge strane, on je predstavljao ograničenje pri razvoju verovatnoće kao moderne matematičke discipline koja bi predstavljala teorijski okvir za niz veoma složenih procesa i pojava u prirodi, nauci i tehnici. Aksiomatika, koju je Kolmogorov uveo 1933, obuhvatala je sve dotadašnje rezultate i dala je dobru osnovu za razvoj novih oblasti teorije verovatnoće.

Da bismo formirali matematički model kojim možemo izraziti verovatnosni eksperiment, uvodimo aksiome teorije verovatnoće. Prvi aksiom izdvaja klasu događaja dovoljnu za opisivanje zakonitosti pojave koju posmatramo, a drugi aksiom određuje verovatnoću realizacije događaja iz klase prvog aksioma.

Označimo sa $\mathcal{P}(\Omega)$ partitivni skup skupa Ω.

Aksiom 1. (aksiom $\sigma-$ polja). Neka je $\mathcal{F}$ podskup partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$. Ako su zadovoljeni uslovi:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) ako $A \in \mathcal{F}$, tada $\bar{A} \in \mathcal{F}$,

(iii) ako je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, tada $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,

tada je $\mathcal{F}$ $\sigma-$**polje** nad Ω.

Osobine $\sigma-$polja

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Ako $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, tada $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
3. Ako $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, tada $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
4. Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, tada $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Primer 1.2.a. Neka je Ω skup ishoda pri bacanju kockice za igru „Ne ljuti se čoveče" i neka je A događaj koji se realizuje ako padne strana sa manje od 3 tačkice. Tada sledeći skupovi čine σ–polje:

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset\}, \ \ \mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}, \ \ \mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$$

gde je $\mathcal{P}(\Omega)$ - partitivni skup od Ω). □

Primer 1.2.b. Borelovo polje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je σ–polje definisano nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$. Formira se na sledeći način: Izdvojimo familiju poluotvorenih intervala tipa $[a, b), \ a, b \in \mathbb{R}$. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve skupove koji se dobijaju uzimanjem komplementa, konačne ili prebrojive unije ili preseka te familije. Može se pokazati da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve otvorene, zatvorene, poluotvorene intervale, izolovane tačke, unije tih skupova i sl., ali postoje podskupovi od $\mathbb{R}$ koji nisu elementi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Aksiom 2. (aksiom verovatnoće). Neka je $\mathcal{F}$ σ–polje nad skupom Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uslove

(i') $P(\Omega) = 1$,

(ii') za sve $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$,

(iii') ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, \ \ A_i \cap A_j = \emptyset \ , i \neq j$, tada

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

je **verovatnoća** na $\mathcal{F}$.

Osobine verovatnoće

1. $\boxed{P(\emptyset) = 0.}$

   Dokaz: Kako je $\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \ldots$, iz (iii') dobijamo

   $$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset + \emptyset + \ldots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots$$

   što daje

   $$0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots, \quad \text{tj.} \quad P(\emptyset) = 0.$$

2. Ako $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}, \ \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j$, tada

   $$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. $\boxed{\text{Ako je } A \subseteq B, \text{ tada je } P(A) \leq P(B).}$

   Dokaz: Ako je $A \subseteq B$, onda je $B = A + \bar{A}B$. Dalje imamo

   $P(B) = P(A) + P(\bar{A}B)$, tj. $P(A) \leq P(B)$.

4. $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1.}$ za svako $A \in \mathcal{F}$.

   Dokaz: Kako je $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, na osnovu osobine 3. sledi da je

   $0 \leq P(A) \leq 1$.

5. $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A).}$

6. $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

   Dokaz: Iz jednakosti skupova $A \cup B = A + B \setminus A$, $B = AB + B \setminus A$, sledi jednakost odgovarajućih verovatnoća

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$
   $$P(B) = P(AB) + P(B \setminus A).$$

   Iz druge jednakosti je $P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$, pa zamenom u prvu jednakost dobijamo

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

7. $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P(A_iA_j) + \sum\limits_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j, i\neq k, k\neq j}}^{n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1 \ldots A_n).$

8. $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2\bar{A}_1) + P(A_3\bar{A}_1\bar{A}_2) + \cdots + P(A_n\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-1}).$

9. Ako je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, onda je

   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$$

10. Ako je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, onda je

    $$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Primer 1.2.c. Neka je dato σ–polje, $\mathcal{F}_2$ iz primera 1.2.a. Tada funkcije P_1 i P_2

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
P_1(\Omega) & = & 1 & P_2(\Omega) & = & 1 \\
P_1(\emptyset) & = & 0 & P_2(\emptyset) & = & 0 \\
P_1(A) & = & 1/3 & P_2(A) & = & 1 \\
P_1(\bar{A}) & = & 2/3 & P_2(\bar{A}) & = & 0
\end{array}$$

jesu verovatnoće, a funkcije P_3 i P_4

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} P_3(\Omega) & = & 1 & P_4(\Omega) & = & 1 \\ P_3(\emptyset) & = & 0 & P_4(\emptyset) & = & 0 \\ P_3(A) & = & 1/2 & P_4(A) & = & 0 \\ P_3(\bar{A}) & = & 2/3 & P_4(\bar{A}) & = & 0 \end{array}$$

nisu verovatnoće. □

Trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ-algebra nad Ω i P je verovatnoća na $\mathcal{F}$, naziva se **prostorom verovatnoća**. Ako je $A \neq \Omega$ i $P(A) = 1$, onda je A **skoro siguran** događaj (npr. događaj A u prostoru $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$ iz primera 1.2.c). Ako je $B \neq \emptyset$ i $P(B) = 0$, onda je B **skoro nemoguć** događaj (npr. događaj $\bar{A}$ u prostoru $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$ iz primera 1.2.c).

1.3. Metode zadavanja verovatnoće

U prethodnom odeljku smo videli da svakom događaju A iz $\mathcal{F}$ dodeljujemo brojnu vrednost $P(A)$ koju nazivamo verovatnoćom od A. Intuitivno, pod verovatnoćom od A podrazumevamo stepen mogućnosti realizacije događaja A. Očito da istom događaju mogu da budu dodeljene razne brojne vrednosti verovatnoće u zavisnosti od konkretne fizičke situacije, ali se mora voditi računa da aksiome 1. i 2. budu zadovoljene. Navešćemo neke načine zadavanja verovatnoće.

1.3.1. Klasični metod

Skup Ω sadrži konačno elementarnih događaja $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Ako je ishod svakog od njih jednako verovatan (kao što je, recimo, pri bacanju kockice za igru „Ne ljuti se čoveče”), tada svakom elementarnom događaju ω_i dodeljujemo jednu istu verovatnoću, tj.

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Da bi funkcija P zadovoljila Aksiom 2, verovatnoću događaja $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ definišemo sa

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

gde je k broj elementarnih događaja sadržanih u A.

Primer 1.3.a. Ako je Ω kao u primeru 1.2.a. i svih šest ishoda imaju istu verovatnoću, tada je verovatnoća za događaj A - pašće paran broj,

$$P(A) = P(\{⚁⚃⚅\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

1.3.2. Metod zadavanja verovatnoće na diskretnom skupu

Ako je Ω diskretan skup koji sadrži konačno ili prebrojivo mnogo elementarnih događaja $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ i ako su zadate verovatnoće elementarnih događaja

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

tada će verovatnoća događaja $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots\}$ biti jednaka zbiru verovatnoća koje odgovaraju elementarnim događajima koji pripadaju događaju A, tj.

$$P(A) = \sum_{\substack{n \\ \omega_{i_n} \in A}} p_{i_n}.$$

Primer 1.3.c. Na aparatu za igru se pojavljuje broj $n \in \mathbb{N}$ sa verovatnoćom $1/2^n$. Kolika je verovatnoća da će se pojaviti neparan broj?

Rešenje: U ovom slučaju je $\Omega = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ i $p_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Događaj $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots\}$ ima verovatnoću

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2k+1}} + \cdots = \frac{2}{3}.$$

$\square$

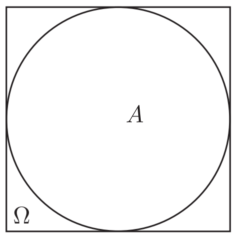
1.3.3. Geometrijski metod

Pretpostavimo da skup Ω sadrži elementarne događaje koji se mogu predstaviti kao tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$ a događaj A kao neka oblast tog prostora. Neka Ω bude ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ sa konačnom geometrijskom merom. Svaki podskup A od Ω sa konačnom geometrijskom merom (u $\mathbb{R}^1$ je to dužina, u $\mathbb{R}^2$ površina, u $\mathbb{R}^3$ zapremina) smatraćemo događajem. Tada verovatnoću događaja A definišemo sa

$$P(A) = \frac{\mathrm{m}(A)}{\mathrm{m}(\Omega)},$$

gde je $\mathrm{m}(\cdot)$ oznaka za geometrijsku meru.

Primer 1.3.d. Na slučaj se bira tačka iz kvadrata stranice a. Naći verovatnoću da se slučajno izabrana tačka nalazi u krugu upisanom u kvadrat.

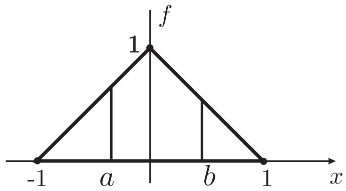


Rešenje: U ovom slučaju mera događaja će biti njegova površina. Skup Ω je skup tačaka kvadrata, a događaj A je skup tačaka upisanog kruga, te je

$$P(A) = \frac{\mathrm{m}(A)}{\mathrm{m}(\Omega)} = \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Primer 1.3.e. Na slučajan način se bira broj x iz intervala $[-1, 1]$. Verovatnoća da je x između a i b, gde je $a \leq b$, $a, b \in [-1, 1]$, jednaka je površini dela trougla između a i b kao što je predstavljeno na slici.



Naći verovatnoću događaja A i B, gde je $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, a $B = \{\frac{1}{3}\}$.

Rešenje: $P(A)$ nalazimo kao površinu ograničene figure gde je $a = -\frac{1}{2}$ a $b = \frac{1}{4}$. Ona je jednaka $\frac{19}{32}$. Kako događaj B sadrži samo tačku $\frac{1}{3}$, te je $a = b = \frac{1}{3}$, što znači da je $P(B) = 0$.

Do rešenja se može doći i na sledeći način:
Definišimo funkciju f sa

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0) \\ -x + 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Tada površinu osenčene figure možemo naći kao određeni integral funkcije f u granicama od a do b, te ako je $A = [a, b]$, imamo da je

$$P(A) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Zadatak rešavamo zamenjujući konkretne vrednosti za a i b. □

1.3.4. Verovatnoća na neprekidnom skupu realnih brojeva

Neka je $\Omega = [a, b]$, gde su a i b realni brojevi i neka je $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, neprekidna, nenegativna funkcija definisana nad intervalom $[a, b]$. Ako je $A \subseteq [a, b]$, tada definišemo $P(A)$ sa

$$P(A) = \frac{1}{m} \int_A \varphi(x)\, dx,$$

gde je $m = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, dx \neq 0$. Ovako definisana funkcija P zadovoljava uslove Aksioma 2, te predstavlja verovatnoću. Verovatnoća je definisana za sve podskupove A intervala $[a, b]$ za koje postoji $\displaystyle\int_A \varphi(x)\, dx$.

Primer 1.3.c. Neka je $\Omega = [0, 2]$ i neka je $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$. Pomoću funkcije φ definisati verovatnoću na Ω. Zatim naći $P(A)$, gde je $A = (0, 1)$.

Rešenje: Za $A \subseteq \Omega$ definišemo $P(A)$ sa

$$P(A) = \frac{1}{m} \int_A x^2\, dx, \quad m = \int_0^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Ako je $A = (0, 1)$, tada je $P(A) = \dfrac{3}{8} \displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \dfrac{1}{8}$. □

1.4. Uslovna verovatnoća

Pretpostavimo da je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i da je on matematički model nekog verovatnosnog eksperimenta. Svaki događaj $A \in \mathcal{F}$ se realizuje sa verovatnoćom $P(A)$. Očito da informacija da se u eksperimentu realizovao događaj $B \in \mathcal{F}$ može uticati na verovatnoću realizacije događaja A koji je na neki način povezan sa B.

Primer 1.4.a. Recimo da je Ω skup ishoda pri bacanju dva novčića i recimo da imamo informaciju da je na oba pao isti znak (pismo-pismo ili glava-glava). Posle te informacije verovatnoća događaja da je na prvom novčiću palo pismo, a na drugom glava je jednaka 0 (pre dodatne informacije ta verovatnoća je bila 1/4). □

Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$, tada **uslovnu verovatnoću** $P(A|B)$ definišemo sa

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Izraz $P(A|B)$ čitamo na sledeći način: verovatnoća da će se A realizovati ako znamo da se B realizovao, ili kraće „verovatnoća od A ako je B".

Teorema 1.4.a. *Ako je $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$ i ako je $P_1(A) = P(A|B)$ za svako $A \in \mathcal{F}$, tada je $(\Omega, \mathcal{F}, P_1)$ prostor verovatnoća.*

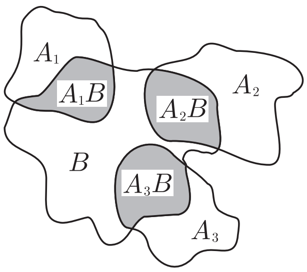
Dokaz: Treba pokazati da $P_1 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zadovoljava uslove Aksioma 2.

(i') $P_1(\Omega) = P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

(ii') Za svako $A \in \mathcal{F}$ je

$$P_1(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0.$$

(iii') Neka je $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ niz međusobno disjunktnih događaja. Tada su događaji $A_1B, A_2B, A_3B, \ldots$ takođe međusobno disjunktni. Konačno imamo



$$P_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)|B\right) = \frac{P\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)B\right)}{P(B)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_iB)}{P(B)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i)$$

što je trebalo dokazati. □

Direktno iz definicije uslovne verovatnoće $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ i $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ dobijamo formulu za nalaženje verovatnoće proizvoda (preseka) pod uslovom da je $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).}$$

Jednostavno, primenom matematičke indukcije, može se uopštiti prethodna formula na

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}).$$

Primer 1.4.b. U kutiji je 12 sijalica od kojih su 4 neispravne. Na slučaj vršimo 3 izvlačenja po jedne sijalice bez vraćanja. Naći verovatnoću da su sve tri izvučene sijalice ispravne.

Rešenje. Neka je A_i, $i = 1, 2, 3$, događaj da je u $i-$tom izvlačenju uzeta ispravna sijalica. Tada se događaj A – sve tri sijalice su ispravne, može predstaviti kao $A = A_1A_2A_3$, te je

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}.$$

□

1.5. Nezavisnost

Događaji A i B su **nezavisni** ako je

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ako je $P(B) > 0$ i ako su A i B nezavisni događaji, onda je $P(A|B) = P(A)$. Poslednja jednakost se slaže sa našom intuitivnom predstavom nezavisnosti: naime, ako su A i B nezavisni, onda informacija o tome da se B realizovao ne utiče na verovatnoću realizacije događaja A.

Neposredno iz definicije nezavisnosti dobijamo sledeće osobine:

(1) Ω i svaki događaj A su nezavisni.

(2) Ako je $P(A) = 0$, onda su A i B nezavisni za svako $B \in \mathcal{F}$.

(3) Ako su A i B nezavisni, onda su nezavisni i sledeći parovi događaja: $\bar{A}$ i B, A i $\bar{B}$, $\bar{A}$ i $\bar{B}$.

(4) Ukoliko su A i B nezavisni, tada je $P(A|B) = P(A)$ i $P(B|A) = P(B)$.

Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ su **totalno nezavisni** ako za svaki konačan niz indeksa $i_1, i_2, \ldots, i_n$ važi

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n}).$$

Nezavisnost u parovima ne implicira totalnu nezavisnost, što ćemo videti iz sledećeg primera.

Primer 1.5.a. Bacaju se dva novčića. Skup svih mogućih ishoda je $\Omega = \{\text{pp, pg, gp, gg}\}$, gde smo sa p označili da je palo pismo, a sa g da je pala glava. Svi ishodi su jednako verovatni. Dalje ćemo izdvojiti događaje

$$\begin{array}{ll} A = \{\text{glava na prvom novčiću}\} = \{\text{gg, gp}\}, & P(A) = \;\; 1/2 \\ B = \{\text{glava na drugom novčiću}\} = \{\text{gg, pg}\}, & P(B) = \;\; 1/2 \\ C = \{\text{glava na tačno jednom novčiću}\} = \{\text{pg, gp}\}, & P(C) = \;\; 1/2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(AB) = P(\{\text{gg}\}) = 1/4 \\ P(A)P(B) = 1/4 \end{array}\right\} A \text{ i } B \text{ su nezavisni}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(BC) = P(\{\text{pg}\}) = 1/4 \\ P(B)P(C) = 1/4 \end{array}\right\} B \text{ i } C \text{ su nezavisni}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(AC) = P(\{\text{gp}\}) = 1/4 \\ P(A)P(C) = 1/4 \end{array}\right\} A \text{ i } C \text{ su nezavisni}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(ABC) = P(\emptyset) = 0 \\ P(A)P(B)P(C) = 1/8 \end{array}\right\} A,\, B,\, C \text{ nisu totalno nezavisni} \;.$$

□

1.6. Formula totalne verovatnoće. Bajesova formula

U ovom odeljku uvešćemo neke važne, jednostavne formule koje u pojedinim slučajevima olakšavaju nalaženje običnih i uslovnih verovatnoća događaja. Za formulaciju sledeće tri teoreme je potrebno definisati pojam potpunog sistema događaja.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka su $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathcal{F}$ događaji koji zadovoljavaju sledeće uslove

1. $P(H_i) > 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset, \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$

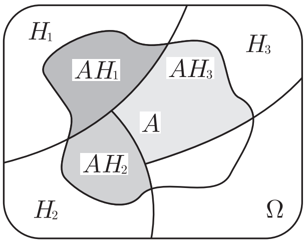
Događaje $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nazivamo **hipotezama**, a skup $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ **potpunim sistemom događaja**.

Sledeća formula daje odgovor na koji način možemo izračunati verovatnoću događaja $A \in \mathcal{F}$, ako su nam poznate uslovne verovatnoće $P(A|H_i)$ i $P(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 1.6.a. **(Formula totalne verovatnoće)** *Ako je* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *potpun sistem događaja, tada sa svako* $A \in \mathcal{F}$ *važi*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Dokaz.



$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

□

Primer 1.6.a. Od dve partije mašinskih proizvoda u prvoj se nalazi 10%, a u drugoj 20% neispravnih. Na slučaj se bira partija i iz nje jedan proizvod. Kolika je verovatnoća da je odabrani proizvod ispravan?

Rešenje.

H_1	–	izabrana je prva partija,	$P(H_1) = 1/2$,
H_2	–	izabrana je druga partija,	$P(H_2) = 1/2$,
A	–	izabran je ispravan proizvod,	$P(A|H_1) = 9/10$,
			$P(A|H_2) = 8/10$,

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{20} = 0.85.$$

□

Posmatraćemo sada sledeći problem: Pretpostavimo da su $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hipoteze koje zadovoljavaju uslove 1, 2, 3 sa početka odeljka i da su nam poznate verovatnoće $P(H_i)$ $i = 1, \ldots, n$. Neka su nam dalje poznate uslovne verovatnoće $P(A|H_i)$, $i = 1, \ldots, n$, gde je A jedan od ishoda posmatranog verovatnosnog eksperimenta. Sledeća teorema (Bajesova formula) odgovara na pitanje na koji način pomoću ovih poznatih podataka možemo izračunati uslovne verovatnoće $P(H_i|A)$, $i = 1, \ldots, n$. Ceo problem možemo interpretirati i na ovaj način: Događaj A se realizuje kao posledica raznih uzroka $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Ako znamo da se A realizovao, kolika je verovatnoća da je ta realizacija prouzrokovana hipotezom H_i, $i = 1, \ldots, n$?

Teorema 1.6.b.(Bajesova formula) *Ako je* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *potpun sistem događaja, tada za svako* $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$ *važi*

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, .$$

Dokaz.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}. \quad \square$$

Primer 1.6.b. Ako u primeru 1.6.a. znamo da je pri jednom slučajnom izvlačenju dobijen ispravan proizvod, kolika je verovatnoća da je izvučen iz prve partije?

Rešenje.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \frac{9}{17} = 0.53.$$

$\square$

Teorema 1.6.c. (Uopštena formula totalne verovatnoće) *Ako je* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *potpun sistem događaja, ako je* $P(A) > 0$ *i* $P(AH_i) > 0$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tada važi*

$$P(B|A) = \sum_{i=1}^{n} P(B|AH_i) \cdot P(H_i|A).$$

Dokaz.

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} BAH_i\right)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \sum_{i=1}^{n} P(BAH_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(BAH_i)}{P(AH_i)} \cdot \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} P(B|AH_i) \cdot P(H_i|A). \quad \square$$

Primer 1.6.c. Vratimo se na primer 1.6.a. Ako je u prvom izvlačenju izvučen ispravan proizvod (i vraćen u istu partiju), naći verovatnoću da će u drugom izvlačenju iz iste partije biti izvučen opet ispravan proizvod.

Rešenje. Neka događaji H_1, H_2, A budu kao u primeru 1.6.a. i neka je B događaj da je u drugom izvlačenju izvučen ispravan proizvod. U primeru 1.6.b. je izračunato $P(H_1|A) = 9/17$. Analogno možemo naći i $P(H_2|A) = 8/17$ (takođe smo $P(H_2|A)$ mogli naći iz uslova $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$, tj. $P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A)$). Primenom uopštene formule totalne verovatnoće dobijamo

$$P(B|A) = P(B|AH_1)P(H_1|A) + P(B|AH_2)P(H_2|A) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{17} + \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{17} = \frac{29}{34} \approx 0.853. \quad \square$$

Glava 2

Slučajne promenljive

Kao što smo videli, materija izložena u prethodnoj glavi vezana je za teoriju skupova. U mnogim primenama, ako svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ dodelimo realan broj $X(\omega)$, rezultate verovatnosnog eksperimenta možemo opisati realnom funkcijom $X(\omega)$. Naravno, funkcija mora zadovoljavati neke uslove koji omogućavaju da ona na realnu pravu preslika ne samo elementarne događaje $\omega \in \Omega$, nego i celu strukturu datog prostora verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ilustrujmo to jednostavnim primerom u kojem je Ω skup ishoda pri bacanju dva pravilna novčića, tj. $\Omega = \{pp, pg, gp, gg\}$. Definišimo preslikavanje koje svakom elementarnom događaju dodeljuje broj koji je jednak broju palih pisama. Recimo, to može da bude interpretirano kao igra u kojoj igrač dobija one novčiće na kojima je palo pismo, te vrednost dodeljena svakom elementarnom događaju iz Ω predstavlja dobitak igrača. Ovo preslikavanje definiše verovatnoću na novom skupu vrednosti $\Omega' = \{0, 1, 2\}$. Tako, vrlo jednostavnim zaključivanjem možemo, recimo, odrediti da je verovatnoća koja odgovara broju 1 jednaka $1/2$ (tj. to je verovatnoća da igrač dobije 1 dinar). Na istom skupu $\Omega = \{pp, pg, gp, gg\}$ mogli smo definisati neku drugu funkciju (igru sa nekim drugim pravilima).

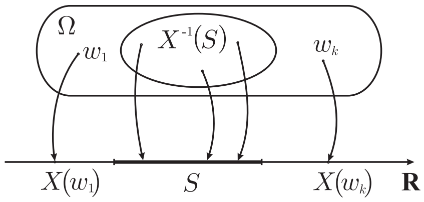
Uvođenje pojma slučajne promenljive (tj. funkcije koja preslikava Ω u $\mathbb{R}$) omogućava „prebacivanje" izučavanja prostora verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na realnu pravu $\mathbb{R}$ koja ima veoma bogatu matematičku strukturu. Upravo aparatura matematičke analize skupa realnih brojeva daje široko polje za definisanje i proučavanje mnogih novih pojmova i odnosa vezanih za izučavanje verovatnosnih pojava.

U ovom poglavlju razmatramo definiciju i osnovne osobine slučajne promenljive.

2.1. Definicija slučajne promenljive

Ako je X funkcija koja preslikava skup Ω u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ i ako je S podskup od $\mathbb{R}$, tada ćemo sa $X^{-1}(S)$ označiti inverznu sliku skupa S definisanu sa

$$X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in S\}.$$



Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, takva da za svako $x \in \mathbb{R}$ skup $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}$ (tj. inverzna slika $X^{-1}(-\infty, x]$ intervala $(-\infty, x]$ pripada σ–polju $\mathcal{F}$, naziva se **slučajnom promenljivom**. Može se pokazati da, ako je X slučajna promenljiva, onda za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (gde je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo polje - primer 1.2.b), $X^{-1}(S)$ takođe pripada $\mathcal{F}$.

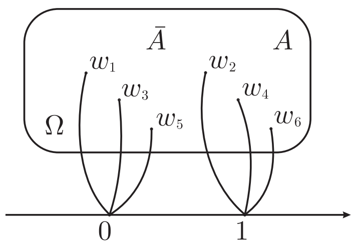
Slučajne promenljive obeležavaćemo velikim slovima sa kraja abecede – $X, Y, Z, W, \ldots$.

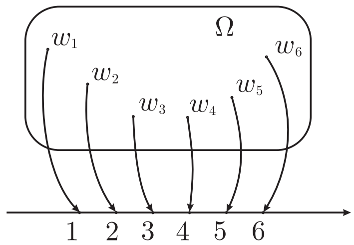
Primer 2.1.a. Neka je $\Omega = \{$⚀,⚁,⚂,⚃,⚄,⚅$\}$ $A = \{$⚁,⚃,⚅$\}$ i $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$.

(i) Neka funkcija X svakom ω_i, $i = 1, \ldots, 6$, dodeli 1 ako je na kockici pao paran broj tačkica, a 0 ako je pao neparan (leva slika).

(ii) Neka funkcija Y svakom ω_i, $i = 1, \ldots, 6$, dodeli broj koliko ima tačkica (desna slika).

Ispitati da li su X i Y slučajne promenljive nad $(\Omega, \mathcal{F})$.





Rešenje.

(i) Ispitaćemo da li za svako $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{F}$. Kako je

$$X^{-1}(-\infty, x] = \begin{cases} \Omega, & 1 \leq x, \\ \bar{A}, & 0 \leq x < 1, \\ \emptyset, & x < 0, \end{cases}$$

očito da X jeste slučajna promenljiva.

(ii) Kako $Y^{-1}(-\infty, x] \notin \mathcal{F}$ za bilo koje $x \in (1, 6]$ (npr. $X^{-1}(-\infty, 1] = \{\boxdot\} \notin \mathcal{F}$), znači da Y nije slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F})$. Može se lako pokazati da funkcija Y jeste slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F}_1,)$, gde je $\mathcal{F}_1$ partitivni skup od Ω. $\square$

2.2. Funkcija raspodele

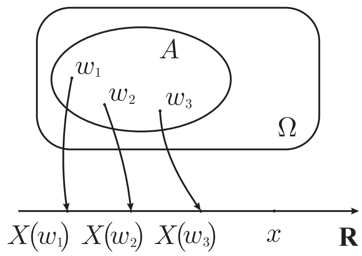
U odeljku 2.1. definisali smo slučajnu promenljivu X kao funkciju koja preslikava Ω u $\mathbb{R}$ pod uslovom da za svako $x \in \mathbb{R}$ skup $X^{-1}(-\infty, x]$ pripada σ–polju $\mathcal{F}$. Može se pokazati da ovaj uslov obezbeđuje da inverzna slika $X^{-1}(S)$ svakog skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ koji pripada Borelovom polju $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (primer 1.2.b) takođe pripada $\mathcal{F}$. Kako je u prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verovatnoća definisana za svaki skup iz $\mathcal{F}$ i kako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, to znači da je za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definisana funkcija

$$\boxed{P_X(S) = P\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in S\}.}$$

Na taj način slučajna promenljiva X na realnu pravu $\mathbb{R}$ „prenosi” ne samo elementarne događaje $\omega \in \Omega$ nego i strukturu prostora verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Naime, svaka slučajna promenljiva definiše nov prostor verovatnoća $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$. Funkcija P_X je definisana na skupu podskupova od $\mathbb{R}$, što predstavlja izvesno ograničenje u primeni mnogih metoda matematičke analize u $\mathbb{R}$. Zbog toga uvodimo jedan novi pojam, funkciju raspodele F_X slučajne promenljive X, koja u sebi sadrži sve potrebne informacije o raspodeli verovatnoća nad $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ali ima pogodniji oblik jer predstavlja realnu funkciju realne promenljive.

Funkcija raspodele $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ slučajne promenljive X definisana je sa

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}.$$

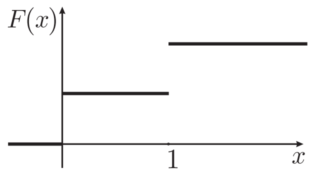


Kako slučajna promenljiva X preslikava skup Ω na realnu pravu $\mathbb{R}$, funkcija raspodele F_X u tački $x \in \mathbb{R}$ predstavlja verovatnoću događaja iz Ω sastavljenog od elementarnih događaja čija je slika manja ili jednaka od broja x.

Skup $\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\}$ obeležavamo kraće sa $(X \leq x)$, tako da pišemo $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Ako se u tekstu ili zadatku spominje samo jedna slučajna promenljiva ili ako navodimo neke opšte osobine funkcije raspodele, tada, umesto oznake za funkciju raspodele $F_X(x)$, koristimo oznaku $F(x)$.

Primer 2.2.a. Funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X iz primera 2.1.a. (i) je



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases} .$$

□

Očito da je funkcija raspodele F_X jedinstvena za svaku slučajnu promenljivu X. Obrnuto ne mora da važi, različite slučajne promenljive mogu imati istu funkciju raspodele. Recimo, ako se dve slučajne promenljive razlikuju nad skupom čija je verovatnoća jednaka 0, tada su njihove funkcije raspodele jednake. Naredni primer ilustruje takav slučaj.

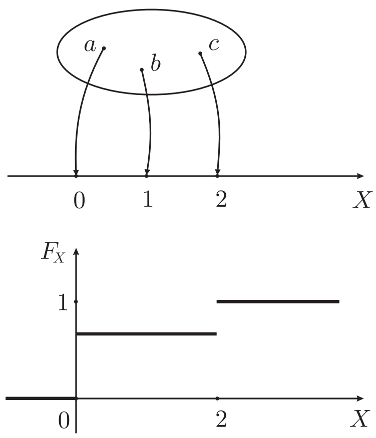
Primer 2.2.b. Neka je $\Omega = \{a, b, c\}$, i neka je $P(\{a\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{b\}) = 0, \;\; P(\{c\}) = \frac{1}{3}$ i neka je

1. $X(a) = 0, \; X(b) = 1, \; X(c) = 2,$
2. $Y(a) = Y(b) = 0, \; Y(c) = 2.$

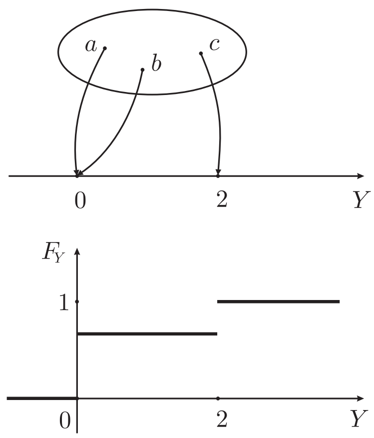
Naći $F_X(x)$ i $F_Y(y)$.

Rešenje.

1.



2.



Očigledno je $F_X(x) = F_Y(x)$, bez obzira što su X i Y različite slučajne promenljive. □

Osobine funkcije raspodele:

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0.}$

2. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = 1.}$

3. Funkcija raspodele je neopadajuća funkcija tj.

$$\boxed{\text{ako } \ x_1 < x_2, \quad \text{onda } \ F(x_1) \leq F(x_2).}$$

4. Funkcija raspodele je neprekidna sdesna tj.

$$\boxed{\lim_{x\to a+0} F(x) = F(a).}$$

5. $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \text{ za sve } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.}$

6. Može se pokazati da

> funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija raspodele neke slučajne promenljive X ako i samo ako je neopadajuća, neprekidna sdesna i $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$.

Dokaz.

1. $F(-\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} F(-n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X \leq -n) = P \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq -n) =$
   $= P(\emptyset) = 0.$

2. $F(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} F(n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X \leq n) = P \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq n) = P(\Omega) = 1.$

3. Ako je $x_1 < x_2$ i ako je $A = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x_1\}$,
   $B = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x_2\}$, očito da je $A \subseteq B$, te je
   $F(x_1) = P(A) \leq P(B) = F(x_2)$.

4. $\lim\limits_{x\to a+0} F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F(a + 1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X < a + 1/n) =$
   $= P \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X < a + 1/n) = P(X \leq a) = F(a).$

5. $F(b) = P\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq b\} =$
   $= P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq a\} + \{\omega \in \Omega : \ a < X(\omega) \leq b\}) =$
   $= F(a) + P(a < X \leq b).$ □

Funkcija raspodele sadrži sve informacije bitne za slučajnu promenljivu, tako da u daljem radu umesto opisa slučajne promenljive kao preslikavanja iz Ω u $\mathbb{R}$ navodimo samo odgovarajuću funkciju raspodele.

Sledeći primer je jednostavna ilustracija povezanosti slučajne promenljive i odgovarajuće funkcije raspodele.

Primer 2.2.c. Neka je $\Omega = \{a, b, c\}$, gde svaki od elementarnih događaja ima istu verovatnoću $(\frac{1}{3})$ i neka je

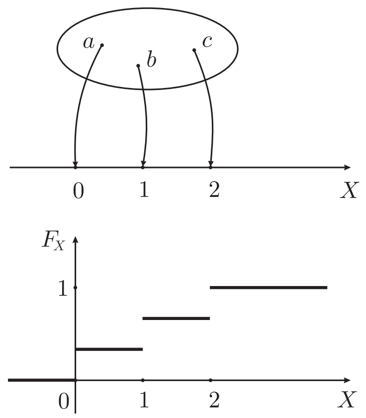
1. $X(a) = 0, \ \ X(b) = 1, \ \ X(c) = 2,$

2. $Y(a) = Y(b) = 0, \ \ \ Y(c) = 2.$

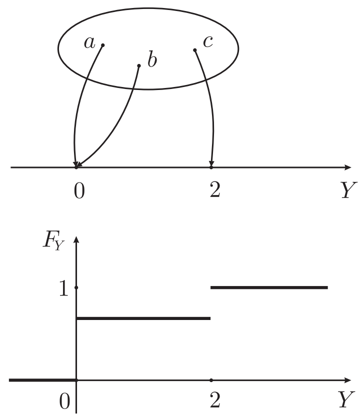
Naći $F_X(x)$ i $F_Y(y)$.

Rešenje.

1.



2.



U navedenim primerima funkcija raspodele F ima skok u onim tačkama koje su slika nekog događaja čija je verovatnoća različita od 0. Veličina skoka je jednaka verovatnoći događaja koji se preslikava u tačku skoka. □

Vrste slučajnih promenljivih

U sledeća dva poglavlja definisaćemo, ispitati osobine i dati neke primere dve specijalne vrste slučajnih promenljivih:

- diskretnog tipa i
- neprekidnog tipa.

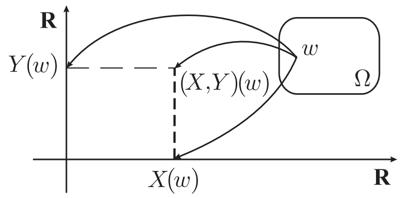
Postoje slučajne promenljive koje ne odgovaraju ni jednom od ova dva tipa (u literaturi ih ponekad nazivaju slučajnim promenljivim mešovitog tipa).

2.3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva

U mnogim slučajevima prilikom posmatranja verovatnosnog eksperimenta interesantno je pratiti dve (ili više) brojne karakteristike, tj. dve slučajne promenljive definisane na istom prostoru verovatnoća. Tada govorimo o dvodimenzionalnoj slučajnoj promenljivoj.

Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i ako su $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, slučajne promenljive, tada uređen par (X, Y) nazivamo **dvodimenzionalnom slučajnom promenljivom**. U literaturi se često koristi i naziv verovatnosni vektor. Uređen par (X, Y) svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ dodeljuje element iz $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ tj.

$$(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) = (x,y).$$



Funkcija raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) $F_{XY} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ je definisana sa

$$F_{XY}(x,y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x \wedge Y(\omega) \le y\} =$$
$$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le y\}) = P(X \le x, Y \le y), \quad \text{tj.}$$
$$\boxed{F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y).}$$

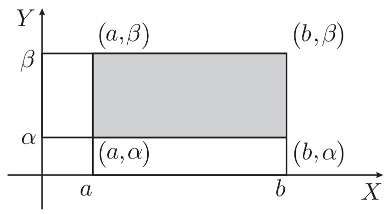
Funkciju F_{XY} nazivamo **zajedničkom funkcijom raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive** (X,Y).

Osobine funkcije raspodele

1. $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0.$
2. $F_{XY}(\infty, \infty) = 1.$
3. $F_{XY}(x,y)$ je neprekidna sdesna po obe promenljive.
4. $F_{XY}(x,y)$ je neopadajuća funkcija po obe promenljive.
5. $P(a < X \le b, \alpha < Y \le \beta) =$

   $= F_{XY}(b,\beta) - F_{XY}(b,\alpha) -$

   $F_{XY}(a,\beta) + F_{XY}(a,\alpha).$



Ako je poznata zajednička funkcija raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y), pomoću nje se mogu naći posebne funkcije raspodele za X i Y. Nazivamo ih **marginalnim funkcijama raspodele** . Računaju se na sledeći način:

$$\boxed{F_X(x) = F_{XY}(x,\infty),} \quad \boxed{F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y).}$$

Zaista,

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y \in \mathbb{R}) = P(X \le x, Y \le \infty) = F_{XY}(x,\infty),$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in \mathbb{R}, Y \leq y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = F_{XY}(\infty, y).$$

Izdvajamo dva oblika dvodimenzionalne slučajne promenljive – diskretnog i neprekidnog tipa. Naravno, postoje one koje nisu ni diskretnog ni neprekidnog tipa.

Glava 3

Slučajne promenljive diskretnog tipa

Ukoliko je skup vrednosti slučajne promenljive - bilo jedne ili više njih - diskretan skup, tada govorimo o slučajnoj promenljivoj diskretnog tipa. U ovoj glavi opisaćemo redom jednodimenzionalnu, zatim dvodimenzionalnu, a na kraju i n-dimenzionalnu slučajnu promenljivu diskretnog tipa.

3.1. Slučajna promenljiva diskretnog tipa

Slučajna promenljiva X preslikava skup Ω u skup realnih brojeva. Skup slika od X označićemo sa $\mathbb{R}_X$.

Slučajna promenljiva X je **diskretnog tipa** (ili kraće: **diskretna slučajna promenljiva**) ako je $\mathbb{R}_X$ konačan ili prebrojiv skup. Funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X diskretnog tipa je najčešće stepenastog oblika (kao u primeru 2.2.a). Kako je $\mathbb{R}_X$ prebrojiv ili konačan skup, možemo ga predstaviti u obliku

$\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ - ako je $\mathbb{R}_X$ prebrojiv skup

ili

$\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - ako je $\mathbb{R}_X$ konačan skup.

Ako nije bitno da li skup slika sadrži prebrojivo ili konačno mnogo elemenata, pisaćemo jednostavno $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Skup $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x_n\}$ označavamo kraće sa $(X = x_n)$. Očito da važi

$$\Omega = \bigcup_i \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\} = \bigcup_i (X = x_i)$$

gde i prolazi skupom $\{1, 2, \cdots\}$. Takođe važi

$$(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset \quad \text{za sve} \;\; i \neq j,$$

što znači da je

$$\sum_i P(X = x_i) = P(\Omega) = 1.$$

Često je u radu sa slučajnom promenljivom diskretnog tipa X umesto funkcije raspodele F_X jednostavnije koristiti zakon raspodele, koji ćemo definisati u sledećem pasusu.

Ako je $\{x_1, x_2, \ldots\}$ skup različitih vrednosti diskretne slučajne promenljive X, tada ćemo sa $p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, obeležiti verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u x_i, tj.

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) = x_i\} = P(X = x_i).$$

Kao što smo već primetili, $\sum\limits_i p(x_i) = 1$. Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, \ldots\}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, predstavlja **zakon raspodele** od X. Zakon raspodele možemo zapisati na razne načine. Najčešće koristimo

- šematski $\quad X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots \end{pmatrix}$ i

- analitički $\quad p(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots$

način zapisivanja. Ako je moguće, vrednosti $x_1, x_2, \ldots$ su navedene tako da je $x_i < x_j$ za $i < j$, $\;i, j = 1, 2, \ldots$.

Veza između zakona raspodele i funkcije raspodele F_X je sledeća

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p(x_i).$$

3.1.1 Neki primeri slučajne promenljive diskretnog tipa

Bernulijeva raspodela ili zakon „0-1".

Kažemo da slučajna promenljiva ima Bernulijevu raspodelu sa parametrom p, $0 < p < 1$, ako je

$$\boxed{X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},}$$

tj. ako je $P(X = 0) = 1 - p$ i $P(X = 1) = p$. Model slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom imamo pri izvođenju jednog verovatnosnog opita gde je mogućnost ishoda ili pozitivna (sa verovatnoćom p, $0 < p < 1$) ili negativna (sa verovatnoćom $1-p$). Slučajna promenljiva X dobija vrednost 1 pri pozitivnoj realizaciji opita, a 0 pri negativnoj realizaciji. Obično se verovatnoća $1-p$ obeležava sa q.

Binomna raspodela $\mathcal{B}(n, p)$

Slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n,p)$ sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\{0, 1, \dots, n\}$ (tj. $x_k = k$, $k = 0, 1, \dots, n$), a odgovarajuće verovatnoće su

$$\boxed{p(x_k) = p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},}$$

$k = 0, 1, \dots, n$, gde je $q = 1 - p$. Najčešći model binomne raspodele je pri izvođenju n istovetnih opita takvih da se svaki od njih, nezavisno od ishoda ostalih, može realizovati pozitivno (sa verovatnoćom p) i negativno (sa verovatnoćom $q = 1 - p$). U tom slučaju skup Ω sačinjavaju sve moguće kombinacije ishoda n opita. Kako su opiti nezavisni, verovatnoća dodeljena svakom od njih je jednaka $p^k q^{n-k}$, gde je k broj pozitivnih realizacija. Skup Ω sadrži $\binom{n}{k}$ elementarnih događaja u kojima ima k pozitivnih realizacija ($\binom{n}{k}$ je broj na koliko načina od n opita možemo izabrati k opita sa pozitivnom realizacijom). Slučajna promenljiva X je broj pozitivnih realizacija u n ponovljenih nezavisnih opita. Skup vrednosti za X je $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ i

$$p(x_k) = p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\ , \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Binomna raspodela je matematički model koji opisuje tzv. "izbor sa vraćanjem". Naime, ako imamo $A+B$ elemenata i to A komada prve vrste i B komada druge vrste, pri slučajnom izboru jednog elementa verovatnoća da je izvučen element prve vrste je $p = \frac{A}{A+B}$, a verovatnoća da je izvučen element druge vrste je $q = \frac{B}{A+B}$. Izvučeni element vraćamo, pa na isti način ponovimo izvlačenje n puta. Slučajna promenljiva X, koja je jednaka broju elemenata prve vrste među izvučenih n elemenata, očigledno, predstavlja binomnu slučajnu promenljivu.

Hipergeometrijska raspodela

Neka su A, B, i n fiksirani brojevi, $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \le A$, $n \le B$ i neka je zakon raspodele slučajne promenljive X definisan sa

$$\boxed{p(x_k) = p(k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \cdots, n\}.}$$

Tada kažemo da X ima hipergeometrijsku raspodelu.

Model hipergeometrijske raspodele je tzv. "izbor bez vraćanja". Pretpostavimo da iz populacije koja ima $A+B$ elemenata, od kojih su A elemenata prve vrste, a B su druge vrste (recimo, od $A+B$ proizvoda, A je ispravno a B nije) biramo bez vraćanja n elemenata. Slučajna promenljiva X predstavlja broj elemenata prve vrste među n izabranih elemenata.

Poasonova raspodela $\mathcal{P}(\lambda)$

Slučajna promenljiva X ima Poasonovu raspodelu ako je skup vrednosti $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ i

$$\boxed{p(x_k) = p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,}$$

gde je λ parametar i zadovoljava uslov $\lambda > 0$.

Poasonova raspodela predstavlja realni model za mnoge slučajne fenomene kao što su broj saobraćajnih nesreća u nekom periodu, broj telefonskih poziva u jedinici vremena i sl.

Sledeća teorema daje vezu između binomne i Poasonove raspodele.

Teorema 3.1.a. *Ako u binomnoj raspodeli* $\mathcal{B}(n,p)$, $n \to \infty$, *a* $p \to 0$, *ali tako da* $np \to \lambda = const$, *tada*

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Dokaz. U binomnoj raspodeli je

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \ \frac{n^k}{n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} (np)^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (np)^k (1-p)^{n-k}.$$

Kako je

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = 1 \quad \text{za sve } i = 1, \ldots, k-1,$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to o \\ np \to \lambda}} (1-p)^{n-k} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to o \\ np \to \lambda}} (1-p)^{-k} \left((1-p)^{-\frac{1}{p}}\right)^{-np} = 1 \cdot e^{-\lambda},$$

sledi da je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to o \\ np\to\lambda}} p(k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

što je trebalo dokazati. $\square$

Geometrijska raspodela $\mathcal{G}(p)$

Slučajna promenljiva X ima geometrijsku raspodelu, ako je skup vrednosti $\mathbb{R}_X = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, a odgovarajuće verovatnoće su date sa

$$\boxed{p(x_k) = p(k) = pq^{k-1}, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots,}$$

gde je p parametar raspodele, $0 < p < 1$ i $q = 1 - p$.

Model verovatnosnog opita koji odgovara ovoj raspodeli je pri izvođenju nezavisnih istovetnih opita, takvih da je pri svakom od njih verovatnoća pozitivne realizacije p, $0 < p < 1$, a negativne $q = 1 - p$. Opiti se izvode do prve pozitivne realizacije. Slučajna promenljiva X predstavlja broj opita do prve pozitivne realizacije.

Negativna binomna (Paskalova) raspodela

Negativna binomna raspodela zavisi od dva parametra: $p \in (0, 1)$ i $r \in \mathbb{N}$. Skup vrednosti slučajne promenljive X je skup $\{r, r+1, r+2, \cdots\}$. Odgovarajuće verovatnoće su zadate sa

$$\boxed{p(x_k) = p(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k \in \{r, r+1, \cdots\}.}$$

Model negativne binomne raspodele imamo ako broj nezavisnih istovetnih opita nije fiksiran, a opiti se ponavljaju sve dok ne bude r pozitivnih realizacija, gde je r fiksiran, unapred zadat broj. Slučajna promenljiva X predstavlja broj nezavisnih istovetnih opita do r-te pozitivne realizacije. Ako se pri tome svaki od opita pozitivno realizuje sa verovatnoćom p, $\;0 < p < 1$, a negativno sa verovatnoćom $q = 1 - p$, tada traženu verovatnoću $P(X = k)$ nalazimo kao proizvod verovatnoća dva nezavisna događaja:

- da je u $k - 1$ opita bilo $r - 1$ pozitivnih realizacija, što je jednako

$$\binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r},$$

- da je realizacija k-tog opita bila pozitivna , što je jednako p, što daje vrednosti odgovarajućih verovatnoća negativne binomne raspodele.

Negativna binomna raspodela često opisuje sledeći model: Nezavisni opiti izvode se sve dok se ne dogodi r pozitivnih realizacija opita. Slučajna promenljiva Y je broj negativnih realizacija dok se izvođenje opita ne obustavi. Tada je

$$P(Y=n)=\binom{r+n-1}{n}p^r q^n=\binom{-r}{n}p^r(-q)^n,$$

gde je $n \in \{0,1,2,\cdots\}$, $n=k-r$. Očigledno se radi o istoj raspodeli samo je interpretacija drugačija.

Specijalan slučaj negativne binomne raspodele, za $r=1$, je geometrijska raspodela.

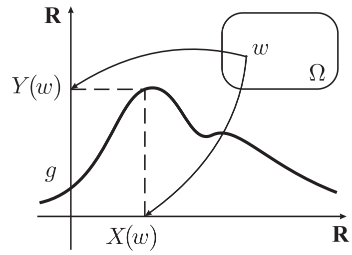
3.1.2. Transformacija slučajne promenljive diskretnog tipa

Označimo sa g funkciju koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Dalje, neka X bude slučajna promenljiva koja prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ preslikava u $\mathbb{R}$. Kompozicija preslikavanja g i X će biti nova slučajna promenljiva nad istim prostorom verovatnoća, s tim što preslikavanje g mora zadovoljavati uslov da je $g^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gde je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo polje (primer 1.2.b). Lako se proverava da, recimo, neprekidno preslikavanje zadovoljava ovaj uslov.

Naime, svakom elementarnom događaju ω slučajna promenljiva X dodeljuje broj $X(\omega)$, a $X(\omega)$ se funkcijom g preslikava u $g(X(\omega))$. To novo preslikavanje

$$(X \circ g)(\omega)=g(X(\omega)),\ \ \omega\in\Omega,$$

označavamo sa Y i često kraće zapisujemo sa $Y=g(X)$.



Ako je poznata raspodela slučajne promenljive X i funkcija g, može se naći raspodela slučajne promenljive $Y=g(X)$. Videćemo kako se ovaj problem može jednostavno rešiti u nekim specijalnim slučajevima.

Ako je X diskretnog tipa sa zakonom raspodele

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) & \cdots \end{pmatrix},$$

tada će $Y=g(X)$ biti takođe diskretnog tipa. Neka je $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ skup slika, tj. $g:\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}\to\{y_1,y_2,\ldots,y_k,\ldots\}$. Sa $p(y_i)$ označićemo zbir svih verovatnoća $p(x_m)$ takvih da je $y_i=g(x_m)$, naime

$$p(y_i)=\sum_{\substack{m\\ y_i=g(x_m)}} p(x_m).$$

Tada slučajna promenljiva $Y = g(X)$ ima zakon raspodele

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots \\ p(y_1) & p(y_2) & p(y_3) & \cdots \end{pmatrix}.$$

Primer 3.1.a. Neka slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

i neka je $g(x) = x^2$. Tada slučajna promenljiva $Y = g(X) = X^2$ ima zakon raspodele

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.2. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva. Kažemo da je ona **diskretnog tipa** (diskretna dvodimenzionalna slučajna promenljiva), ako su X i Y diskretnog tipa. Ako je $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ skup vrednosti slučajne promenljive X, a $\{y_1, y_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, onda je

$$\mathbb{R}_{XY} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_2, y_1), \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$$

skup vrednosti diskretne dvodomenzionalne slučajne promenljive (X, Y). Njima odgovaraju verovatnoće

$$\boxed{\begin{aligned} p(x_i, y_j) &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i \wedge Y(\omega) = y_j\} = \\ &= P(X = x_i, Y = y_j), \end{aligned}}$$

$i = 1, 2, \ldots,\ \ j = 1, 2, \ldots$. Skup kroz koji prolaze indeks i (i indeks j) može da bude konačan ili prebrojiv, naime

$$i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{ili} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

U opštem slučaju, tj. kad ne spominjemo neku konkretnu slučajnu promenljivu, pisaćemo $i, j \in \{1, 2, \ldots\}$ ili $i, j = 1, 2, \ldots$.

Skup vrednosti $\mathbb{R}_{XY}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i, y_j)$ predstavlja **zakon raspodele** diskretne dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y). On se obično zapisuje ili analitički ili u obliku tablice

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
Y \diagdown X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots & \\
\hline
y_1 & p(x_1,y_1) & p(x_2,y_1) & \cdots & p(x_n,y_1) & \cdots & p(y_1) \\
y_2 & p(x_1,y_2) & p(x_2,y_2) & \cdots & p(x_n,y_2) & \cdots & p(y_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_k & p(x_1,y_k) & p(x_2,y_k) & \cdots & p(x_n,y_k) & \cdots & p(y_k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
 & p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) & \cdots &
\end{array}$$

Kako je

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i \wedge Y(\omega) \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \sum_j P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i \wedge Y(\omega) = y_j\} = \sum_j p(x_i, y_j)$$

i analogno

$$p(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j),$$

to **marginalne zakone raspodele** za X i Y dobijamo sa

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) & \cdots \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots \\ p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_k) & \cdots \end{pmatrix}$$

gde je

$$\boxed{p(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j),} \quad \boxed{p(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j).}$$

Verovatnoće $p(x_i)$ i $p(y_j)$ nazivamo **marginalnim verovatnoćama**.

Funkcija raspodele diskretne dvodimenzionalne slučajne promenljive se dobija iz zakona raspodele na sledeći način

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{i:x_i \leq x} \sum_{j:y_j \leq y} p(x_i, y_j).$$

Primer 3.2.a. Tri puta bacamo novčić. Neka je X slučajna promenljiva čija je vrednost jednaka broju palih pisama, a Y je slučajna promenljiva koja je jednaka broju promena (pismo je palo iza glave ili obrnuto). Naći zajednički zakon raspodele i marginalne zakone raspodele.

Rešenje. Ispod svakog elementarnog događaja skupa Ω je upisana njegova slika,

$$\begin{array}{cccccccccc}
\{ & \text{ppp}, & \text{ppg}, & \text{pgp}, & \text{gpp}, & \text{pgg}, & \text{gpg}, & \text{ggp}, & \text{ggg} & \} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & (3,0) & (2,1) & (2,2) & (2,1) & (1,1) & (1,2) & (1,1) & (0,0) &
\end{array}$$

$Y \diagdown X$	0	1	2	3	
0	1/8	0	0	1/8	2/8
1	0	2/8	2/8	0	4/8
2	0	1/8	1/8	0	2/8
	1/8	3/8	3/8	1/8	

□

3.2.1 Uslovne raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva i neka je poznata njena zajednička raspodela. Pretpostavimo da je poznata neka informacija o ponašanju jedne od slučajnih promenljivih (X ili Y). Postavlja se pitanje da li i na koji način ta informacija utiče na raspodelu druge slučajne promenljive.

Primer 3.2.b. Pretpostavimo da su X i Y zadate kao u primeru 3.2.a. i da imamo informaciju da je sva tri puta pao isti znak (tj. da je X ili 3 ili 0). Ako posle te informacije treba izračunati $P(Y = 1)$ (da je bila jedna promena), očito da će verovatnoća biti 0. □

Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ i neka je

$$P\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in S\} \neq 0.$$

Tada

$$\begin{aligned} F_{Y|X \in S}(y) &= P\{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) < y | X(\omega) \in S\} = \\ &= P(Y \leq y | X \in S) \end{aligned}$$

nazivamo **uslovnom funkcijom raspodele** za Y ako je $X \in S$. Verovatnoću $P(Y < y | X \in S)$ nalazimo primenom pravila za izračunavanje uslovne verovatnoće (odeljak 1.4)

$$\boxed{F_{Y|X \in S}(y) = \frac{P(Y \leq y, X \in S)}{P(X \in S)}, \quad P(X \in S) \neq 0.}$$

Neka je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) diskretnog tipa i neka je poznat njen zakon raspodele $p(x_i, y_j), \ i, j = 1, 2, \ldots$. **Uslovni zakon raspodele** slučajne promenljive X ako je $Y = y_j$ određen je **uslovnim verovatnoćama**

$$p(x_i | y_j) = P\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x_i | Y(\omega) = y_j\} =$$

$$= P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}.$$

Za svako fiksirano y_j dobijamo novi uslovni zakon raspodele

$$X|Y = y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1|y_j) & p(x_2|y_j) & \cdots \end{pmatrix}$$

i analogno za svako fiksirano x_i imamo novi uslovni zakon raspodele

$$Y|X = x_i : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ p(y_1|x_i) & p(y_2|x_i) & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa, videli smo iz dosadašnjeg izlaganja, da postoji tri vrste zakona raspodele vezane za ovaj tip promenljive

- zajednički zakon raspodele – verovatnoće $p(x_i, y_j)$
- marginalni zakoni raspodele – verovatnoće $p(x_i),\ p(y_j)$
- uslovni zakoni raspodele – verovatnoće $p(x_i|y_j),\ p(y_j|x_i)$.

Veza između ovih verovatnća je data jednakostima

$$\boxed{p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \quad , \quad p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}\ .}$$

Videli smo (odeljak 3.2) da marginalne zakone raspodele možemo direktno izračunati iz zajedničkog zakona ali obrnuto ne važi. Naime, ako su poznati marginalni, moramo poznavati i uslovne zakone raspodele da bismo mogli naći zajednički zakon raspodele, tj.

$$\boxed{p(x_i, y_j) = p(x_i|y_j)p(y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i).}$$

Primer 3.2.c. Vratimo se na primer 3.2.a. Naći uslovne zakone raspodele za X ako znamo da je slučajna promenljiva Y

1. jednaka 0 (sva tri puta je pao isti znak - bilo je 0 promena),
2. jednaka 0 ili 1 (bilo je 0 ili 1 promena).

Rešenje.

1. $p(x_0|y_0) = (1/8)/(2/8) = 1/2$,
   $p(x_1|y_0) = p(x_2|y_0) = 0$,
   $p(x_3|y_0) = 1/2$,
   te je zakon raspodele za X ako je $Y = 0$

$$X|Y = 0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. $P(Y = 0 \text{ ili } Y = 1) = P(Y \in \{0,1\}) = \dfrac{2}{8} + \dfrac{4}{8} = \dfrac{6}{8}$,

$$P(X = 0|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 0, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} =$$

$$= \frac{p(x_0, y_0) + p(x_0, y_1)}{p(Y \in \{0,1\})} = \frac{\frac{1}{8} + 0}{\frac{6}{8}} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 1|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 1, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{2}{6},$$

$$P(X = 2|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 2, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{2}{6},$$

$$P(X = 3|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 3, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{1}{6}.$$

Zakon raspodele za X ako je $Y \in \{0,1\}$ ima oblik

$$X|Y \in \{0,1\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

□

3.2.2. Nezavisnost slučajnih promenljivih diskret nog tipa

U odeljku 1.6. uveli smo pojam nezavisnih događaja. Nezavisnost o kojoj govorimo u ovom odeljku predstavlja prirodno proširenje ovog pojma na slučajne promenljive.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva i neka su F_{XY}, F_X, F_Y redom zajednička i marginalne funkcije raspodele. Kažemo da su X i Y **nezavisne slučajne promenljive** ako za svako $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).}$$

Teorema 3.2.a. *Neka su X i Y slučajne promenljive diskretnog tipa. One su nezavisne ako i samo ako je*

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j) \quad \text{za sve } i, j = 1, 2, \ldots\ .$$

Dokaz. Ako su X i Y nezavisne, onda je $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, odakle dobijamo

$$\begin{aligned}
p(x_i, y_j) &= P(X = x_i, Y = y_j) = P(x_{i-1} < X \le x_i,\ y_{j-1} < Y \le y_j) = \\
&= F_{XY}(x_i, y_j) - F_{XY}(x_i, y_{j-1}) - \\
&- F_{XY}(x_{i-1}, y_j) + F_{XY}(x_{i-1}, y_{j-1}) = \\
&= F_X(x_i)F_Y(y_j) - F_X(x_i)F_Y(y_{j-1}) - \\
&- F_X(x_{i-1})F_Y(y_j) + F_X(x_{i-1})F_Y(y_{j-1}) = \\
&= (F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}))(F_Y(y_j) - F_Y(y_{j-1})) = \\
&= P(x_{i-1} < X \le x_i)\ P(y_{j-1} < Y \le y_j) = \\
&= P(X = x_i)\ P(Y = y_j) = p(x_i)\, p(y_j).
\end{aligned}$$

Obrnuto, ako pretpostavimo da je $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$, tada

$$\begin{aligned}
F_{XY}(x, y) &= \sum_{i: x_i \le x} \sum_{j: y_j \le y} p(x_i, y_j) = \sum_{i: x_i \le x} p(x_i) \sum_{j: y_j \le y} p(y_j) = \\
&= F_X(x)F_Y(y),
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Kao poslednje u ovom odeljku razmotrićemo kako se nezavisnost slučajnih promenljivih odražava na uslovne raspodele.

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa takva da su X i Y nezavisne, tada su uslovne raspodele jednake marginalnim, tj.

$$\boxed{p(x_i|y_j) = p(x_i) \quad \text{i} \quad p(y_j|x_i) = p(y_j).}$$

3.2.3. Transformacija dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog tipa

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa, razmotrićemo najjednostavniji slučaj kada uređeni par (X, Y) transformišemo u jednu slučajnu promenljivu. U tom slučaju funkcija g preslikava $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, tj. $g(x, y) = z$ ili $g(X, Y) = Z$.

Neka je skup vrednosti $\mathbb{R}_{XY} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots\}$ sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Ako primenimo transformaciju g :

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dobićemo novu slučajnu promenljivu Z diskretnog tipa. Sa $\mathbb{R}_Z$ označavamo skup vrednosti $\{z_1, z_2, \ldots\}$ slučajne promenljive Z, a odgovarajuće verovatnoće $p(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ dobijamo kao zbir verovatnoća $p(x_k, y_m)$, gde su (x_k, y_m) oni parovi koji se funkcijom g preslikavaju u z_i, tj.

$$p(z_i) = \sum_{\substack{k,m \\ g(x_k,y_m)=z_i}} p(x_k, y_m)$$

Primer 3.2.d. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive i neka obe imaju Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

Rešenje. Kako je skup vrednosti $\mathbb{R}_{XY} = \{(n, k) : n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, očito da je $\mathbb{R}_Z = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Dalje imamo

$$p(x_i, y_j) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}e^{-2\lambda}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$p(z_k) = P(Z = k) = P(X + Y = k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p(x_i, y_{k-i}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^{i+k-i}}{i!(k-i)!}e^{-2\lambda}\frac{k!}{k!} = \frac{\lambda^k e^{-2\lambda}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}1^i 1^{k-i} = \frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda},$$

što znači da Z ima $\mathcal{P}(2\lambda)$ raspodelu. □

3.3. n-dimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne promenljive definisane na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada uređenu n-torku $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nazivamo **n-dimenzionalnom slučajnom promenljivom**. Njoj odgovara funkcija raspodele $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definisana sa

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1 \ \wedge \ X_2(\omega) \leq x_2 \ \wedge \ldots \wedge \ X_n(\omega) \leq x_n\} =$$

$$= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n).$$

Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako je

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n).$$

Za matematičku statistiku je posebno interesantan problem transformacije n-dimenzionalne slučajne promenljive. U narednom primeru pokazaćemo kako se može naći raspodela slučajne promenljive $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, gde funkcija g preslikava $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su nezavisne slučajne promenljive.

Primer 3.3.a. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom sa parametrom p, $0 < p < 1$ (odeljak 2.4). Pokazati da slučajna promenljiva $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n, p)$.

Rešenje. Zakon raspodele za X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ima oblik

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p.$$

Slučajna promenljiva $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, može dobiti vrednost $0, 1, 2, \ldots,$ n. Kako je $Y = k$ uvek kad u zbiru od n sabiraka ima k jedinica i $n - k$ nula, a k jedinica mogu biti raspoređene na n mesta na $\binom{n}{k}$ različitih načina, verovatnoća $P(Y = k)$ je jednaka $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, tj.

$$p(k) = P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

3.4. Brojne karakteristike slučajne promenljive diskretnog tipa

Sve informacije o slučajnoj promenljivoj X su sadržane u njenoj funkciji raspodele F_X, međutim često nisu potrebni svi podaci koje poseduje F_X, nego samo neke karakteristike vezane za slučajnu promenljivu. U ovom poglavlju se bavimo brojnim karakteristikama, tj. brojnim vrednostima koje reprezentuju neke osobine slučajne promenljive.

Što se tiče jedne slučajne promenljive, najčešće koristimo dve grupe brojnih karakteristika

- one koje karakterišu centar grupisanja vrednosti slučajne promenljive i
- one koje karakterišu stepen rasturanja slučajne promenljive u odnosu na njen centar.

U prvu grupu spadaju matematičko očekivanje, medijana, modus, momenti reda k, a u drugu grupu spadaju disperzija (varijansa), standardna devijacija, centralni momenti reda k.

Za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu najvažnija je ona grupa brojnih karakteristika koje pružaju informacije o njihovoj međusobnoj zavisnosti. Tu spada kovarijansa, koeficijent korelacije, mešoviti momenti.

Najinteresantnija tema u ovom poglavlju je teorija uslovnog matematičkog očekivanja. Da bi se ona matematički korektno predstavila, potrebna je vrlo suptilna aparatura funkcionalne analize i teorije mere, što izlazi iz okvira ovoga kursa. Zbog značaja koji u teoriji verovatnoće ima uslovno matematičko očekivanje, u poslednjem odeljku ovog poglavlja biće navedene osnovne definicije i najvažnije osobine bez insistiranja na matematičkoj striktnosti.

3.4.1. Matematičko očekivanje, medijana, modus slučajne promenljive diskretnog tipa

U ovom odeljku pozabavićemo se brojnim karakteristikama vezanim za centar raspodele.

Neka je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots \end{pmatrix}$ zakonom raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa. **Matematičko očekivanje** $E(X)$ slučajne promenljive diskretnog tipa X je broj definisan na sledeći način :

$$\boxed{E(X) = \sum_i x_i p(x_i),}$$

pod uslovom da odgovarajući red apsolutno konvergira. Umesto naziva matematičko očekivanje često ćemo koristiti skraćeni naziv očekivanje ili očekivana vrednost.

Osobine matematičkog očekivanja

1. Ako je $X = c$, gde je c konstanta, tada je $\boxed{E(c) = c.}$

2. Ako je slučajna promenljiva Y dobijena transformacijom $g(X)$ slučajne promenljive X, tada je
$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_i g(x_i)p(x_i),$$

3. Ako je slučajna promenljiva Z dobijena transformacijom $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ slučajnih promenljivih X i Y, tj. $Z = g(X,Y)$, tada
$$E(Z) = E(g(X,Y)) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p(x_i, y_j),$$

4. $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$ za sve slučajne promenljive X i Y.

5. $\boxed{\text{Ako su } X \text{ i } Y \text{ nezavisne tada je } E(XY) = E(X)E(Y).}$

   Ukoliko je $E(XY) = E(X)E(Y)$, kažemo da su slučajne promenljive X i Y **nekorelirane**.

6. $\boxed{E(cX) = cE(X),}$ gde je c konstanta.
7. $E(X - E(X)) = 0$.
8. Ako je $a \leq X \leq b$, tada je $a \leq E(X) \leq b$.
9. Ako je $X > 0$, tada je $E(X) > 0$.

Navodimo dokaze nekih od osobina.

1. Ako je $X = c$, to znači da je $P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = c\} = 1$ te je $E(X) = cP(X = c) = c \cdot 1 = c$.

4. Iz 3. sledi da je

$$E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i+y_j)p(x_i, y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(x_i, y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(x_i, y_j) =$$

$$\sum_i x_i p(x_i) + \sum_j y_j p(y_j) = E(X) + E(Y).$$

6.
$$E(cX) = \sum_i cx_i p(x_i) = c \sum_i x_i p(x_i) = cE(X).$$

$\square$

Matematičko očekivanje je najznačajnija brojna karakteristika vezana za centar raspodele slučajne promenljive. Postoje i druge brojne karakteristike koje opisuju centar raspodele a najčešće je u upotrebi

- **medijana**: medijana slučajne promenljive X je broj m_c takav da je

$$P(X \leq m_c) = P(X \geq m_c).$$

- **modus**: ako je X diskretnog tipa, modus m_σ je ona vrednost za koju je verovatnoća najveća, tj. $p(m_\sigma) > p(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, x_i \neq m_\sigma$.

3.4.2. Disperzija slučajne promenljive diskretnog tipa

Disperzija je brojna karakteristika vezana za rasturanje ili rasejavanje slučajne promenljive. U literaturi se često koristi naziv varijansa. **Disperzija** $D(X)$ slučajne promenljive X definisana je sa

$$\boxed{D(X) = E\left((X - E(X))^2\right).}$$

Često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - E^2(X),}$$

gde je $E(X^2) = \sum_i x_i^2 p(x_i)$ na osnovu osobine 2. matematičkog očekivanja. Zaista,

$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X^2 - 2E(X)X + E^2(X)\right) =$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Osobine disperzije:

1. $\boxed{D(X) = 0 \text{ ako i samo ako je } X = \text{const.}}$

2. $\boxed{D(X) \geq 0.}$

3. $\boxed{D(cX) = c^2 D(X)}$, $\boxed{D(X + c) = D(X).}$

4. Ako su X i Y nekorelirane, tada je

$$\boxed{D(X + Y) = D(X) + D(Y).}$$

Dokaz.

1. $D(c) = E[(c - E(c))^2] = E(0) = 0$. Ako je $D(X) = 0$, na osnovu osobine 9. za matematičko očekivanje, $(X - E(X)) = 0$, te je $X = E(X) = conct$.

2. Kako je $(X - E(X))^2 \geq 0$ to je, na osnovu osobine 8. matematičkog očekivanja, $D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \geq 0$.

3. $D(cX) = E\left((cX - E(cX))^2\right) = E\left((cX - cE(X)))^2\right) =$
   $= E\left((c(X - E(X))^2\right) = c^2 E\left((X - E(X))^2\right) = c^2 D(X).$

4. Ako su X i Y nekorelirane, onda je $E(XY) = E(X)E(Y)$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= E\left((X + Y - E(X+Y))^2\right) \\ &= E\left(((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2\right) \\ &= D(X) + D(Y) + 2E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= D(X) + D(Y) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= D(X) + D(Y). \end{aligned}$$

□

Koren iz disperzije $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ je **standardna devijacija** ili standardno odstupanje.

Standardizovana (normalizovana) **slučajna promenljiva** X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom

$$\boxed{X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.}$$

Važne osobine standardizovane slučajne promenljive su da je

$$\boxed{E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1.}$$

Zaista,

$$E(X^*) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} E(X - E(X)) = 0,$$

$$D(X^*) = D\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{D(X)} D(X - E(X)) = \frac{D(X)}{D(X)} = 1.$$

3.4.3. Momenti slučajne promenljive diskretnog tipa

Definisaćemo dve vrste momenata, obične i centralne momente.

Neka je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots \end{pmatrix}$ zakonom raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa. Običan moment reda k ili kraće **moment reda k** slučajne promenljive X je matematičko očekivanje od X^k, $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$m_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k p(x_i),$$

Moment reda 1 je matematičko očekivanje.

Centralni moment reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje od $(X - E(X))^k$, $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$s_k = E\left((X - E(X))^k\right).$$

Disperzija je centralni moment reda 2.

3.4.4. Matematičko očekivanje i disperzija nekih slučajnih promenljivih diskretnog tipa

1. Bernulijeva raspodela. $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \;\; D(X) = E(X^2) - E^2(X) =$$

$$= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = pq.$$

2. Binomna raspodela. $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$.

Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom, tada $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n, p)$ (pogledati primer 3.3.a). Tada

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np,$$

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = npq.$$

3. Poasonova raspodela. $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (i - 1 + 1) \frac{\lambda^i}{(i-1)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} (\lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}) - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = \lambda.$$

3.4.5. Brojne karakteristike dvodimenzionalne slu čajne promenljive diskretnog tipa

Pored brojnih karakteristika koje bliže određuju centar i rasturanje dvodimenzionalne slučajne promenljive imamo i one koje opisuju zavisnost među komponentama dvodimenzionalne slučajne promenljive.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa čiji je skup vrednosti $\mathbb{R}_{XY} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_2, y_1), \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$ sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots$.

Centar dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) najčešće karakterišemo **matematičkim očekivanjem** $E(X, Y) = (E(X), E(Y))$ gde su $E(X)$ i $E(Y)$ matematička očekivanja slučajnih promenljivih X i Y. **Disperzija** za (X, Y) je uređen par $(D(X), D(Y))$ gde su $D(X)$ i $D(Y)$ disperzije slučajnih promenljivih X i Y.

Mešoviti momenti m_{kn} za (X, Y) su definisani sa

$$m_{kn} = E(X^k Y^n) = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^n p(x_i, y_j),$$

Brojne karakteristike koje opisuju zavisnost između X i Y su kovarijansa i koeficijent korelacije.

Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) je

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Koeficijent korelacije ρ_{XY} slučajne promenljive (X, Y) jednak je kovarijansi standardizovanih slučajnih promenljivih X^* i Y^*, tj.

$$\rho_{XY} = \operatorname{cov}(X^*, Y^*) = \operatorname{cov}\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},$$

tj.

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.}$$

Osobine koeficijenta korelacije

1. $\boxed{\text{Ako su } X \text{ i } Y \text{ nezavisne, onda } \rho_{XY} = 0}$.

2. $\boxed{|\rho_{XY}| \leq 1}$,

3. $\boxed{|\rho_{XY}| = 1 \text{ ako i samo ako } Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$.

Dokaz.

1. Ako su X i Y nezavisne, tada je $E(XY) = E(X)E(Y)$, te je $\rho_{XY} = 0$. Ukoliko je $\rho_{XY} = 0$, X i Y su **nekorelirane** slučajne promenljive. Nekoreliranost je "slabiji" uslov od nezavisnosti.

2. Iz dokaza osobine 4, odeljak 4.2, vidimo da je

$$\begin{aligned} D(X \pm Y) &= D(X) + D(Y) \pm 2(E(XY) - E(X)E(Y)) = \\ &= D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Dalje imamo

$$D(X^* \pm Y^*) = 1 + 1 \pm 2\rho_{XY} = 2(1 \pm \rho_{XY}).$$

Znamo da je $D(X^* \pm Y^*) \geq 0$ (osobina 2, odeljka 4.2), te je i $2(1 \pm \rho_{XY}) \geq 0$, što znači da je $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

3. Ako je $Y = aX + b$, tada je

$$Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \frac{aX + b - aE(X) - b}{\sqrt{a^2 D(X)}} = \frac{a}{|a|} X^* = (\operatorname{sgn} a) X^*.$$

U slučaju kad je $a > 0$, imamo da je

$$D(X^* - Y^*) = D(X^* - X^*) = 0 = 2(1 - \rho_{XY}),$$

što znači da je $\rho_{XY} = 1$. Ako je $a < 0$, analogno dobijamo da je $\rho_{XY} = -1$. Obrnuto, ako pretpostavimo da je $\rho_{XY} = 1$, tada je $1 - \rho_{XY} = 0$ i

$$0 = 2(1 - \rho_{XY}) = D(X^* - Y^*).$$

Koristeći osobinu 1, odeljak 4.2, zaključujemo da je $X^* - Y^* = \text{const}$, tj.

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} - \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \text{const}.$$

Očito da iz poslednje jednakosti lako dobijamo $Y = aX + b$.

U slučaju da je $\rho_{XY} = -1$, analogno se dokazuje isti rezultat. □

3.4.6. Uslovno matematičko očekivanje i regresija slučajne promenljive diskretnog tipa

U odeljku 3.5. i 3.6. videli smo na koji način informacija o jednoj od slučajnih promenljivih u paru (X, Y) utiče na raspodelu druge slučajne promenljive. Ta veza je najviše uočljiva na uslovnim raspodelama. Za svaku od uslovnih raspodela možemo definisati matematičko očekivanje i to nazivamo uslovnim matematičkim očekivanjem. Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa čiji je skup vrednosti

$$\mathbb{R}_{XY} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_2, y_1), \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$$

sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$. **Uslovno matematičko očekivanje** za X ako je $Y = y_j$ definisano sa

$$E(X|Y = y_j) = \sum_i x_i p(x_i|y_j) = \frac{1}{p(y_j)} \sum_i x_i p(x_i, y_j).$$

Skup tačaka $(E(X|Y = y_j), y_j)$ nazivamo **regresijom** slučajne promenljive X po slučajnoj promenljivoj Y ili kraće regresijom X po Y. U slučaju da su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $p(x_i|y_j) = p(x_i)$, te je $E(X|Y = y_j) = E(X)$. Skup tačaka koje čine regresiju X po Y u tom slučaju je na istom odstojanju od y-ose u pravouglom koordinatnom sistemu.

Analogno definišemo uslovno matematičko očekivanje za Y ako je $X = x_i$

$$E(Y|X = x_i) = \sum_j y_j p(y_j|x_i) = \frac{1}{p(x_i)} \sum_j y_j p(x_i, y_j).$$

Kako je za svaku vrednost $x_i, i = 1, 2, \ldots$, definisano uslovno očekivanje $E(Y|X = x_i)$, paru slučajnih promenljivih (X, Y) odgovara nova slučajna promenljiva $E(Y|X)$ čiji je skup vrednosti $\{E(Y|X = x_i), i = 1, 2, \ldots\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $p(x_i)$, tj.

$$E(Y|X) : \begin{pmatrix} E(Y|X = x_1) & E(Y|X = x_2) & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje tako definisane slučajne promenljive ima osobinu $E(E(Y|X)) = E(Y)$. Zaista,

$$E(E(Y|X)) = \sum_i E(Y|X = x_i)p(x_i) =$$

$$= \sum_i \left(\frac{1}{p(x_i)} \sum_j y_j p(x_i, y_j) \right) p(x_i) = \sum_j y_j \sum_i p(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_j y_j p(y_j) = E(Y),$$

naravno, uz pretpostavku da sva navedena očekivanja (obična i uslovna) postoje.

Primer 3.4.a. Naći regresiju X po Y ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva iz primera 3.2.a. i 3.2.c.

Rešenje.

$$E(X|Y = 0) = \frac{3}{2}, \quad E(X|Y = 1) = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{2},$$

$$E(X|Y = 2) = \frac{3}{2}.$$

Regresija X po Y je skup tačaka $(3/2, 0)$, $(3/2, 1)$, $(3/2, 2)$. U ovom primeru imamo da je $E(X|Y = y_j) = E(X)$, $j = 1, 2, 3$, iako X i Y nisu nezavisne slučajne promenljive. □

Neka su X i Y dve slučajne promenljive, $D(X) \in \mathbb{R}$, i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada izraz $E(X - g(Y))^2$ ima minimalnu vrednost za $g(Y) = E(X|Y)$. Grubo govoreći, to znači da ako slučajnu promenljivu X treba aproksimirati nekom transformacijom slučajne promenljive Y, tada najmanju grešku pravimo ako je aproksimiramo uslovnim očekivanjem $E(X|Y)$. Na ovoj osobini se baziraju mnoge metode veoma široko primenjene regresione analize.

Slučajne promenljive su **linearno korelirane** ako su njihove regresije linearne funkcije (tj. prave). Jednačine regresionih pravih su

$$y = m_Y + \rho_{XY} \frac{d_Y}{d_X}(x - m_X),$$

$$x = m_X + \rho_{XY} \frac{d_X}{d_Y}(y - m_Y),$$

gde je $m_X = E(X)$, $m_Y = E(Y)$, $d_X = \sqrt{D(X)}$, $d_Y = \sqrt{D(Y)}$, a ρ_{XY} je koeficijent korelacije za X i Y.

Glava 4

Slučajna promenljiva neprekidnog tipa

Radi ilustracije problema kojim se bavimo u ovom poglavlju, razmotramo sledeći primer. Pri korišćenju sijalice, dužina njene upotrebe je slučajna veličina. Ona može biti bilo koja realna vrednost između 0 i, recimo, 1000 sati. Kako u intervalu $[0, 1000]$ ima kontinuum mnogo tačaka, ne postoji način da definišemo verovatnoću za svaku od pojedinačnih vrednosti, kao što smo mogli u slučaju diskretne slučajne promenljive. Takođe, na osnovu intuicije znamo da je verovatnoća da će sijalica pregoreti baš u tačno određenom momentu $x \in [0, 1000]$ jednaka nuli, dok je verovatnoća da će pregoreti u nekom intervalu $[a, b] \subseteq [0, 1000]$ različita od nule i zavisi od dužine i položaja intervala $[a, b]$. Očigledno da matematički model koji opisuje ovaj slučaj mora biti drugačiji od modela koji odgovara promenljivoj diskretnog tipa.

4.1. Slučajna promenljiva neprekidnog tipa

U ovom poglaqvlju razmatramo slučajnu promenljivu čiji skup vrednosti „popunjava" neki interval ili celu pravu. Osnovna karakteristika takve slučajne promenljive je da za nju postoji odgovarajuća funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je za svaki podskup realnih brojeva S, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\boxed{P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x)dx.}$$

Najjednostavniji način uvođenja te nove funkcije φ_X, koja omogućava da pomoću integrala nalazimo verovatnoće vezane za ovaj tip slučajne promenljive X, je preko funkcije raspodele F_X.

Slučajna promenljiva X je **neprekidnog tipa** (X je **neprekidna slučajna promenljiva**) ako postoji funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ takva da je

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R},}$$

gde je F_X funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkciju φ_X nazivamo **gustinom raspodele verovatnoća** slučajne promenljive X ili kraće **gustinom** za X. Ako se spominje više slučajnih promenljivih $X, Y, \ldots$, njihove gustine obeležavamo sa $\varphi_X, \varphi_Y, \ldots$. Ako je jasno o kojoj promenljivoj se radi, ili ako navodimo neke opšte osobine, funkciju gustine obeležavamo bez indeksa, sa φ.

Osobine gustine

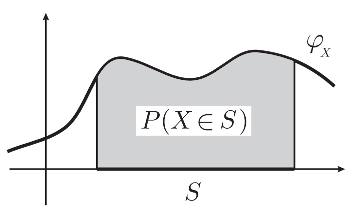
1. $\varphi_X(x) = F'_X(x)$
   u svim tačkama $x \in \mathbb{R}$ u kojima je φ_X neprekidna.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)dx = F_X(\infty) = 1.$
3. $P(X = a) = \lim\limits_{h\to 0} P(a - h < X \leq a) =$
   $\displaystyle = \lim_{h\to 0} \int_{a-h}^{a} \varphi_X(x)\,dx = 0, \qquad \text{za sve } a \in \mathbb{R}.$
4. $P(a < X < b) = \displaystyle\int_{a}^{b} \varphi_X(x)dx, \quad \text{za sve } a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$
5. $\varphi_X(x) \geq 0, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$

Na osnovu osobina 3 i 4 vidimo da je

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \int_a^b \varphi_X(x)dx.$$

Takođe se lako može zaključiti da je za svako $S \subset \mathbb{R}$, gde je S unija intervala,

$$P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x)dx.$$

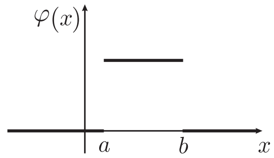


4.1.1. Neki primeri slučajne promenljive neprekidnog tipa

Uniformna raspodela $\mathcal{U}(a,b)$

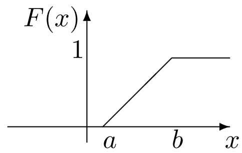
Uniformna raspodela ima dva parametra $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Gustina ove raspodele je

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}.$$



Odgovarajuća funkcija raspodele je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & b < x \end{cases}.$$



Normalna (Gausova) raspodela $\mathcal{N}(m,\xi)$

Normalna raspodela ima dva parametra: $m \in \mathbb{R}$ i $\xi > 0$. Gustina normalne raspodele je

$$\varphi(x) = \frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\xi^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a funkcija raspodele

$$F(x) = \frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\xi^2}} dt.$$

Može se bez preterivanja reći da je ova raspodela najznačajnija raspodela u teoriji verovatnoće i matematičke statistike. Naročito često srećemo normalnu raspodelu sa parametrima $m = 0$ i $\xi = 1$. Kao oznaku funkcije raspodele u tom slučaju koristimo slovo Φ,

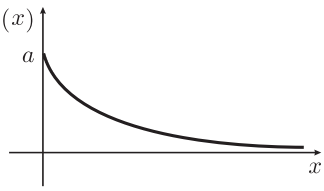
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Eksponencijalna raspodela $\mathcal{E}(a)$

Eksponencijalna raspodela ima jedan parametar $a > 0$.

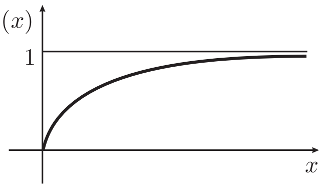
Gustina je

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$



a funkcija raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$



Primer 4.1.a. Neka je T slučajna promenljiva koja predstavlja dužinu rada uređaja koji radi po sledećem režimu: Ako sistem radi u momentu $t > 0$, onda je uslovna verovatnoća da će prestati sa radom do momenta $t + \Delta t$ jednaka $a\Delta t + o(\Delta t)$, gde je $o(\Delta t)$ beskonačno mala veličina u odnosu na Δt kad $\Delta t \to 0$ (tj. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$). Pokazaćemo da slučajna promenljiva T ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(a)$ raspodelu.

Rešenje. Na osnovu opisa promenljive T nalazimo uslovne verovatnoće

$$P(T < t + \Delta t \mid T \geq t) = a\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(T \geq t + \Delta t \mid T \geq t) = 1 - a\Delta t + o(\Delta t).$$

Formiramo diferencijalnu jednačinu iz koje nalazimo funkciju raspodele $F(t)$

$$F(t + \Delta t) = P(T < t + \Delta t) = 1 - P(T \geq t + \Delta t) =$$

$$= 1 - P(T \geq t + \Delta t \mid T \geq t)P(T \geq t) =$$

$$= 1 - (1 - a\Delta t + o(\Delta t))(1 - F(t)),$$

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = a(1 - F(t)) - \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}(1 - F(t)).$$

Kad $\Delta t \to 0$, dobijamo $F'(t) = a(1 - F(t))$. Rešavanjem ove diferencijalne jednačine, uz početni uslov $F(0) = 0$, dobijamo $F(t) = 1 - e^{-at}, t > 0$, što predstavlja eksponencijalnu raspodelu.

Vejbulova raspodela $\mathcal{V}(\alpha,\beta)$

Kažemo da neprekidna slučajna promenljiva ima Vejbulovu raspodelu $\mathcal{V}(\alpha,\beta)$ sa parametrima $\alpha>0,\ \beta>0,$ ako je njena gustina

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x>0,\\ \qquad 0, & x\le 0\end{cases}$$

Na slici su nacrtani grafici gustine za različite vrednosti parametara α i β.

Funkcija raspodele je data sa

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x<0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Eksponencijalna raspodela je specijalan slučaj Vejbulove raspodele kada je $\alpha=1$, (sa $\lambda=\beta^{-1}$).

Rejlijeva raspodela (pogledati Prilog 2) je specijalan slučaj Vejbulove raspodele kada je $\alpha=2,\quad \beta^2=2a^2$.

Lognormalna raspodela $\mathcal{L}(\mu,\sigma)$

Kažemo da neprekidna slučajna promenljiva ima lognormalnu raspodelu $\mathcal{L}(\mu,\sigma)$ sa parametrima $\mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0,$ ako je njena gustina

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(lnx-\mu)^2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Na slici su nacrtani grafici gustine za različite vrednosti parametara $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$.

U narednom odeljku pokazaćemo da ako sučajna promenljiva Y ima normalnu $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ raspodelu, tada slučajna promenljiva $X=e^Y$ ima lognormalnu $\mathcal{L}(\mu,\sigma)$ raspodelu. Na osnovu rezultata primera 4.1.d. vrednosti funkcije raspodele F nalazimo sa

$$F(x)=P(X<x)=P(lnX<lnx)=P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}<\frac{lnx-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{lnx-\mu}{\sigma}\right),$$

gde je Φ funkcija $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele.

4.1.2. Transformacija slučajne promenljive neprekidnog tipa

Kao što je opisano u odeljku 3.1.2, ukoliko je g funkciju koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ a neka je X slučajna promenljiva koja prostor verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ preslikava u $\mathbb{R}$, tada je kompozicija preslikavanja g i X nova slučajna promenljiva nad istim prostorom verovatnoća, s tim što preslikavanje g mora zadovoljavati uslov da je $g^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gde je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo polje (primer 1.2.b). Lako se proverava da, recimo, neprekidno preslikavanje zadovoljava ovaj uslov.

Ako je poznata raspodela neprekidne slučajne promenljive X i funkcija g, može se naći raspodela slučajne promenljive $Y = g(X)$. Videćemo kako se ovaj problem može jednostavno rešiti u nekim specijalnim slučajevima.

1. X je neprekidnog tipa, g je monotono rastuća neprekidna funkcija

Ako je g monotono rastuća funkcija, onda je g^{-1} takođe monotono rastuća funkcija. Funkciju raspodele slučajne promenljive Y dobijamo na sledeći način

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) =$$

$$= P(g^{-1}(g(X)) < g^{-1}(y)) = P(X < g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Kako je $\varphi = F'$, gustinu nalazimo na osnovu jednakosti

$$\varphi_Y(y) = (F_X(g^{-1}(y)))' = F'_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))' =$$

$$= \varphi_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'.$$

Primer 4.1.b. Neka X ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$ i neka je $y = g(x) = \ln x$. Tada je $x = g^{-1}(y) = e^y$ i $(g^{-1}(y))' = e^y$. Funkcija raspodele i gustina za $Y = \ln X$ su

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) = 1 - e^{-ae^y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))' = ae^{-ae^y} e^y = ae^{y-ae^y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

□

2. X je neprekidnog tipa, g je monotono opadajuća neprekidna funkcija

Ako je g monotono opadajuća funkcija, tada je g^{-1} takođe monotono opadajuća funkcija. Slično kao i u prethodnom slučaju

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X > g^{-1}(y)) =$$

$$= 1 - P(X \leq g^{-1}(y)) =$$

$$= 1 - P(X = g^{-1}(y)) - P(X < g^{-1}(y)) =$$

$$= 1 - 0 - F_X(g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)),$$

$$\varphi_Y(y) = (1 - F_X(g^{-1}(y)))' = -F'_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))' =$$
$$= -\varphi_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'.$$

Kako je g^{-1} monotono opadajuća funkcija, to je $(g^{-1}(y))'$ negativna za sve y iz domena g^{-1}. Tada poslednju formulu možemo pisati na sledeći način

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|.$$

Primer 4.1.c. Neka slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y = aX + b$. Pokazati da Y ima normalnu $\mathcal{N}(b, |a|)$ raspodelu.

Rešenje. Kako je linearna funkcija, $g(x) = ax + b$, monotona (monotono rastuća ze $a > 0$, a monotono opadajuća za $a < 0$), primenom formule

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(g^{-1}(y))|(g^{-1}(y))'| \quad \text{i} \quad g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

dobijamo

$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Važi i obrnuto, tj. ako Y ima $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ raspodelu, tada $X = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu. □

Primer 4.1.d. Neka slučajna promenljiva Y ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i neka je $X = e^Y$. Pokazati da X ima lognormalnu $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ raspodelu.

Rešenje. Kako je funkcija $x = e^y$ monotono rastuća, i kako je izvod inverznog preslikavanja $y = lnx$ jednak $y' = \frac{1}{x}$, dobijamo

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(lnx-\mu)^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

što je gustina lognormalne raspodele. □

3. X je neprekidnog tipa, g nije ni monotono opadajuća, ni monotono rastuća funkcija

Ako je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa a g nije ni monotono opadajuća, ni monotono rastuća funkcija, tada ne postoji jednostavna formula za nalaženje gustine φ_Y, kao što smo imali u slučaju 1 i 2. Obično se do rešenja dolazi nalaženjem funkcije rapodele $F_Y(y)$. Kako je $F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y)$, za svako $y \in \mathbb{R}$ treba naći nepoznatu verovatnoću koristeći poznatu raspodelu za X.

Primer 4.1.e. Neka X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0,1)$ i neka je $y = g(x) = x^2$. Naći gustinu za $Y = X^2$.

Rešenje. Kako $g(x) = x^2$ nije monotona funkcija, ne možemo primeniti formulu kao u prethodnom primeru. Naćićemo funkciju raspodele

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y \geq 0 \end{cases}.$$

$$\varphi_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F'_X(\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}} + F'_X(-\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & y \geq 0 \end{cases}.$$

□

Primer 4.1.f. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Neka je F funkcija raspodele neprekidna i monotono rastuća za $F(x) \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}$. Pokazati da je $F_{F^{-1}(X)} = F$, tj. da je funkcija raspodele F_Y slučajne promenljive $Y = F^{-1}(X)$ jednaka funkciji F.

Rešenje. Za one $x \in \mathbb{R}$ za koje je $F(x) \in (0,1)$, važi

$$F_{F^{-1}(X)}(x) = P(F^{-1}(X) \leq x) = P(X \leq F(x)) = F(x).$$

Za one $x \in \mathbb{R}$ za koje je $F(x) = 0$, važi

$$F_{F^{-1}(X)}(x) = P(F^{-1}(X) \leq x) = P(X \leq F(x)) = P(X \leq 0) = 0 = F(x).$$

Za one $x \in \mathbb{R}$ za koje je $F(x) = 1$, važi

$$F_{F^{-1}(X)}(x) = P(F^{-1}(X) \leq x) = P(X \leq F(x)) = P(X \leq 1) = 1 = F(x).$$

Ovaj rezultat ima veliku primenu u generisanju realizacija slučajne promenljive sa zadatom raspodelom F. Za generisanje bilo koje neprekidne slučajne promenljive sa rastućom funkcijom raspodele F, dovoljno je generisati uniformnu slučajnu promenljivu $X : \mathcal{U}(0,1)$ i zatim naći $Y = F^{-1}(X)$. □

4.2. Ostale slučajne promenljive

Postoje slučajne promenljive koje nisu ni diskretnog ni neprekidnog tipa. One su okarakterisane svojom funkcijom raspodele. U ovoj knjizi nećemo se baviti tim tipom slučajnih promenljivih s obzirom da matematička aparatura potrebna za to izlazi iz okvira ovog kursa.Navodimo jedan primer slučajne promenljive koja nije diskretnog tipa jer skup vrednosti prolazi neprekidnim intervalom $(0, \frac{2}{3})$, a nije ni neprekidnog tipa jer se njena funkcija raspodele ne moze izraziti integralom neke gustine.

Primer 4.2.a. Slučajna promenljiva čija je funkcija raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3} + x, & 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq x \end{cases}$$

očito nije diskretnog tipa. Ako bi bila neprekidnog tipa tada bi njena gustina bila

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{za ostale } x \end{cases} .$$

Kako je $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} dx = \dfrac{2}{3} \neq 1$, funkcija φ ne može biti gustina, što znači da odgovarajuća slučajna promenljiva nije neprekidnog tipa. $\square$

4.3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele F_{XY}. Ako postoji funkcija $\varphi_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ takva da je za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(t, u)du ,}$$

kažemo da je (X, Y) **neprekidnog tipa** ili (X, Y) je **neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva**. Funkciju φ_{XY} nazivamo **gustinom raspodele verovatnoća** ili kraće **gustinom** za (X, Y).

Osobine gustine

1. $\varphi_{XY}(x, y) \geq 0$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$.

2. $\varphi_{XY} = \dfrac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y}$ u svim tačkama $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima je φ_{XY} neprekidna.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)dy = F(\infty, \infty) = 1.$

4. $P((X, Y) \in S) = \iint\limits_{S} \varphi_{XY}(x, y)\, dxdy, \quad$ gde je $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

5. Za $a < b,\ \ c < d$, važi $P(a < X < b,\ c < Y < d) = \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x, y)\, dy$

Ako je (X, Y) neprekidnog tipa, onda će svaka od slučajnih promenljivih X i Y biti neprekidnog tipa. Njihove gustine φ_X i φ_Y nazivamo **marginalnim gustinama**. Nalaze se na sledeći način:

$$\varphi_X(x) = F'_X(x) = (F_{XY}(x, \infty))' =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(t, y)\, dy \right)'_x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)\, dy,$$

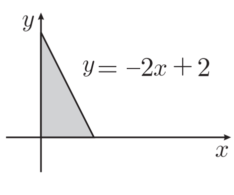
što znači da je

$$\boxed{\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)dy,} \quad \boxed{\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)dx.}$$

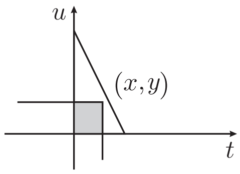
Primer 4.3.a. Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa sa gustinom

$$\varphi_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,\ 0 < y < -2x + 2, \\ 0, & \text{za ostale } (x, y), \end{cases}$$

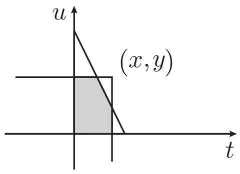
(na slici je šrafirana oblast u $\mathbb{R}^2$ nad kojom je $\varphi_{XY} \neq 0$). Naći funkciju raspodele F_{XY} i marginalne gustine.



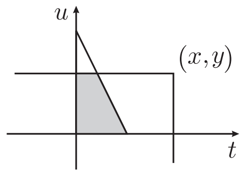
Rešenje. Kako je $F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(t, u)du$, funkcija F_{XY} će imati različit analitički oblik u pojedinim oblastima ravni $\mathbb{R}^2$.



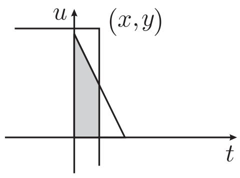
II



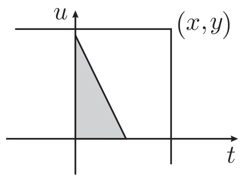
III



IV



V



VI

I za $x < 0$ ili $y < 0$ (II, III, IV kvadrant)

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} 0du = 0.$$

II za $0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < -2x + 2$ (slika II)

$$F_{XY}(x,y) = \int_{0}^{x} dt \int_{0}^{y} 1du = xy.$$

III za $0 \leq x < 1,\ -2x + 2 \leq y < 2$ (slika III)

$$F_{XY}(x,y) = \int_{0}^{-\frac{y}{2}+1} dt \int_{0}^{y} 1du + \int_{-\frac{y}{2}+1}^{x} dt \int_{0}^{-2t+2} 1du =$$

$$= -\frac{y^2}{4} + y - x^2 + 2x - 1.$$

IV za $1 \leq x,\ 0 \leq y < 2$ (slika IV)

$$F_{XY}(x,y) = \int_{0}^{y} du \int_{0}^{-\frac{u}{2}+1} 1dt = -\frac{y^2}{4} + y.$$

V za $0 \leq x < 1,\ 2 \leq y$ (slika V)

$$F_{XY}(x,y) = \int_{0}^{x} dt \int_{0}^{-2t+2} 1du = -x^2 + 2x.$$

VI za $1 \leq x,\ 2 \leq y$ (slika VI)

$$F_{XY}(x,y) = 1.$$

Marginalne gustine nalazimo na sledeći način:

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x,y)dy =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0dy = 0, & x \notin (0,1) \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dy + \int\limits_{0}^{-2x+2} 1dy + \int\limits_{-2x+2}^{\infty} 0dy = 2(1-x), & x \in (0,1) \end{cases}.$$

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x,y)dx = \begin{cases} 0, & y \notin (0,2) \\ \dfrac{2-y}{2}, & y \in (0,2) \end{cases}.$$

□

4.3.1. Uslovne raspodele slučajne promenljive neprekidnog tipa

Neka je (X,Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa i neka je F_{XY} njena funkcija raspodele. Kao što smo ranije videli, iz zajedničke raspodele možemo naći marginalne funkcije raspodele F_X i F_Y, zajedničku gustinu φ_{XY} i marginalne gustine φ_X i φ_Y.

U odeljku 4.3.1 definisali smo uslovnu funkciju raspodele za Y ako znamo da $X \in S$, gde je $S \subset \mathbb{R}$

$$F_{Y|X\in S}(y) = \frac{P(Y \le y, X \in S)}{P(X \in S)}.$$

Poslednji izraz definisan je samo pod uslovom da je $P(X \in S) \neq 0$. Ako je $S = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ (tj. ako imamo informaciju da je $X = x$, $x \in \mathbb{R}$), tada, kako je X neprekidnog tipa, znamo da je $P(X = x) = 0$. U tom slučaju uslovnu funkciju raspodele za Y, ako je $X = x$, definisaćemo na sledeći način

$$F_{Y|X=x}(y) = \lim_{h\to 0} P(Y \le y | x-h < X \le x).$$

Transformisaćemo ovaj izraz

$$F_{Y|X=x}(y) = \lim_{h\to 0} \frac{P(Y \le y, x-h < X \le x)}{P(x-h < X \le x)} = \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x-h}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(t,u)du}{\displaystyle\int_{x-h}^{x} \varphi_X(t)dt}$$

i kako je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x-h}^{x} a(t)dt}{h} = a(x),$$

dobijamo

$$F_{Y|X=x}(y) = \frac{\int_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(x,u)du}{\varphi_X(x)} = \int_{-\infty}^{y} \frac{\varphi_{XY}(x,u)}{\varphi_X(x)} du,$$

ukoliko je $\varphi_X(x) > 0$. Funkcija $\dfrac{\varphi_{XY}(x,y)}{\varphi_X(x)}$, $\varphi_X(x) > 0$, je gustina koja odgovara funkciji raspodele $F_{Y|X=x}(y)$, obeležavamo je sa $\varphi_{Y|X=x}(y)$ i nazivamo je **uslovnom gustinom** za Y ako je $X = x$.

Očigledno da ceo postupak ima smisla ako za tačku x postoji $h > 0$ takvo da je $\varphi_X(t) > 0$ za $t \in (x-h, x]$. U tačkama gde ovaj uslov nije zadovoljen, je $\varphi_{Y|X=x}(y) = 0$.

Analogno postupamo u slučaju da je poznata vrednost y koju dobija slučajna promenljiva Y, tj.

$$\boxed{F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi_{XY}(t,y)}{\varphi_Y(y)} dt \ ,}$$

$$\boxed{\varphi_{X|Y=y}(x) = \frac{\varphi_{XY}(x,y)}{\varphi_Y(y)}, \quad \varphi_Y(y) > 0.}$$

Primer 4.3.b. Neka dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) bude kao u primeru 4.3.a. Naći uslovne gustine $\varphi_{X|Y=y}$ i $\varphi_{Y|X=x}$.

Rešenje.

$$\varphi_{X|Y=y}(x) = \frac{\varphi_{XY}(x,y)}{\varphi_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 0 < y < -2x+2 \end{array} \\ 0, & \text{za ostale } (x,y) \end{cases}$$

$$\varphi_{Y|X=x}(y) = \frac{\varphi_{XY}(x,y)}{\varphi_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 0 < y < -2x+2 \end{array} \\ 0, & \text{za ostale } (x,y) \end{cases} .$$

4.3.2. Nezavisnost slučajnih promenljivih neprekidnog tipa

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva i neka su F_{XY}, F_X, F_Y redom zajednička i marginalne funkcije raspodele. Kažemo da su X i Y **nezavisne slučajne promenljive** ako za svako $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y).}$$

Teorema 4.3.a. *Neka su X i Y slučajne promenljive neprekidnog tipa. One su nezavisne ako i samo ako je*

$$\varphi_{XY}(x,y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y) \quad \textit{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Ako su X i Y nezavisne, tada je

$$\varphi_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} =$$

$$= F'_X(x)F'_Y(y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y).$$

Obrnuto, ako je $\varphi_{XY}(x,y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y)$, tada je

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(t,u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_X(t)\varphi_Y(u)du = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_Y(u)du =$$

$$= F_X(x)F_Y(y).$$

□

Kao poslednje u ovom odeljku razmotrićemo kako se nezavisnost slučajnih promenljivih odražava na uslovne raspodele.

Ako je (X,Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa takva da su X i Y nezavisne, tada su uslovne gustine jednake marginalnim, tj.

$$\boxed{\varphi_{X|Y=y}(x) = \varphi_X(x) \quad \text{i} \quad \varphi_{Y|X=x}(y) = \varphi_Y(y).}$$

Primer 4.3.c. Slučajne promenljive u primeru 4.3.a. nije nezavisna. Zašto? □

4.3.3. Transformacija dvodimenzionalne slučajne promenljive neprekidnog tipa

Neka je (X,Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva i neka je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funkcija takva da je $g(x,y) = (u,v)$ za svako $x, y \in \mathbb{R}$.

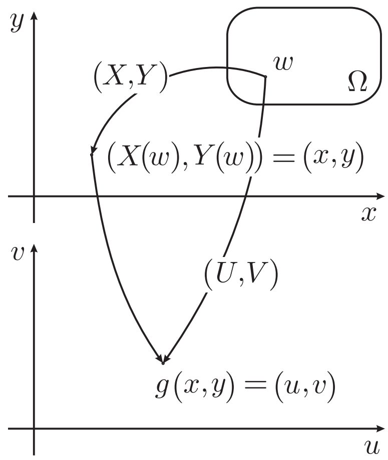
Funkcija $g : (x, y) \to (u, v)$ obično je zadata preko funkcija

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Kompozicija preslikavanja (X, Y) i g koja svakom elementarnom događaju ω dodeljuje par brojeva

$$g(X(\omega), Y(\omega)) = (u, v)$$

predstavlja transformaciju dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) funkcijom g.



Pod određenim uslovima (ne veoma restriktivnim - recimo, neprekidna funkcija g zadovoljava te uslove) ta kompozicija predstavlja novu dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (U, V)

$$(U, V)(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega)) = (u, v).$$

Tu transformaciju često zapisujemo sa $(U, V) = g(X, Y)$ ili $U = u(X, Y)$, $V = v(X, Y)$.

Razmotrićemo neke specijalne slučajeve transformacije dvodimenzionalne slučajne promenljive neprekidnog tipa.

U ovom slučaju razmatramo dve mogućnosti

I funkcija g preslikava $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$

II funkcija g preslikava $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$.

I Pretpostavimo da je $g : \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^2$ obostrano jednoznačno preslikavanje i da je zadato svojim komponentama u i v, tj. $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $x, y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo dalje da su inverzne funkcije $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$ neprekidne nad S i da je Jakobijan transformacije

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

različit od 0. Tada je zajednička gustina dvodimenzionalne slučajne promenljive $(U, V) = g(X, Y)$ data formulom

$$\varphi_{UV}(u, v) = \varphi_{XY}(x(u, v), y(u, v))|\mathcal{J}|, \quad (u, v) \in S.$$

Izvođenje ove formule ćemo izostaviti. U suštini, ono je isto kao izvođenje formule za smenu promenljivih u dvostrukom integralu, što je rađeno na prethodnim kursevima.

Primer 4.3.d. Neka je g funkcija koja preslikava pravougle koordinate u polarne, tj. $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $\mathcal{J} = u$. Svi ranije navedeni uslovi za transformaciju su g zadovoljeni, te možemo primeniti formulu za nalaženje gustine za (U,V). Ako je gustina za (X,Y) data sa

$$\varphi_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{za ostale } (x,y) \end{cases},$$

tada je gustina za $(U,V) = g(X,Y)$

$$\varphi_{UV}(u,v) = \begin{cases} ue^{-u(\cos v + \sin v)}, & u > 0, 0 < v < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{za ostale } (u,v) \end{cases}.$$

□

II Ako funkcija g preslikava $\mathbb{R}^2$ u $S \subseteq \mathbb{R}$. tj. ako je $g(x,y) = z(x,y) = z$, tada kao rezultat kompozicije slučajne promenljive (X,Y) i funkcije g dobijamo slučajnu promenljivu $Z = g(X,Y)$. Ako je (X,Y) neprekidnog tipa, tada funkciju raspodele F_Z slučajne promenljive Z nalazimo na sledeći način

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) =$$

$$= \int\limits_{\{(x,y):\, g(x,y) \le z\}} \int \varphi_{XY}(x,y) dx dy.$$

Problem se može rešiti i na sledeći način: Preslikavanje $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = z(x,y) = z$, interpretiramo kao preslikavanje $\bar{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{g}(x,y) = (z(x,y), y)$. Kao što vidimo $\bar{g}$ je dobijeno od g tako što je slika pri preslikavanju funkcijom $\bar{g}$ formirana kao uređen par $(z(x,y), y)$ gde je prva komponenta slike jednaka $g(x,y) = z$, a druga komponenta je ista kao druga komponenta originala. Jakobijan funkcije $\bar{g}$ je

$$\bar{\mathcal{J}} = \begin{vmatrix} x_z & x_y \\ y_z & y_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_z & x_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |x_z|.$$

Ako je preslikavanje $\bar{g}$ obostrano jednoznačno sa neprekidnim parcijalnim izvodima, tada transformacija $\bar{g}$ par slučajnih promenljivih (X,Y) preslikava u par slučajnih promenljivih (Z,Y). Zajednička gustina za (Z,Y) se nalazi po formuli

$$\varphi_{ZY}(z,y) = \varphi_{XY}(z(x,y), y)|x_z|.$$

Kako nama treba gustina za Z, nalazimo je po formuli za izračunavanje marginalne gustine iz zajedničke gustine

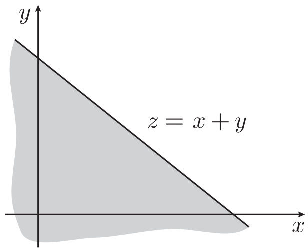
$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ZY}(z,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(z(x,y), y)|x_z| dy.$$

Primer 4.3.e. Konvolucija (zbir) dve promenljive.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa i neka je $g(x, y) = x + y$. Naći gustinu slučajne promenljive $Z = X + Y$. Kažemo da je Z dobijeno konvolucijom X i Y.

Rešenje. Neka je $\varphi_{XY}(x, y)$ zajednička gustina za (X, Y). Gustinu slučajne promenljive Z ćemo naći na dva načina.

1.



$$F_Z(z) = \int\int_{\{(x,y):x+y\leq z\}} \varphi_{XY}(x, y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} \varphi_{XY}(x, y)\, dx.$$

Uvođenjem smene $x = t - y$, $dx = dt$, dobijamo

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z} \varphi_{XY}(t - y, y)\, dt = \int_{-\infty}^{z} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(t - y, y)\, dy.$$

Funkciji raspodele F_Z odgovara gustina $\dfrac{dF_Z}{dz}$, tj.

$$\varphi_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(z - y, y)\, dy.$$

2. Gustinu φ_Z možemo dobiti uvođenjem funkcije

$$\bar{g} : (x, y) \to (x + y, y), \quad x + y = z.$$

Jakobijan za $\bar{g}$ je 1. Tada je

$$\varphi_{ZY}(z, y) = \varphi_{XY}(z - y, y),$$

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(z - y, y)\, dy.$$

□

4.4. n-dimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne promenljive definisane na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada uređenu n-torku $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nazivamo

n-dimenzionalnom slučajnom promenljivom. Njoj odgovara funkcija raspodele $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definisana sa

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \le x_1 \;\wedge\; X_2(\omega) \le x_2 \;\wedge \ldots \wedge\; X_n(\omega) \le x_n\} =$$
$$= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n).$$

Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako je

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n).$$

Za matematičku statistiku je posebno interesantan problem transformacije n-dimenzionalne slučajne promenljive. U sledećih nekoliko primera pokazaćemo kako se može naći raspodela slučajne promenljive $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, gde funkcija g preslikava $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su nezavisne slučajne promenljive.

Primer 4.4.a. (**Minimum i maksimum uzorka**)

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive. Naći raspodelu slučajnih promenljivih

$$Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \quad \text{i} \quad V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Y nazivamo **maksimumom** a V **minimumom** uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ako sve X_i imaju istu eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$, naći gustinu za Y i V.

Rešenje.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \le y) =$$
$$= P(X_1 \le y, X_2 \le y, \ldots, X_n \le y) =$$
$$= P(X_1 \le y)P(X_2 \le y)\ldots P(X_n \le y) =$$
$$= F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y).$$

Ako su X_i sa istom raspodelom neprekidnog tipa za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, onda je i Y neprekidnog tipa i njena gustina je

$$\varphi_Y(y) = F_Y(y) = (F^n_{X_i}(y))' = nF^{n-1}_{X_i}(y)\varphi_{X_i}(y).$$

U slučaju da se radi o eksponencijalnoj raspodeli $\mathcal{E}(a)$, imamo:

$$\varphi_Y(y) = an(1 - e^{-ay})^{n-1}e^{-ay}, \quad y > 0.$$

Na sličan način rešavamo problem u drugom slučaju za $V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

$$F_V(v) = P(V \le v) = P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \le v) =$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > v) =$$
$$= 1 - P(X_1 > v, X_2 > v, \ldots, X_n > v) =$$
$$= 1 - P(X_1 > v)P(X_2 > v) \cdots P(X_n > v) =$$
$$= 1 - (1 - P(X_1 \le v))(1 - P(X_2 \le v)) \cdots (1 - P(X_n \le v)) =$$
$$= 1 - (1 - F_{X_1}(v))(1 - F_{X_2}(v)) \cdots (1 - F_{X_n}(v)).$$

Ako su svi X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sa istom raspodelom tada je

$$F_V(v) = 1 - (1 - F_{X_i}(v))^n,$$

a ako su neprekidnog tipa onda je

$$\varphi_V(v) = n(1 - F_{X_i}(v))^{n-1}\varphi_{X_i}(v).$$

U slučaju da sve X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ imaju eksponencijalnu raspodelu tada

$$\varphi_V(v) = nae^{-nav}, \quad v > 0,$$

tj. $V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(na)$. □

Primer 4.4.b. (**k-ta statistika poretka**)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ su nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom F . Ako slučajne promenljive $X_1, X_2, \cdots, X_n$ poređamo u rastući poredak $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$, slučajnu promenljivu Y_k, $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, nazivamo k-tom statistikom poretka (Y_1 je minimum, a Y_n je maksimum uzorka). Naći raspodelu F_{Y_k}. Ako su $X_1, X_2, \cdots, X_n$, neprekidnog tipa, naći gustinu φ_{Y_k}.

Rešenje. Y_k je manje od y, $y \in \mathbb{R}$, ako i samo ako je bar k slučajnih promenljivih iz niza $X_1, X_2, \cdots, X_n$ manje od y, te je

$$F_{Y_k}(y) = P(Y_k \le y) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F^i(y)(1 - F(y))^{n-i}.$$

Ukoliko su $X_1, X_2, \cdots, X_n$ neprekidnog tipa, znajući da je $\varphi = F'$, dobijamo

$$\varphi_{Y_k} = F'_{Y_k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} i\varphi F^{i-1}(1 - F)^{n-i} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n}{i} (n - i)\varphi F^i (1 - F)^{n-i-1}.$$

Uvodimo smenu indeksa $i = j - 1$ u drugu sumu gornje jednakosti

$$\varphi_{Y_k} = n\varphi \left(\sum_{i=k}^{n} \binom{n-1}{i-1} F^{i-1}(1 - F)^{n-i} - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n-1}{j-1} F^{j-1}(1 - F)^{n-j} \right)$$

$$= n\varphi\binom{n-1}{k-1}F^{k-1}(1-F)^{n-k},$$

te je

$$\varphi_{Y_k}(y) = n\binom{n-1}{k-1}F^{k-1}(y)(1-F(y))^{n-k}\varphi(y).$$

□

4.5. Brojne karakteristike slučajne promenljive neprekidnog tipa

Slično kao u odeljku 3.4, definišemo brojne karakteristike slučajne promenljive X neprekidnog tipa. Neka je X slučajne promenljive neprekidnog tipa sa gustinom φ_X. **Matematičko očekivanje** $E(X)$ slučajne promenljive X je broj definisan sa:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx,}$$

pod uslovom da odgovarajući integral apsolutno konvergira. Umesto naziva matematičko očekivanje često ćemo koristiti skraćeni naziv očekivanje ili očekivana vrednost.

Osobine matematičkog očekivanj slučajne promenljive neprekidnog tipa iste su kao osobine matematičkog očekivanja slučajne promenljive diskretnog tipa s tim što u skladu sa definicijom, osobine 2 i 3 glase:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi_X(x)dx, \qquad E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\varphi_{XY}(x,y)dxdy.$$

Matematičko očekivanje je najznačajnija brojna karakteristika vezana za centar raspodele slučajne promenljive. Postoje i druge brojne karakteristike koje opisuju centar raspodele a najčešće je u upotrebi

- **medijana**: medijana slučajne promenljive X je broj m_c takav da je

$$P(X \leq m_c) = P(X \geq m_c).$$

- **modus**: Ako je X neprekidnog tipa, modus m_σ je ona vrednost u kojoj gustina φ_X dostiže maksimum ($\varphi_X(m_\sigma) > \varphi_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq m_\sigma$).

Disperzija je brojna karakteristika vezana za rasturanje ili rasejavanje slučajne promenljive. U literaturi se često koristi naziv varijansa. **Disperzija** $D(X)$ slučajne promenljive neprekidnog tipa X definisana je sa

$$\boxed{D(X) = E\left((X - E(X))^2\right).}$$

Kao i u diskretnom slučaju, često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - E^2(X).}$$

gde je $E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_X(x)dx$.

Koren iz disperzije $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ je **standardna devijacija** ili standardno odstupanje.

Standardizovana (normalizovana) **slučajna promenljiva** X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom

$$\boxed{X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.}$$

Važne osobine standardizovane slučajne promenljive su da je

$$\boxed{E(X^*) = 0, \qquad D(X^*) = 1.}$$

Momenti (obični i centralni), kovarijansa, koeficijent korelacije, definišu se na isti način kao za slučajnu promenljivu diskretnog tipa. Takodje, sve osobine matematičkog očekivanja, disperzije i ostalih brojnih karakteristika iste su kao kod slučajne promenljive diskretnog tipa.

Primer 4.5.a. Dvodimenzionalna normalna raspodela.

Kažemo da (X, Y) ima dvodimenzionalnu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m_1, m_2, \xi_1, \xi_2, r)$, $m_1 \in \mathbb{R}$, $m_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $r \in (-1, 1)$, ako je zajednička gustina data sa

$$\varphi(x, y) = Ae^B,$$

gde je

$$A = \frac{1}{2\pi\xi_1\xi_2\sqrt{1 - r^2}},$$

$$B = -\frac{1}{2(1 - r^2)}\left(\frac{(x - m_1)^2}{\xi_1^2} - 2r\frac{(x - m_1)(x - m_2)}{\xi_1\xi_2} + \frac{(x - m_2)^2}{\xi_2^2}\right).$$

Bez dokaza navodimo neke važne osobine ove raspodele:

- Marginalne raspodele za X i Y su normalne $\mathcal{N}(m_1, \xi_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \xi_2)$ raspodele respektivno.
- Parametri m_1 i m_2 su očekivanja za X i Y, a ξ_1^2 i ξ_2^2 su disperzije za X i Y.
- Parametar r jednak je koeficijentu korelacije za (X, Y).
- Ukoliko je $r = 0$ (tj. X i Y su nekorelirane), tada su slučajne promenljive X i Y nezavisne. □

4.5.1. Matematičko očekivanje i disperzija nekih slučajnih promenljivih neprekidnog tipa

4. Uniformna raspodela. $\mathcal{U}(a, b),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2},$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - (\frac{b+a}{2})^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - (\frac{b+a}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. Eksponencijalna raspodela. $\mathcal{E}(a),\ a > 0.$

$$E(X) = \int_0^\infty x a e^{-ax} dx \overset{ax=t}{=} \frac{1}{a^2} a \int_0^\infty t e^{-t} dt = \frac{1}{a}\Gamma(2) = \frac{1}{a}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^\infty x^2 a e^{-ax} dx - \frac{1}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\Gamma(3) - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

6. Normalna raspodela. $\mathcal{N}(m, \xi),\ m \in \mathbb{R},\ \xi > 0.$

Najpre ćemo naći matematičko očekivanje i disperziju za slučajnu promenljivu $X^* : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$E(X^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$D(X^*) = E(X^*)^2 - 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \overset{\frac{x^2}{2}=t}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2} \int\limits_{0}^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Slučajnu promenljivu X možemo dobiti iz X^* transformacijom $X = \xi X^* + m$. Pokazali smo u primeru 4.1.c. da X ima $\mathcal{N}(m, \xi)$ raspodelu. Tada je

$$E(X) = \xi E(X^*) + m = m,$$

$$D(X) = D(\xi X^* + m) = \xi^2 D(X^*) = \xi^2.$$

4.5.2. Uslovno matematičko očekivanje. Regresija

U odeljku 4.3.1 videli smo na koji način informacija o jednoj od slučajnih promenljivih u paru (X, Y) utiče na raspodelu druge slučajne promenljive. Ta veza je najviše uočljiva na uslovnim raspodelama. Za svaku od uslovnih raspodela možemo definisati matematičko očekivanje i to nazivamo uslovnim matematičkim očekivanjem.

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva neprekidnog tipa, tada uslovno matematičko očekivanje za X ako je $Y = y$ definišemo sa

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{X|Y=y}(x)dx = \frac{1}{\varphi_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{XY}(x, y)dx.$$

Funkciju $x = r_1(y) = E(X|Y = y)$ nazivamo **regresijom** X po Y.

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $\varphi_{X|Y=y}(x) = \varphi_X(x)$, što znači da je $E(X|Y = y) = E(X)$. Očito da je u tom slučaju grafik funkcije $x = r_1(y)$ prava paralelna sa y-osom.

Analogno definišemo uslovno matematičko očekivanje za Y ako je $X = x$

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{Y|X=x}(y)dy = \frac{1}{\varphi_X(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{XY}(x, y)dy.$$

Regresija Y po X je funkcija $y = r_2(x) = E(Y|X = x)$. Ako su X i Y nezavisne, onda je $E(Y|X = x) = E(Y)$ i $y = r_2(x)$ je paralelna sa x-osom.

Sličnim rezonovanjem kao u diskretnom slučaju, zaključujemo da je $E(E(Y|X)) = E(Y)$, gde je $E(Y|X)$ slučajna promenljiva jednaka $r_2(X)$.

Primer 4.5.a. Naći regresiju Y po X ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva iz primera 4.3.a. i 4.3.b.

Rešenje.

$$y = r(x) = E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{Y|X=x}(y)dy =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{-2x+2} \dfrac{y}{2-2x} dy = 1 - x & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases} .$$

Neka su X i Y dve slučajne promenljive, $D(X) \in \mathbb{R}$, i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada izraz $E(X - g(Y))^2$ ima minimalnu vrednost za $g(Y) = E(X|Y)$. Grubo govoreći, to znači da ako slučajnu promenljivu X treba aproksimirati nekom transformacijom slučajne promenljive Y, tada najmanju grešku pravimo ako je aproksimiramo uslovnim očekivanjem $E(X|Y)$. Na ovoj osobini se baziraju mnoge metode veoma široko primenjene regresione analize.

Slučajne promenljive su **linearno korelirane** ako su njihove regresije linearne funkcije (tj. prave). Jednačine regresionih pravih su

$$y = m_Y + \rho_{XY} \frac{d_Y}{d_X}(x - m_X),$$

$$x = m_X + \rho_{XY} \frac{d_X}{d_Y}(y - m_Y),$$

gde je $m_X = E(X)$, $m_Y = E(Y)$, $d_X = \sqrt{D(X)}$, $d_Y = \sqrt{D(Y)}$, a ρ_{XY} je koeficijent korelacije za X i Y.

Glava 5

Granične teoreme

Mnogi fundamentalni rezultati teorije verovatnoće formulisani su u vidu graničnih teorema. U ovom poglavlju bavićemo se dvema osnovnim grupama teorema: zakonima velikih brojeva i centralnim graničnim teoremama.

Zakoni velikih brojeva razmatraju razne forme konvergencije niza slučajnih promenljivih ka nekoj konstanti i u njima su dati uslovi pod kojima ukupno dejstvo slučajnih uticaja dovodi do rezultata koji skoro ne zavisi od slučaja. Tako, recimo, pri velikom broju ponavljanja bacanja kockice za igru „Ne ljuti se čoveče", pri čemu ishod pri svakom bacanju smatramo slučajnom promenljivom, jedinica pada u približno $n/6$ slučajeva, gde je n broj bacanja. Što je n veće, to je verovatnoća da je broj jedinica blizu $n/6$, veća.

Odeljak 5.2. posvećen je centralnim graničnim teoremama. One se bave problemom konvergencije niza funkcija raspodele ka normalnoj raspodeli, tj. daju odgovor pod kojim uslovima raspodela standardizovane sume dovoljno velikog broja slučajnih promenljivih teži $\mathcal{N}(0,1)$ raspodeli.

Granične teoreme su nezamenljiv instrument u sferi praktičnih primena verovatnoće. One daju teorijsku podlogu za mogućnost „predskazivanja" rezultata masovnih slučajnih pojava i nalaženja grešaka takvih statističkih procena.

Pre nego što pređemo na izlaganje graničnih teorema, dokazaćemo nejednakost Čebiševa.

Nejednakost Čebiševa. *Ako je X nenegativna slučajna promenljiva, $X(\omega) \geq 0$, $\omega \in \Omega$, za koju postoji $E(X^2)$, tada za svako $\epsilon > 0$ važi*

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\epsilon^2}.$$

Ova nejednakost se često javlja u sledećem obliku

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

i tada važi za sve X (X ne mora biti nenegativna slučajna promenljiva). *Dokaz.* Ako je X diskretnog tipa, imamo

$$\epsilon^2 P(X \geq \epsilon) = \epsilon^2 \sum_{i:x_i \geq \epsilon} p(x_i) = \sum_{i:x_i \geq \epsilon} \epsilon^2 p(x_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i:x_i \geq \epsilon} x_i^2 p(x_i) + \sum_{i:x_i < \epsilon} x_i^2 p(x_i) = \sum_i x_i^2 p(x_i) = E(X^2).$$

Ako je X neprekidnog tipa, tada

$$\epsilon^2 P(X \geq \epsilon) = \epsilon^2 \int_{x \geq \epsilon} \varphi_X(x) dx = \int_{x \geq \epsilon} \epsilon^2 \varphi_X(x) dx \leq$$

$$\leq \int_{x \geq \epsilon} x^2 \varphi_X(x) dx + \int_{x < \epsilon} x^2 \varphi_X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_X(x) dx = E(X^2).$$

□

Napomena. Ako uvedemo oznake $E(X) = m$, $D(X) = s^2$ i $\epsilon = \alpha s$, nejednakost Čebiševa ima oblik $P(|X - m| \geq \alpha s) \leq \frac{1}{\alpha^2}$. To se može zapisati sa

$$P(m - \alpha s \leq X \leq m + \alpha s) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Poslednja relacija pokazuje da, bez obzira na oblik raspodele, verovatnoća da X pripada intervalu $(m - \alpha s, m + \alpha s)$, jednaka je ili veća od $1 - \frac{1}{\alpha^2}$. Ukoliko je, recimo, $\alpha = 3$, sa verovatnoćom ne manjom od $\frac{8}{9} \approx 0.9$ slučajna promenljiva X "upada" u interval $(m - 3s, m + 3s)$.

5.1. Zakoni velikih brojeva

Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ niz slučajnih promenljivih. Formiraćemo nov niz slučajnih promenljivih $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$

$$\begin{aligned}
&Y_1 = X_1 - E(X_1) \\
&Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) - E\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right) \\
&\ldots \\
&Y_n = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - E\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r\right) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

S obzirom na osobine matematičkog očekivanja, očito da je

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} E(X_r), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zakoni velikih brojeva bave se pitanjem konvergencije niza Y_n ka 0. Mi ćemo u ovom odeljku razmatrati najjednostavniji aspekt ovog problema – slabe zakone velikih brojeva.

Bernulijev zakon velikih brojeva. *Ako su slučajne promenljive* X_r, $r = 1, 2, \ldots$ *nezavisne i sve imaju Bernulijevu raspodelu*

$$X_r : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, 0 < p < 1, \; q = 1 - p,$$

tada za ovaj niz važi slabi zakon velikih brojeva, tj. za svako $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - p\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Dokaz. Kako je

$$E(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} E(X_r) = \frac{np}{n} = p,$$

možemo primeniti nejednakost Čebiševa (poglavlje 6.)

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r\right)}{\epsilon^2} =$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{n} D(X_r)}{n^2\epsilon^2} = \frac{npq}{n^2\epsilon^2} \to 0, \text{ kad } n \to \infty.$$

□

Zakon velikih brojeva Hinčina. *Ako nezavisne slučajne promenljive* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *imaju istu raspodelu i konačno matematičko očekivanje* $E(X_r) = m$, $r = 1, 2, \ldots$, *tada za ovaj niz važi slabi zakon velikih brojeva, tj. za svako* $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - m\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Bernulijev zakon je specijalni slučaj Hinčinovog zakona.

Zakon velikih brojeva Čebiševa. *Ako su nezavisne slučajne promenljive* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *takve da postoji* $C > 0$ *tako da je* $D(X_r) \leq C, r = 1, 2, \ldots,$ *tada važi slabi zakon velikih brojeva, tj. za svako* $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} E(X_r)\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Dokaz. Koristeći nejednakost Čebiševa, dobijamo

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} E(X_r)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r)}{\epsilon^2} =$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{n} D(X_r)}{n^2\epsilon^2} \leq \frac{C}{n\epsilon^2} \to 0,$$

kad $n \to \infty$. $\square$

Primer 5.1.a. Dat je niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ koje imaju

1. istu $\mathcal{E}(a)$ raspodelu
2. X_n ima $\mathcal{E}(na)$ raspodelu, $n \in \mathbb{N}$.

Ispitati da li za niz $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ važi slabi zakon velikih brojeva.

Rešenje.
1. Kako je $E(X_r) = 1/a \in \mathbb{R}$, svi uslovi za Hinčinov zakon velikih brojeva su ispunjeni, te važi

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - \frac{1}{a}\right| > \epsilon\right) \to 0, \quad \text{kad } n \to \infty.$$

2. Kako je $D(X_r) = 1/(ra)^2 \leq 1/a^2$ za sve $r \in \mathbb{N}$, svi uslovi zakona velikih brojeva Čebiševa su ispunjeni, te važi

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r - \frac{1}{n}\frac{1}{a}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right| > \epsilon\right) \to 0, \quad \text{kad } n \to \infty.$$

$\square$

5.2. Centralne granične teoreme

Centralne granične teoreme spadaju u red najznačajnijih teorema u verovatnoći i matematičkoj statistici. Normalna raspodela je model ponašanja mnogih prirodnih fenomena, ali njen značaj je mnogo veći ako znamo da je ona granična forma mnogih raspodela. Upravo o tome govori ova grupa teorema.

Kao i u prethodnom odeljku, razmatramo niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Centralne granične teoreme daju uslove pod kojima raspodela standardizovane parcijalne sume niza konvergira ka normalnoj raspodeli $\mathcal{N}(0,1)$ tj. kada važi da za svako $x \in \mathbb{R}$, kad $n \to \infty$

$$P\left(\frac{\sum_{r=1}^n X_r - E(\sum_{r=1}^n X_r)}{\sqrt{D(\sum_{r=1}^n X_r)}} \leq x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ovu vrstu konvergencije nazivamo konvergencijom u zakonu raspodele.

Teorema 5.2.a. *Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom takvom da je $E(X_r) = a \in \mathbb{R}$, $D(X_r) = s^2 \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, $r = 1, 2, \ldots$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}$*

$$P\left(\frac{\sum_{r=1}^n X_r - na}{s\sqrt{n}} \leq x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \textit{kad } n \to \infty.$$

Specijalni slučaj prethodne teoreme je jedna od najčešće korišćenih teorema u teoriji verovatnoće i matematičke statistike – teorema Moavr-Laplasa:

Teorema 5.2.b. *Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih takvih da sve imaju Bernulijevu raspodelu*

$$X_r : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \ 0 < p < 1, \ q = 1 - p.$$

Tada za svako $x \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{\sum_{r=1}^n X_r - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ \textit{ kad } n \to \infty.$$

Bernulijeva raspodela zadovoljava uslove iz prethodne teoreme jer je $E(X_r) = p$, $D(X_r) = pq$. Kako slučajna promenljiva $Y = \sum_{r=1}^n X_r$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n,p)$ (primer 3.9.a), zaključujemo da standardizovana binomna raspodela može biti aproksimirana normalnom raspodelom. Može se pokazati da, ako Y ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n,p)$, pri dovoljno velikom n, važi približna jednakost

$$P(Y = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Podsetimo da ako slučajna promenljiva Y ima normalnu raspodelu, tada slučajna promenljiva $X = e^Y$ $(Y = lnX)$ ima lognormalnu raspodelu (pogledati odeljak 4.1.1 i primer 4.1.d). Korišćenjem te činjenice, dobijamo sledeći rezultat:

Ako je $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih takvih da je $P(X_i > 0) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots,$ tada proizvod $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ ima aproksimativno lognormalnu raspodelu.

Zaista, kako je $lnY_n = lnX_1 + lnX_2 + \cdots + lnX_n$, vidimo da je lnY_n suma nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom. Ako niz lnX_n, $n \in N$ zadovoljava uslove centralne granične teoreme, tada lnY_n ima aproksimativno normalnu raspodelu, što znači da Y_n ima aproksimativno lognormalnu raspodelu.

Navešćemo još jednu centralnu graničnu teoremu bez dokaza. Ona važi za niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje ne moraju imati istu raspodelu.

Teorema 5.2.c. *Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih takvih da je $E(X_r) = a_r \in \mathbb{R}$, $D(X_r) = s_r^2 \in \mathbb{R}$, za sve $r = 1, 2, \ldots$ i da je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\le r\le n} s_r^2}{\sum\limits_{r=1}^{n} s_r^2} = 0,$$

tada za svako $x \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{\sum_{r=1}^n X_r - \sum_{r=1}^n a_r}{\sqrt{\sum_{r=1}^n s_r^2}} \le x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

kad $n \to \infty$.

Primer 5.2.a. Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ su nezavisne i sve imaju istu, $\mathcal{E}(a)$, raspodelu. Ako je $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, primenom centralne granične teoreme naći raspodelu za $Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}$ kad $n \to \infty$.

Rešenje. Kako je $D(X_r) = 1/a^2 \in \mathbb{R}$ za sve $r \in \mathbb{N}$, na osnovu teoreme 5.2.a. znamo da

$$Y_n^* = \frac{\sum_{r=1}^n X_r - \sum_{r=1}^n E(X_r)}{\sqrt{\sum_{r=1}^n D(X_r)}}$$

teži normalnoj raspodeli $\mathcal{N}(0, 1)$, tj.

$$P(Y_n^* < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{za sve} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Glava 6

Slučajni procesi

Do sada smo se bavili slučajnom promenljivom - jednodimenzionalnom, dvodimenzionalnom, n-dimenzionalnom, $n \in \mathbb{N}$. U ovoj glavi uvodimo pojam slučajnog procesa. Navešćemo jednostavan primer koji ilustruje problematiku za čije rešavanje je nužno definisati pojam slučajnog procesa.

Pretpostavimo da treba formirati matematički model za slučajni sistem i njegovo ponašanje tokom nekog vremenskog intervala. Kao primer takvog sistema može da posluži, recimo, sistem od k sijalica od kojih svaka ima slučajnu dužinu rada. Kako vreme protiče, neke od njih će prestati da rade (pregoreće). U svakom momentu t, stanje sistema (broj ispravnih sijalica) će biti slučajna promenljiva X_t. Ona je diskretnog tipa sa skupom vrednosti $\{0, 1, \ldots, k\}$. Matematički model ovog sistema je beskonačna familija slučajnih promenljivih X_t, $t \in [0, T]$, tzv. slučajni proces.

Izučavanjem sličnih događanja, u kojima se neodređenost razvija kao proces, bavi se poseban deo teorije verovatnoće - teorija slučajnih procesa.

6.1. Osnovni pojmovi i karakteristike

Slučajni proces je familija slučajnih promenljivih X_t, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, definisanih na fiksiranom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Promenljiva t prolazi skupom $T \subseteq \mathbb{R}$ i obično je interpretiramo kao vreme.

Podsetimo da slučajna promenljiva preslikava Ω u $\mathbb{R}$, što znači da je slučajni proces X_t, $t \in T$, ustvari funkcija dve promenljive, $X_t(\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Ako fiksiramo t (tj. $t = t_0$), tada je $X_{t_0}(\omega)$ slučajna promenljiva koju nazivamo **zasekom** slučajnog procesa za $t = t_0$. S druge strane, ako je ω fiksirano (tj. $\omega = \omega_0$), tada je $X_t(\omega_0)$ realna funkcija realne promenljive koju nazivamo **realizacijom, trajektorijom** ili **uzoračkom funkcijom**. Skup svih realizacija slučajnog procesa nazivamo ansamblom. Ako su obe promenljive t i ω fiksirane ($t = t_0$, $\omega = \omega_0$), tada je $X_{t_0}(\omega_0)$ realan broj.

Isto kao i kod slučajnih promenljivih, uobičajeno je da se promenljiva ω izostavlja u zapisu, tj. umesto $X_t(\omega)$ pišemo X_t.

Skup T kojim prolazi realna promenljiva t nazivamo **indeksnim** ili **parametarskim skupom** procesa, a promenljivu t **indeksom** ili **parametrom**. Ukoliko je T diskretan beskonačan skup, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$, tada proces X_{t_k}, $k = 1, 2, \ldots$ nazivamo slučajnim nizom ili lancem. Ukoliko je T interval ili celo $\mathbb{R}$, tada X_t nazivamo slučajnim procesom sa neprekidnim parametrom ili kraće slučajnim procesom, a parametar t obično nazivamo vremenom.

Skup vrednosti (slika) S slučajnog procesa može da bude diskretan (konačan ili prebrojiv) ili neprekidan (interval ili celo $\mathbb{R}$). Skup S često nazivamo **skupom stanja** procesa ili sistema.

Primer 6.1.a. Posmatramo telefonsku centralu sa n linija u vremenskom intervalu $[0h, 24h]$. U svakom momentu t neka X_t označava broj zauzetih linija. X_t, $t \in [0, 24]$ predstavlja slučajni proces sa neprekidnim parametarskim skupom, $T = [0, 24]$ i diskretnim konačnim skupom stanja $S = \{0, 1, \ldots, n\}$. □

Primer 6.1.b. Svakog sata se meri nivo Dunava na mernoj rampi i dobijene vrednosti označavamo sa X_t. U ovom slučaju radi se o procesu sa diskretnim parametarskim skupom $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i neprekidnim skupom stanja S. □

Kako je slučajni proces familija (često neprebrojiva) slučajnih promenljivih, osnovno je pitanje kako karakterisati slučajni proces pomoću odgovarajućih raspodela verovatnoća. Opisaćemo pojednostavljeno rešenje ovog problema.

Za fiksirano t_1, X_{t_1} je slučajna promenljiva čija je funkcija raspodele

$$F_{X_{t_1}}(x_1) = P(X_{t_1} \leq x_1).$$

Ovu funkciju raspodele nazivamo **raspodelom prvog reda procesa** X_t. Ako su t_1 i t_2 fiksirani, tada je

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2)$$

raspodela drugog reda. Slično, za fiksirano $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dobijamo **raspodelu n-tog reda** slučajnog procesa $X_t, t \in T$.

$$F_{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Osobine realnog slučajnog procesa u potpunosti su određene njegovim raspodelama n-tog reda, $n \in \mathbb{N}$. Štaviše, procesi kojima ćemo se detaljnije baviti u ovoj knjizi u potpunosti su određeni svojim raspodelama prvog i drugog reda. Postoje procesi za koje parametarski skup nije skup realnih brojeva i koji nisu u potpunosti okarakterisani raspodelama n-tog reda. Oni nisu tema izučavanja ove knjige.

6.2. Osnovne karakteristike slučajnog procesa

Matematičko očekivanje, disperzija, kovarijansa, korelacija, momenti reda $p, p \in \mathbb{N}$, su brojne karakteristike koje pružaju veoma korisne informacije o osobinama i vezama slučajnih promenljivih. Analognu ulogu u teoriji slučajnih procesa igraju funkcije o kojima će biti reči u ovom odeljku.

Funkciju $m_X : T \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$\boxed{m_X(t) = E(X_t)\ , \quad t \in T\ ,}$$

nazivamo **matematičkim očekivanjem** ili **srednjom vrednošću slučajnog procesa** $X_t, t \in T$.

Disprezija procesa je funkcija

$$\boxed{D_X(t) = E\left((X_t - m_X(t))^2\right) = E(X_t^2) - m_X^2(t)\ .}$$

Funkciju $R_X : T \times T \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$\boxed{R_X(t,s) = E(X_t X_s)\ , \quad s, t \in T\ ,}$$

nazivamo **korelacionom funkcijom** procesa $X_t,\ t \in T$. Ona odražava meru zavisnosti slučajnih promenljivih (zaseka) u tačkama s i t i nosi informaciju da li se proces menja brzo ili sporo, tj. informaciju o frekventnom sadržaju procesa. Očigledno da je

$$\boxed{R_X(t,s) = R_X(s,t), \qquad R_X(t,t) = E(X_t^2).}$$

Za proces $X_t - m_X(t)$ kažemo da je **centriran**. **Kovarijansna funkcija** $K_X(t,s)$ je korelaciona funkcija centriranog procesa, tj.

$$\begin{aligned} K_X(t,s) &= E[(X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))] = \\ &= E(X_t X_s) - m_X(t) m_X(s) = \\ &= R_X(t,s) - m_X(t) m_X(s)\ . \end{aligned}$$

Ako je $t = s$ onda je $K_X(t,t) = D_X(t)$.

Pod standardizovanim procesom podrazumevamo proces

$$X_t^* = \frac{X_t - m_X(t)}{\sqrt{D_X(t)}},$$

a **koeficijent korelacije** c_X procesa X_t je korelaciona funkcija standardizovanih zaseka, tj.

$$c_X(t,s) = \frac{K_X(t,s)}{\sqrt{K_X(t,t)}\sqrt{K_X(s,s)}} \ .$$

Ako su data dva realna procesa X_t i Y_s nad istim parametarskim skupom T, tada definišemo **kroskorelacionu funkciju** $R_{X,Y}(t,s)$ ovih procesa sa

$$R_{X,Y}(t,s) = E(X_t Y_s)\ , \quad t,s \in T\ .$$

Analogno se definišu kroskovarijansna funkcija $K_{X,Y}$ i koeficijent korelacije $c_{X,Y}$ za procese X_t i Y_s.

Primer 6.2.a. Slučajni proces X_t je zadat sa

$$X_t = U + tV\ ,$$

gde su U i V nezavisne slučajne promenljive neprekidnog tipa sa gustinama $\varphi_U(u)$ i $\varphi_V(v)$. Naći raspodelu prvog reda $F_{X_t}(x)$ i osnovne karakteristike - matematičko očekivanje $m_X(t)$ i korelacionu funkciju $R_X(t,s)$.

Rešenje.

$$F_{X_t}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{X_t}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_V(v)\varphi_U(y-tv)\,dv\,dy\ ,$$

$$m_X(t) = E(U) + tE(V)\ ,$$

$$R_X(t,s) = E(X_t X_s) = E((U+tV)(U+sV)) =$$

$$= E(U^2) + (t+s)E(U)E(V) + tsE(V^2) \pm E^2(U) \pm tsE^2(V) =$$

$$= D(U) + stD(V) + (E(U)+tE(V))(E(U)+sE(V)) =$$

$$= D(U) + stD(V) + m_X(t)m_X(s)\ .$$

To znači da kovarijansnu funkciju $K_X(t,s)$ izračunavamo sa

$$K_X(t,s) = R_X(t,s) - m_X(t)m_X(s) = D(U) + stD(V)\ .$$

□

6.3. Neke klase slučajnih procesa

U ovom odeljku daćemo neke definicije i osnovna svojstva klasa slučajnih procesa koji se najčešće sreću u praksi. Neke od njih ćemo kasnije detaljno obraditi.

1. Nezavisni proces

Ako su slučajne promenljive $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ nezavisne za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, tada je proces X_t, $t \in T$, nezavisan proces sa nezavisnim vrednostima u svakoj tački. Kako je za nezavisne slučajne promenljive zajednička raspodela jednaka proizvodu marginalnih, imamo da je

$$F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_{t_1}}(x_1) \cdots F_{X_{t_n}}(x_n)\,,$$

što znači da je u ovom slučaju proces u potpunosti određen raspodelama prvog reda.

2. Proces sa nezavisnim priraštajima

Slučajni proces X_t, $t \in [0, \infty)$, je **proces sa nezavisnim priraštajima** ako za svaki izbor $0 < t_1 < t_2, \cdots < t_n$ iz $[0, \infty)$ važi da su

$$X_0,\ X_{t_1} - X_0,\ X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

nezavisne slučajne promenljive.

Ako je X_t proces sa nezavisnim priraštajima i ako za svako $t, s, a \in [0, \infty)$, $s < t$, važi da slučajne promenljive $X_t - X_s$ i $X_{t+a} - X_{s+a}$ imaju istu raspodelu, tada kažemo da je X_t **proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima**.

Procesi sa nezavisnim priraštajima su u potpunosti određeni raspodelama drugog reda.

Ukoliko je X_t proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima i $X_0 = 0$, tada je on u potpunosti određen raspodelama prvog reda. Tada je

$$m_X(t) = at, \quad D_X(t) = \sigma^2 t, \quad K_X(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\},$$

gde je $a = m_X(1)$, $\sigma^2 = D_X(1)$. U primeru 6.4.a. detaljno je opisan jedan od najvažnijih procesa ovog tipa - Poasonov proces..

3. Kompleksni proces

Kompleksni slučajni proces definisan je sa

$$\boxed{Z_t = X_t + iY_t\,,\ \ t \in T \subseteq \mathbb{R}}$$

gde su X_t, $t \in T$ i Y_t, $t \in T$, realni slučajni procesi. Disperzija i korelaciona funkcija definisane su sa

$$D_Z(t) = E|Z_t - E(Z_t)|^2 = D_X(t) + D_Y(t),$$

$$R_Z(t,s) = E(Z_t \overline{Z_s})\,.$$

Osobine korelacione funkcije su:

- $R_Z(t,s) = R_X(t,s) + R_Y(t,s) + i(R_{X,Y}(s,t) - R_{X,Y}(t,s))$,
- $R_Z(t,t) = E(X_t^2) + E(Y_t^2) \geq 0$,
- $R_Z(t,s) = \overline{R_Z(s,t)}$,
- $R_Z(t,s)$ je pozitivno definitna, što znači da je za svako $n \in \mathbb{N}$, svako $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ i svako $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_m} R_Z(t_k, t_m) \geq 0 \,.$$

Dokaz.
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_m} R_Z(t_k, t_m) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_m} E(Z_{t_k} \overline{Z_{t_m}}) =$$
$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k Z_{t_k} \sum_{m=1}^{n} \overline{\alpha_m Z_{t_m}} \right) = E\left(\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Z_{t_k} \right|^2 \right) \geq 0 \,.$$

U ovoj knjizi, ako drugačije ne naglasimo, **smatraćemo da je proces realan**.

4. Stacionarni procesi

Razlikujemo strogo stacionarne i slabo stacionarne procese.

Slučajni proces X_t , $t \in T$, je **strogo stacionaran** ako su sve njegove raspodele konačnog reda invarijantne u odnosu na translaciju vremena. To znači da procesi X_t i X_{t+c} imaju iste raspodele za svako $c > 0$. Drugačije rečeno, za svako $n \in \mathbb{N}$, svaki moguć izbor $t_1, \ldots, t_n \in T$ i svako $c \in \mathbb{R}$ za koje $t_1 + c, \ldots, t_n + c \in T$, n-dimenzionalne slučajne promenljive $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c})$ imaju iste funkcje raspodele, tj.:
$$F_{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c}}(x_1, \ldots, x_n) \,,$$
za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Prema tome, raspodele prvog reda su jednake $F_1(x)$ za sve $t \in T$ (ne zavise od t)
$$F_{X_t}(x) = F_{X_{t+c}}(x) = F_1(x) \,,$$
što znači da očekivanje $E(X_t)$ ne zavisi od t, te je jednako konstanti m,
$$E(X_t) = m.$$

Raspodele drugog reda zavise od razlike argumenata s i t, tj. za sve $s,t \in T$

$$F_{X_t,X_s}(x_1,x_2) = F_{X_{t-s},X_0}(x_1,x_2),$$

što znači da korelaciona funkcija

$$R_X(t,s) = r_X(\tau)\,,\quad \tau = t-s$$

zavisi od razlike argumenata $\tau = t-s$. S obzirom da je $R_X(t,s) = R_X(s,t)$, to je $r_X(\tau) = r_X(-\tau)$.

Slučajni proces $X_t, t \in T$ je **slabo stacionaran** ako je

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X_t) = m\,, \\ R_X(t,s) = r_X(t-s) = r_X(\tau)\,, \end{array}}$$

tj. ako je očekivanje konstantno a korelaciona funkcija $R_X(t,s)$ je funkcija jedne promenljive $\tau = t-s$.

5. Procesi Markova

Slučajni proces $X_t\,,\ t \in T$ je **proces Markova** sa diskretnim skupom stanja S ako za svako $n \in \{2,3,\ldots\}$ i svaki izbor $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ iz T i sve $x_1,x_2,\ldots,x_n \in S$

$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1},\ldots,X_{t_1} = x_1) =$$
$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1})\,.$$

Poslednjom relacijom je izraženo tzv. svojstvo Markova koje ustvari znači da ako su poznate „prošlost" (tj. X_{t_1}, X_{t_2}, ..., $X_{t_{n-2}}$) i „sadašnjost" (tj. $X_{t_{n-1}}$), onda „budućnost" (tj. X_{t_n}) zavisi samo od „sadašnjosti" a ne od „prošlosti". Ovakve sisteme nazivamo stohastičkim sistemima bez memorije.

Svaki proces sa nezavisnim priraštajima je proces Markova.

Proces Markova je u potpunosti određen raspodelama drugog reda.

6. Gausov (Normalan) proces

Proces X_t sa parametarskim skupom $T \subseteq \mathbb{R}$ i skupom stanja $S = \mathbb{R}$, nazivamo Gausovim ili normalnim procesom ako za bilo koji izbor tačaka $t_1,t_2,\cdots,t_n$ iz T, $(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$ ima normalnu n-dimenzionalnu raspodelu (primer 4.5.a), čija je karakteristična funkcija

$$k(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) = e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j m(t_j) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}K(t_j,t_l)\omega_j\omega_l}\,,\quad (\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) \in \mathbb{R}^n,$$

gde je $m(t) = E(X_t)$, a $K(t, s)$ je kovarijansna funkcija.

Očigledno, Gausov proces u potpunosti je određen ako su poznati očekivanje procesa $m(t)$ i kovarijansna funkcija $K(t, s)$. To dalje znači da je svaki slabo stacionaran Gausov proces ujedno i strogo stacionaran.

7. Ergodični proces

Centralno pitanje u teoriji slučajnih procesa je ocena njegovih karakteristika, pre svega očekivanja $m_X(t) = E(X_t)$ i korelacione funkcije $R_X(t, s) = E(X_t X_s)$.

Teorija ergodičnosti daje osnovu za nalaženje jednostavnih ocena u nekim specijalnim slučajevima. Objasnićemo u grubim crtama šta znači osobina ergodičnosti za slučajni proces.

Ako jedan dinar bacamo veliki broj puta, na osnovu intuicije znamo da će rezultati takvog opita biti isti kao da smo u isto vreme bacili veliki broj dinara. Slično, iste rezultate očekujemo bilo da više puta ponavljamo merenje napona jednog izvora šuma ili da istovremeno merimo napon više nezavisnih identičnih izvora šuma. Matematička artikulacija takve karakteristike slučajnog procesa sadržana je u definiciji ergodičnosti slučajnog procesa.

Neka je dat slučajni proces X_t , $t \in [0, \infty)$ i neka je $X_t(\omega_0) = x_t$, $\omega_0 \in \Omega$, realizacija tog procesa (podsetimo da je realizacija $X_t(\omega_0)$ realna funkcija realne promenljive). **Srednja vrednost po vremenu** je definisana sa

$$\overline{m} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_0^A x_t \, dt \, .$$

Kako je $m_X(t)$ funkcija koja zavisi od t, očigledno da $\overline{m}$ (broj) ne može da nam posluži kao ocena očekivanja $m_X(t)$. Međutim, u slučaju kada je očekivanje $m_X(t)$ konstantno, $m_X(t) = m, t \in [0, \infty)$, postavlja se pitanje pod kojim uslovima je $m = \overline{m}$. Za slučajni proces X_t , $t \in [0, \infty)$, kažemo da je **ergodičan po matematičkom očekivanju** ako je $m_X(t) = \overline{m}$. Kako je kod stacionarnih procesa očekivanje $m_X(t)$ konstantno, dovoljne su relativno slabe dodatne pretpostavke o procesu da bi on bio ergodičan i stoga je izučavanje ergodičnosti obično vezano za stacionarne procese. Stacionaran proces takođe može biti ergodičan po korelacionoj funkciji ako je za $\tau = t - s$

$$R_X(t, s) = r_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x_t x_{t+\tau} \, dt \, .$$

Mogu se definisati i druge vrste ergodičnosti o čemu neće biti govora u ovoj knjizi.

6.4. Neki primeri slučajnih procesa

Primer 6.4.a. Poasonov proces (parametar $\lambda > 0$)

X_t , $t \in [0, \infty)$ je slučajni proces sa vrednostima u skupu $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $X_0 = 0$, X_t ima stacionarne nezavisne priraštaje i za svako $s, t > 0$

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

Poslednji uslov znači da za svako $s, t \in [0, \infty)$, slučajna promenljiva $X_{s+t} - X_s$ ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda t)$ raspodelu.

Matematičko očekivanje $E(X_t)$ je jednako λt. Zaista,

$$E(X_t) = E(X_t - X_0) \ ,$$

te kako slučajna promenljiva $X_t - X_0$ ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda t)$, njeno očekivanje je λt (odeljak 2.6). Disperzija za X_t je $D(X_t) = \lambda t$.

Korelacionu funkciju $R(t, s)$ nalazimo za $s > t > 0$

$$\begin{aligned} R(t, s) \quad &= E(X_t X_s) = E(X_t(X_t + (X_s - X_t))) = \\ &= E(X_t^2) + E(X_t)E(X_s - X_t) = \\ &= \lambda^2 t^2 + \lambda t + \lambda t \lambda (s - t) = \lambda t + \lambda^2 ts = \\ &= \lambda \min\{s, t\} + \lambda^2 ts, \end{aligned}$$

dok je kovarijansna funkcija $K(s, t) = \lambda \min\{s, t\}$.

Važna osobina ovog procesa je da, ako $\Delta t \to 0$, tada

$$\begin{aligned} &P(X_{t+\Delta t} - X_t = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\ &P(X_{t+\Delta t} - X_t = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\ &P(X_{t+\Delta t} - X_t = k) = o(\Delta t) \ , \ \text{ za sve } \ k \geq 2 \ , \end{aligned} \tag{6.2}$$

gde $o(\Delta t)$ predstavlja beskonačno malu veličinu u odnosu na Δt (tj. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$).

Šta ustvari znači ova poslednja osobina? Ako proces X_t shvatimo kao broj nekih „događaja” u intervalu $[0, t]$ (recimo broj kupaca koji uđu u prodavnicu), onda je $X_{t+\Delta t} - X_t$ broj događaja (novih kupaca) u intervalu $[t, t+\Delta t]$. Poslednja osobina znači da ako dužina intervala Δt teži ka 0, tada je verovatnoća da će biti više od jednog događaja (kupaca) beskonačno mala veličina u odnosu na Δt. Dalje, verovatnoća da će se realizovati jedan događaj je beskonačno mala veličina istog reda kao Δt, dok je verovatnoća da novih događaja (kupaca) neće biti, veličina bliska $1 - \lambda \Delta t$.

Gore opisane relacije (6.2) slede iz prirode procesa, tj. iz osobine (6.1). Naime, ako primenimo razvoj u Maklorenov red funkcije $e^{-\lambda\Delta t}$,

$$e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!} - \frac{(\lambda\Delta t)^3}{3!} \cdots = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\ ,$$

imamo

$$\begin{aligned}
P(X_{t+\Delta t} - X_t = 0) &= \tfrac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t),\\
P(X_{t+\Delta t} - X_t = 1) &= \tfrac{(\lambda\Delta t)^1}{1!} e^{-\lambda\Delta t} =\\
&= \lambda\Delta t(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) = \lambda\Delta t + o(\Delta t),\\
P(X_{t+\Delta t} - X_t = n) &= \tfrac{(\lambda\Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda\Delta t} =\\
&= \tfrac{(\lambda\Delta t)^n}{n!}(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) = o(\Delta t)\ ,
\end{aligned}$$

za sve $n \geq 2$.

Pokazaćemo da iz (6.2) sledi (6.1), što će značiti da je osobina (6.1) ekvivalentna osobini (6.2). Posmatraćemo interval $(s, s+t)$ dužine t. Pokazaćemo da, ako je zadovoljen uslov (6.2) za proces X_t sa stacinarnim nezavisnim priraštajima i ako je $X_0 = 0$, onda je

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

tj. X_t je Poasonov proces.

Podelićemo interval $(s, s+t)$ na n jednakih delova i neka je $\Delta t = \frac{t}{n}$. Kad n raste, Δt postaje veoma malo, te možemo primeniti osobinu (6.2) koja isključuje mogućnost da se u malom intervalu Δt realizuje više od jednog događaja. To znači da u svakom delu dužine Δt može biti 1 ili 0 realizacija događaja. Verovatnoća da će u celom intervalu dužine $t = n\Delta t$ biti k realizacija događaja je (isto kao kod binomne raspodele za k pozitivnih realizacija u n opita) jednaka

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} .$$

Ako poslednji izraz transformišemo isto kao u dokazu teoreme 3.1.a, kad $n \to \infty$, dobijamo

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

što je i trebalo pokazati. □

Primer 6.4.b. Neka je X_t Poasonov proces i neka slučajna promenljiva T_n predstavlja dužinu intervala između realizacije $(n-1)$-og i n-tog događaja (ako se radi o procesu koji predstavlja broj kupaca koji su ušli u prodavnicu, onda je T_n vreme koje protekne između ulaska $(n-1)$-og i n-tog kupca). Pokazaćemo da T_n ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu.

Rešenje. $F_{T_1}(t) = P(T_1 \le t) = 1 - P(t_1 > t)$. Događaj $T_1 \ge t$ znači da se prvi događaj nije realizovao do momenta t, tj. da je $X_t = 0$. Kako je

$$P(X_t = 0) = P(X_t - X_0 = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t}\,,$$

to je

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,,\ \ t > 0\,,$$

što znači da T_1 ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu.

Ako je $n > 1$, tada

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P(T_n \le t) = 1 - P(T_n > t) = \\ &= 1 - \int\limits_0^\infty P(T_n > t | T_{n-1} = s)\varphi_{T_{n-1}}(s)\,ds = \\ &= 1 - e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty \varphi_{T_{n-1}}(s)\,ds = 1 - e^{-\lambda t}\,,\ \ t > 0\,, \end{aligned}$$

što znači da T_n ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Primer 6.4.c. (**Slučajne harmonijske oscilacije**) slučajni proces $X_t = A\cos(\omega t + B)$ naziva se **slučajnim harmonijskim oscilacijama**, ako je ω neslučajna ciklična frekvencija, $A > 0$ je slučajna amplituda sa gustinom $\varphi_A(a)$, $a > 0$, B je slučajna oscilacija sa uniformnom raspodelom $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$, A i B su nezavisne slučajne promenljive.

1. Ispitati slabu stacionarnost.
2. Ispitati ergodičnost po matematičkom očekivanju.

Rešenje. 1. Kako je

$$E(\cos(\omega t + B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + x)\varphi_B(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + x)\,dx = 0,$$

iz nezavisnosti A i B, sledi da je $E(X_t) = E(A)E(\cos(\omega t + B)) = 0$. Dalje,

$$R_X(s,t) = E(A\cos(\omega t + B)A\cos(\omega s + B)) =$$

$$E\left(A^2\frac{1}{2}(\cos(\omega(t+s) + 2B) + \cos\omega(t-s))\right) = \frac{1}{2}E(A^2)\cos\omega(t-s),$$

jer je

$$E(\cos(\omega(t+s)+2B)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega(t+s)+2x)\,dx = 0.$$

Kako je $E(X_t) = 0$,

$$R_X(t,s) = \frac{1}{2}E(A^2)\cos\omega(s-t) = r_X(\tau)\ ,\quad \tau = t-s\ ,$$

što znači da je X_t slabo stacionaran proces.

2. Neka je $x_t = a_0\cos(\omega t + b_0)$, $a_0 > 0$, $b_0 \in [-\pi,\pi]$, jedna realizacija slučajnog procesa X_t. Kako je

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a_0\cos(\omega t+b_0)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{a_0}{\omega T}(\sin(\omega T+b_0)-\sin b_0) = 0 = m_X(t)\ ,$$

ovaj proces je ergodičan po matematičkom očekivanju. □

Primer 6.4.d. Neka su A i B zadati isto kao u prethodnom primeru i neka je

$$Z_t = e^{i(At+B)}\ .$$

Naći $m_Z(t)$ i $R_Z(t,s)$. Ispitiati slabu stacionarnost.

Rešenje.

$$E(Z_t) = E\left(e^{i(At+B)}\right) = E(\cos(At+B)) + iE(\sin(At+B)).$$

Dalje, imamo

$$E(\cos(At+B)) = E(E(\cos(At+B)|A)),$$
$$E(E(\cos(At+B)|A=a)) = E(\cos(at+B)) =$$
$$= \cos at E(\cos B) - \sin at E(\sin B)\ .$$

Isto kao u prethodnom primeru $E(\cos B) = E(\sin B) = 0$, te je $E(\cos(At+B)) = 0$. Analogno dobijamo da je $E(\sin(At+B)) = 0$, što znači da

$$m_Z = E(Z_t) = 0\ .$$

korelacionu funkciju nalazimo na sledeći način

$$\begin{aligned} R_Z(t,s) &= E(Z_t\overline{Z_s}) = E\left(e^{i(At+B)}e^{-i(As+B)}\right) = \\ &= E\left(e^{iA(t-s)}\right) = E\left(e^{i\tau A}\right) = k_A(\tau)\ ,\quad \tau = t-s\ , \end{aligned}$$

gde je k_A karakteristična funkcija raspodele slučajne promenljive A. Očigledno, proces je slabo stacionaran. □

Primer 6.4.e. (Telegrafski signal)

Neka je X_t slučajni proces čiji je skup vrednosti $\{1,-1\}$. Definišemo ga pomoću Poasonovog procesa Y_t , $t \in [0,\infty)$ i to

$$X_t = \begin{cases} 1, & Y_t = 2k \\ -1, & Y_t = 2k+1\,, \quad k = 0,1,2,\dots\,, \quad t \in [0,\infty)\,. \end{cases}$$

Tada je

$$P(X_t = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_t = 2k) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda t} \cosh \lambda t\,,$$

$$P(X_t = -1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_t = 2k+1) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda t} \sinh \lambda t.$$

Očekivanje ovog procesa je

$$m_X = 1 \cdot P(X_t = 1) + (-1) \cdot P(X_t = -1) = e^{-\lambda t}(\cosh \lambda t - \sinh \lambda t) = e^{-2\lambda t}\,.$$

Za nalaženje korelacione funkcije, potrebne su verovatnoće $P(X_t = i, X_s = j)$, $i,j \in \{-1,1\}$. Izračunavamo ih na sledeći način: za $i=1$, $j=1$, $s>t$, imamo

$$\begin{aligned} P(X_t = 1, X_s = 1) &= P(X_s = 1 | X_t = 1) \cdot P(X_t = 1) = \\ &= P(Y_{s-t} \text{ je parno }) \cdot P(Y_t \text{ je parno }) = \\ &= e^{-\lambda(s-t)} \cosh \lambda(s-t) e^{-\lambda t} \cosh \lambda t\,. \end{aligned}$$

Analogno izračunavamo verovatnoće: $P(X_t = 1, X_s = -1)$, $P(X_t = -1, X_s = 1)$ i $P(X_t = -1, X_s = -1)$, $s>t$ i kako je $X_t X_s$ jednako 1 ili -1,

$$R_X(t,s) = E(X_t X_s) = e^{-2\lambda|t-s|}\,.$$

Gore opisan proces naziva se poluslučajnim telegrafskim signalom jer je $X_0 = 1$, tj. u početnom momentu $t=0$ imamo konstantnu (a ne slučajnu) veličinu.. Neka je $V_t = vX_t$ slučajni proces, gde je v slučajna promenljiva koja sa istom verovatnoćom dobija vrednost 1 ili -1, tj.

$$v : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

i nezavisna je od X_t. Proces V_t nazivamo **slučajnim telegrafskim signalom**. Kako je $E(v) = 0$, $E(v^2) = D(v^2) = 1$, sledi da je

$$\begin{aligned} E(V_t) &= E(v)E(X_t) = 0, \\ R_V(t,s) &= E(V_t V_s) = E(vX_t vX_s) = \\ &= E(v^2)E(X_t X_s) = e^{-2\lambda|t-s|}\,. \end{aligned}$$

Vidimo da je proces V_t slabo stacionaran jer je $E(V_t) = 0 = const$, $R_V(t,s) = e^{-2\lambda|t-s|} = r_V(t-s) = r_V(\tau)$, gde je $\tau = t - s$. $\square$

Primer 6.4.f. (**Beli šum**) Proces V_t je **beli šum** ako su za svaki par $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $t \neq s$, slučajne promenljive V_t i V_s nekorelirane, tj. $K(t,s) = 0$ za $t \neq s$. Disperzija Belog šuma jednaka je ∞. Uobičajena je pretpostavka u slučaju belog šuma da je očekivanje $m_V(t)$ jednako nuli. Tada je $R(t,s) = K(t,s) = 0$ za sve $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $t \neq s$. Korelaciona funkcija belog šuma je $R(t,s) = g(t)\delta(t-s)$, gde je $\delta(t-s)$ Dirakova δ funkcija*. $\square$

Primer 6.4.f. (**Vinerov proces**) X_t , $t \in [0,\infty)$ je slučajni proces sa vrednostima u skupu $(-\infty,\infty)$, $X_0 = 0$, X_t ima stacionarne nezavisne priraštaje i za svako $s,t > 0$, slučajna promenljiva $X_t - X_s$ ima Normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{|t-s|}$. Karakteristike ovog procesa su: $E(X_t) = 0$, $D(X_t) = \sigma^2 t$, $K(t,s) = R(t,s) = \sigma^2 \min\{t,s\}$. $\square$

6.5. Homogeni procesi Markova

Neka je X_t, $t \in T$, slučajni proces Markova (odeljak 6.3) i neka je S skup vrednosti (slika) slučajnog procesa. Kako se procesi Markova najviše primenjuju pri ispitivanju raznih fizičkih ili tehničkih sistema, uobičajeno je sam proces X_t interpretirati kao stanje sistema u vremenu $t \in T$. Tako, recimo, broj slobodnih linija telefonske centrale sa n priključaka jeste slučajni proces i u svakom momentu t, sistem (centrala) X_t se nalazi u nekom od stanja $\{0,1,\ldots,n\}$. U opštem slučaju skupovi T i S su podskupovi $\mathbb{R}$, ali, u ovoj knjizi, bavićemo se slučajem kad je S konačan skup i kad je T diskretan skup ili interval $[0,\infty)$.

Neka je $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Elemente s_i, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, nazivamo stanjima sistema X_t.

Skup T interpretiramo kao skup momenata u kojima je sistem X_t posmatran. Ako je T diskretan skup, $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, ne gubi se na opštosti ako pišemo $T = \{0,1,\ldots,n,\ldots\}$. Slučajni proces X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, tada nazivamo **slučajnim nizom** ili **lancem**. Ukoliko je $T = [0,\infty)$ (što znači da sistem X_t posmatramo u neprekidnom vremenu), tada imamo slučajni proces sa neprekidnim vremenom ili kraće slučajni proces.

Za procese Markova posebno su značajne tzv. verovatnoće prelaza

$$p_{ij}(t_0 + t, t_0) = P(X_{t_0+t} = s_j \mid X_{t_0} = s_i),\ i,j \in \{1,2,\ldots,m\},$$

tj. verovatnoće da će sistem iz stanja s_i u momentu t_0 preći u stanje s_j u momentu $t_0 + t$.

*$\delta(\tau)$ je Dirakova δ funkcija ako je $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\phi(\tau)\,d\tau = \phi(0)$, gde je $\phi(\tau)$ bilo koja funkcija neprekidna u tački $\tau = 0$.

Kažemo da je proces Markova **homogen** ako verovatnoće prelaza ne zavise od početnog momenta t_0, nego zavise samo od razlike argumenata $(t_0+t)-t_0 = t$. Ovaj uslov podseća na uslov slabe stacionarnosti, međutim, videćemo (primer 6.8.a) da je slabiji od njega, što znači da stacionaran proces Markova jeste homogen, ali homogen proces Markova ne mora biti stacionaran. **U ovom poglavlju razmatraćemo samo homogene procese Markova i to nećemo svaki put naglašavati**.

6.5.1. Homogeni lanci Markova

Razmotrićemo prvo slučaj homogenog procesa Markova kada je skup momenata u kojima posmatramo stanje sistema, diskretan skup. Takav proces nazivamo **homogenim lancem Markova**.

Lanac Markova $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ je niz slučajnih promenljivih $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ čiji je skup vrednosti (stanja) konačan, tj. $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Osobina Markova se u ovom slučaju iskazuje sa : za sve prirodne brojeve $k_0 < k_1 < \ldots < k < n$ i sve $s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_i, s_j \in S$, važi

$$P(X_n = s_j \mid X_{k_0} = s_{i_0}, X_{k_1} = s_{i_1}, \ldots, X_k = s_i) =$$

$$= P(X_n = s_j \mid X_k = s_i).$$

U momentu n sistem X_n može biti u nekom od stanja s_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ sa verovatnoćom $P(X_n = s_i) = p_i(n)$. Verovatnoće $p_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, m\}, n \in \mathbb{N}_0$ nazivamo **verovatnoćama stanja** sistema X_n u momentu n i često ih zapisujemo u matričnom obliku

$$\mathbf{p}(n) = [p_1(n)\ p_2(n) \ldots p_m(n)],\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je fiksiran momenat n, stanje sistema X_n predstavlja slučajnu promenljivu diskretnog tipa sa zakonom raspodele

$$X_n : \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ p_1(n) & p_2(n) & \ldots & p_m(n) \end{pmatrix}.$$

Niz vrsta-matrica $\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \ldots, \mathbf{p}(n) \ldots$ predstavlja raspodele prvog reda lanca $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$.

Naredni važan element u definisanju lanca Markova su verovatnoće prelaza $p_{ij}(n),\ i, j \in \{1, 2, \ldots, m\},\ n \in \mathbb{N}_0$. Naime, kako razmatramo samo homogene lance, za sve $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$p_{ij}(n) = P(X_{k+n} = s_j \mid X_k = s_i) = P(X_n = s_j \mid X_0 = s_i).$$

Verovatnoće $p_{ij}(n)$ nazivamo **verovatnoćama prelaza** iz stanja s_i u stanje s_j za n koraka. Obično ih zapisujemo u obliku kvadratne matrice

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \dots & p_{1m}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \dots & p_{2m}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1}(n) & p_{m2}(n) & \dots & p_{mm}(n) \end{bmatrix} = [p_{ij}(n)]_{m\times m}.$$

i tu matricu nazivamo **matricom prelaza za n koraka**.

Raspodele drugog reda određene su verovatnoćama stanja (raspodelama prvog reda) i verovatnoćama prelaza. Zaista, kako se radi o slučajnom nizu (tj. svaki zasek je slučajna promenljiva diskretnog tipa), to će raspodele drugog reda biti određene zakonima raspodele dvodimenzionalnih zaseka X_n i $X_k,\ n,k \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$P(X_n = s_j, X_k = s_i) = P(X_n = s_j \mid X_k = s_i)P(X_k = s_i) =$$

$$= p_{ij}(n-k)p_i(k)$$

za svako $i,j \in \{1,2,\dots,m\},\ n,k \in \mathbb{N}_0,\ n > k$, te vidimo da se zajednička raspodela za X_n i X_k dobija množenjem verovatnoća prelaza verovatnoćama stanja.

Analogno se pokazuje da se raspodele trećeg i višeg reda dobijaju množenjem odgovarajućih verovatnoća prelaza i verovatnoća stanja.

Na kraju zaključujemo da je homogen lanac Markova $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, u potpunosti određen

- verovatnoćama stanja $p_i(n),\ \ i \in \{1,\dots,m\},\ n \in \mathbb{N}_0$ i

- verovatnoćama prelaza $p_{ij}(n),\ \ i,j \in \{1,\dots,m\},\qquad n \in \mathbb{N}_0.$

Dalje ćemo pokazati, u tri koraka, da je dovoljno poznavati verovatnoće stanja u početnom momentu 0, tj. $\mathbf{p}(0) = [p_1(0)\dots,p_m(0)]$ i verovatnoće prelaza za jedan korak, tj. $\mathbf{P}(1) = [p_{ij}(1)]_{m\times m}$ i da one u potpunosti određuju sve ostale karakteristike homogenog lanca Markova.

Korak 1. Za svako $i,j \in \{1,2,\dots,m\}$ i svako $n,k \in \mathbb{N}_0$ važi

$$p_{ij}(n+k) = \sum_{r=1}^{m} p_{ir}(n)p_{rj}(k).$$

Poslednja jednakost zapisana u matričnom obliku glasi

$$\boxed{\mathbf{P}(n+k) = \mathbf{P}(n)\mathbf{P}(k).}$$

Ovu relaciju, koja važi za verovatnoće prelaza, nazivamo **jednačinama Čepman-Kolmogorova**.

Dokaz. Primenom uopštene formule totalne verovatnoće (teorema 1.6.b) i osobine Markova, imamo

$$p_{ij}(n+k) = P(X_{n+k} = s_j \mid X_0 = s_i) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} P(X_{n+k} = s_j \mid X_n = s_r, X_0 = s_i) P(X_n = s_r \mid X_0 = s_i) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} P(X_{n+k} = s_j \mid X_n = s_r) P(X_n = s_r \mid X_0 = s_i) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} p_{ir}(n) p_{rj}(k).$$

□

Korak 2. Za svako $n \in \mathbb{N}_0$ važi $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n(1)$.

Matricu prelaza $\mathbf{P}(1)$ za jedan korak obeležavaćemo ubuduće sa $\mathbf{P}$ i nazivaćemo je kraće **matricom prelaza**, a njene elemente - **verovatnoćama prelaza** i označavaćemo ih sa p_{ij}. Poslednju jednakost, dakle, zapisujemo sa

$$\boxed{\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}_0.}$$

Dokaz. Na osnovu Koraaka 1. je

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n-1)\mathbf{P} = \mathbf{P}(n-2)\mathbf{P}^2 = \ldots = \mathbf{P}^n$$

i $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I} = \mathbf{P}^0$, gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica. □

Korak 3. Za svako $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i svako $n, k \in \mathbb{N}_0$ je

$$p_j(n+k) = \sum_{r=1}^{m} p_r(n) p_{rj}(k),$$

ili u matričnom obliku

$$\boxed{\mathbf{p}(n+k) = \mathbf{p}(n)\mathbf{P}(k).} \tag{6.3}$$

Dokaz. Primenom formule totalne verovatnoće (teorema 1.6.a) imamo

$$p_j(n+k) = P(X_{n+k} = s_j) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} P(X_{n+k} = s_j \mid X_n = s_r) P(X_n = s_r) = \sum_{r=1}^{m} p_r(n) p_{rj}(k).$$

$\square$

Za obeležavanje verovatnoća stanja u momentu 0 (početnom momentu) umesto oznake $\mathbf{p}(0) = [p_1(0)\ p_2(0) \ldots p_m(0)]$ koristimo kraću oznaku

$$\mathbf{p} = [p_1\ p_2 \ldots p_m]$$

i nazivamo ih **početnim verovatnoćama**.

Ako u relaciji (6.3) stavimo $n = 0$, dobijamo

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(k) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^k,$$

tj.

$$\boxed{\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}\mathbf{P}^k.}$$

Sada konačno možemo zaključiti sledeće:

> Homogen lanac Markova X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, u potpunosti je određen ako su poznati njegova
> - matrica prelaza $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{m \times m}$ i
> - početne verovatnoće $\mathbf{p} = [p_1\ p_2 \ldots p_m]$.

Iz tih elemenata, na osnovu gore izloženog, možemo izračunati verovatnoće stanja u svakom momentu k, verovatnoće prelaza za svaki korak n, što, dalje, u potpunosti određuje sve raspodele procesa.

Ako je $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, homogen lanac Markova je **stacionaran**. Očigledno, radi se o strogoj stacionarnosti jer su verovatnoće prelaza neosetljive na translaciju vremena (zbog homogenosti lanca), te ako su i verovatnoće stanja nezavisne od vremena, sledi da su sve raspodele neosetljive na translaciju vremena. Proces će biti stacionaran ako važi

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{P}, \quad \text{tj.} \quad p_i = \sum_{r=1}^{m} p_r p_{ri}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

U sledećem primeru navodimo jedan homogen lanac Markova koji u zavisnosti od izbora početnih verovatnoća ima osobinu stacionarnosti ili je nema.

Primer 6.8.a. Dete svakog jutra za doručak pije ili mleko ili čaj. Ako je jednog dana pilo čaj, sledećeg dana sa istom verovatnoćom pije čaj ili mleko, a ako je jednog dana pilo mleko, onda sledećeg dana sigurno pije čaj. Naći matricu prelaza. Ispitati stacionarnost ovog procesa ako je početna verovatnoća

1. $\mathbf{p} = [\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}]$, 2. $\mathbf{p} = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$,

gde je s_1-dete pije čaj, s_2-dete pije mleko.

Rešenje. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Da bismo ispitali stacionarnost, rešićemo jednačinu $\mathbf{p} = \mathbf{pP}$, tj.

$$[x\ \ 1-x] = [x\ \ 1-x] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje je $x = \frac{2}{3}$.

1. Ako su početne verovatnoće $\mathbf{p} = [\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}]$, tada je

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{pP}^n = \mathbf{pPP}^{n-1} = \ldots = \mathbf{pP} = \mathbf{p},$$

što znači da je proces stacionaran.

2. Za $\mathbf{p} = [\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}]$, proces nije stacionaran jer je $[\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}]$ jedino rešenje jednačine $\mathbf{p} = \mathbf{pP}$ $\square$.

Klasifikacija stanja lanaca Markova

- **Dostižno stanje.** Stanje s_j je dostižno iz stanja s_i ako za neko $n \in \mathbb{N}_0$, $p_{ij}(n) > 0$ i to zapisujemo sa $s_i \to s_j$. Ako je $s_i \to s_j$ i $s_j \to s_i$, kažemo da su s_i i s_j **međusobno dostižna** stanja i to zapisujemo sa $s_i \leftrightarrow s_j$. Relacija $\leftrightarrow$ je relacija ekvivalencije i deli skup stanja S na disjunktne klase ekvivalencije.

- **Apsorbujuće stanje.** Stanje s_i je **apsorbujuće** ako je $p_{ii} = 1$. Ako sistem uđe u apsorbujuće stanje, nikad ne izlazi iz njega.

- **Povratno i nepovratno stanje.** Označimo sa $q_{ij}(n)$ verovatnoću da lanac Markova iz stanja s_i kraz tačno n koraka prvi put dođe u stanje s_j. $Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} q_{ij}(n)$ je verovatnoća da sistem iz stanja s_i bar jednom prođe kroz stanje s_j. Stanje s_i nazivamo **povratnim** ako je $Q_{ii} = 1$, a **nepovratnim** ako je $Q_{ii} < 1$. Stanje s_i je povratno ako i samo ako je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ divergentan red, a nepovratno ako i samo ako je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ konvergentan red.

Finalne verovatnoće

Do sada smo razmotrili dve osobine koje lanci Markova mogu da poseduju: homogenost i stacionarnost. Oni lanci Markova koji poseduju ove osobine imaju znatno jednostavniju formu. Stacionarnost predstavlja invarijantnost raspodele prvog i drugog reda u odnosu na translaciju vremena (podsećamo da raspodele prvog i drugog reda u potpunosti određuju lanac Markova), dok homogenost znači invarijantnost verovatnoća prelaza (znači, uslovnih raspodela) u odnosu na translaciju vremena. Homogen proces ne mora da bude stacionaran.

U ovom odeljku razmotrićemo one (nestacionarne) homogene lance Markova koji, kad $n \to \infty$, teže ka stacionarnom procesu. To znači da kad je n dovoljno veliko (kad sistem dugo "radi") tada verovatnoće stanja $p_j(n)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, teže konstanti p_j^* koja ne zavisi od n, a verovatnoće prelaza $p_{ij}(n)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ne zavise od i i od n, tj.

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = p_j^*, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^*.$$

Drugačije rečeno, uslovna verovatnoća da sistem bude u stanju s_j ako je u dalekoj prošlosti bio u stanju s_i, ne zavisi od s_i, tj. na evoluciju lanaca Markova daleka prošlost nema uticaja.

Bez dokaza navodimo sledeću teoremu u kojoj su dati dovoljni uslovi da homogen lanac Markova poseduje ovu osobinu. Ova teorema je jedna od mnogih teorema koje se bave opisanom problematikom i odabrana je zbog jednostavne formulacije i primene.

Teorema 6.8.a. *Neka za lanac Markova postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takvo da* $\mathbf{P}(n_0) > 0$, *tj.* $p_{ij}(n_0) > 0$ *za sve* $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. *Tada za svako* $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^*,$$

gde granične vrednosti p_j^*, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *ne zavise od* i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Verovatnoće p_j^*, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, nazivamo **finalnim verovatnoćama** i interpretiramo ih kao verovatnoće stanja sistema u dalekoj budućnosti, tj.

$$X_\infty : \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ p_1^* & p_2^* & \ldots & p_m^* \end{pmatrix}.$$

Matrični zapis finalnih verovatnoća je $\mathbf{p}^* = [p_1^* \, p_2^* \ldots p_m^*]$.

Navodimo neke elementarne posledice ove teoreme koje opisuju osobine finalnih verovatnoća pod uslovom da finalne verovatnoće postoje.

- Finalne verovatnoće mogu se izračunati iz sistema jednačina

$$p_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i^* p_{ij}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \text{tj.} \quad \boxed{\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*\mathbf{P}}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^* = 1.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^*$, gde je $\mathbf{P}^*$ matrica čije su sve vrste jednake $\mathbf{p}^*$.
- Ako je $\mathbf{q} = [q_1\ q_2 \ldots q_m]$, gde je $q_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m q_i = 1$, onda
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}\mathbf{P}^n = \mathbf{p}^*.$$
- Ako je $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^*$, onda je lanac Markova stacionaran, tj. $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}^*$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Primer 6.8.b. Pokazati da lanac Markova opisan u primeru 6.8.a. ima finalne verovatnoće i naći ih.

Rešenje. Kako je $\mathbf{P}^2 > 0$, zadovoljeni su uslovi teoreme 6.8.a. te postoje finalne verovatnoće $\mathbf{p}^* = [p_1^*\ p_2^*]$. Nalazimo ih iz sistema jednačina
$$p_1^* = \frac{1}{2}p_1^* + p_2^*, \quad p_2^* = \frac{1}{2}p_1^*,$$
pa je $p_1^* = \frac{2}{3}$, $p_2^* = \frac{1}{3}$. □

6.5.2. Homogeni procesi Markova

U odeljku o lancima Markova razmatrali smo razvoj sistema X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, u diskretnim momentima 0,1,2,.... Često se u praksi srećemo sa sistemima Markova koje je važno pratiti tokom neprekidnog vremenskog intervala $[0, \infty)$. Matematički model koji opisuje tu vrstu sitema je proces Markova X_t sa neprekidnim parametrom (vremenom) $t \in [0, \infty)$.

U ovoj knjizi bavićemo se jednostavnijom formom ovih procesa. Pretpostavićemo da je

- skup stanja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ konačan skup,
- proces Markova homogen (verovatnoće prelaza su neosetljive na translaciju vremena).

Svojstvo Markova je tada iskazano sa:

Proces X_t, $t \in [0, \infty)$, je (homogen) proces Markova ako za sve realne $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t < h$ i sve $s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_i, s_j \in S$ važi
$$P(X_h = s_j \mid X_{t_0} = s_{i_0}, X_{t_1} = s_{i_1}, \ldots, X_t = s_i) =$$
$$= P(X_h = s_j \mid X_t = s_i) = P(X_{h-t} = s_j \mid X_0 = s_i).$$

Verovatnoće $P(X_t = s_i)$, da se sistem u momentu t nalazi u stanju s_i, nazivamo **verovatnoćama stanja** i označavamo ih sa $p_i(t), i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ili u matričnom obliku sa $\mathbf{p}(t) = [p_1(t)\; p_2(t) \ldots p_m(t)]$.

Verovatnoće $P(X_{h+t} = s_j \mid X_h = s_i)$, da sistem iz stanja s_i u momentu h pređe u stanje s_j u momentu $h + t$, nazivamo **verovatnoćama prelaza** i označavamo ih sa $p_{ij}(t),\;\; i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ili u matričnom obliku

$$\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{m\times m}.$$

Analogno kao u slučaju lanca Markova, izvodimo sledeća pravila

- Proces Markova je u potpunosti određen
  - početnim verovatnoćama $\mathbf{p}(0) = [p_1(0)\; p_2(0) \ldots p_m(0)]$,
  - verovatnoćama prelaza $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{m\times m}$, $t \in [0, \infty)$.
- $p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ tj. $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica.
- Važe jednačine Čepman-Kolmogorova: za svako $t, h \in [0, \infty)$ i svako $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$p_{ij}(t + h) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(t)p_{kj}(h) \quad \text{ili} \quad \boxed{\mathbf{P}(t + h) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(h).}$$

- Za svako $t, h \in [0, \infty)$ i svako $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$p_j(t + h) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)p_{kj}(h), \quad \text{ili} \quad \boxed{\mathbf{p}(t + h) = \mathbf{p}(t)\mathbf{P}(h).}$$

- Ako postoji $t_0 \in [0, \infty)$ takvo da je $\mathbf{P}(t_0) > 0$ (što znači da $p_{ij}(t_0) > 0$ za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$), tada za svako $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p^*_j \in (0, 1), \quad \sum_{j=1}^{m} p^*_j = 1.$$

  Verovatnoće $\mathbf{p}^* = [p^*_1\; p^*_2 \ldots p^*_m]$ nazivamo **finalnim verovatnoćama**.

Uz pretpostavku da su funkcije $p_{ij}(t)$ neprekidne za $t \in [0, \infty)$, uvodimo nove elemente koji će bliže odrediti proces Markova. Označimo sa $\lambda_{ij},\;\; i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, desni izvod u tački 0 funkcije $p_{ij}(t)$, tj.

$$\lambda_{ij} = \left.\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t\to 0^+} \frac{p_{ij}(0 + \Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t}.$$

Matrični zapis koeficijenata λ_{ij} je

$$\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij}]_{m\times m}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}'(0) = \left.\frac{d\,\mathbf{P}(t)}{d\,t}\right|_{t=0}.$$

Ako $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, tada proces Markova nazivamo **konzervativnim** i ubuduće se bavimo samo ovom vrstom procesa.

Osobine koeficijenata $\lambda_{ij},\ i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$

- Za svako $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j$, za male $\Delta t > 0$, (kad $\Delta t \to 0$), važi

$$\boxed{p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t,} \quad \boxed{p_{ii}(\Delta t) \approx \lambda_{ii}\Delta t + 1.}$$

  Dokaz.

$$\lambda_{ij} \approx \frac{p_{ij}(\Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t} = \begin{cases} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, & i \neq j \\ \frac{p_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}, & i = j \end{cases}$$

  odakle je za

$$\begin{array}{ll} i \neq j, & p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t, \\ i = j, & p_{ii}(\Delta t) \approx \lambda_{ii}\Delta t + 1. \end{array} \tag{6.4}$$

- Za sve $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\ i \neq j$, važi

$$\boxed{\lambda_{ii} \leq 0, \quad \lambda_{ij} \geq 0.}$$

  Svi elementi van glavne dijagonale matrice $\mathbf{\Lambda}$ su nenegativni, a na glavnoj dijagonali su nepozitivni.

  Dokaz. Kako je $\Delta t > 0$, $0 \leq p_{ij}(\Delta t) \leq 1$, na osnovu prethodne osobine, važi da je $\lambda_{ii} \leq 0,\ \ \lambda_{ij} \geq 0,\ \ i \neq j$.

- za sve $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ je

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} = 0,}$$

  zbir elemenata bilo koje vrste matrice $\mathbf{\Lambda}$ jednak je 0.

  Dokaz. Znamo da je $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t) = 1$. Nalaženjem izvoda u $t = 0^+$ leve i desne strane jednakosti, dobijamo

$$\left.\frac{d\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)}{d\,t}\right|_{t=0^+} = 0 \implies \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} = 0.$$

- Uz neke uslove regularnosti važe sistemi diferencijalnih jednačina Kolmogorova (obrnuti i direktni), tj. za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i svako $t \in [0, \infty)$ važi

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(t)\lambda_{kj} \quad \text{i} \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} p_{kj}(t).$$

  Matrični zapis je dat sa

$$\boxed{\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Lambda},} \qquad \boxed{\mathbf{P}'(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(t).}$$

  U oba slučaja imamo početni uslov $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica.

  Dokaz. Iz jednačina Čepman Kolmogorova, nalaženjem izvoda po h za $h = 0$, dobijamo

$$\frac{d}{dh}\mathbf{P}(t+h)\bigg|_{h=0} = \frac{d}{dh}\mathbf{P}(t)\mathbf{P}(h)\bigg|_{h=0}$$
$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}'(0) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Lambda}.$$

  Analogno, nalaženjem izvoda po t za $t = 0$, imamo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t+h)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathbf{P}(t)\mathbf{P}(h)\bigg|_{t=0}$$
$$\mathbf{P}'(h) = \mathbf{P}'(0)\mathbf{P}(h) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(h).$$

- Za svako $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i svako $t \in [0, \infty)$

$$p'_j(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)\lambda_{kj}, \quad \text{ili} \quad \boxed{\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{\Lambda}.} \tag{6.5}$$

- Ako su $\mathbf{p}^* = [\mathbf{p}_1^* \ \ \mathbf{p}_2^* \ldots \mathbf{p}_m^*]$ finalne verovatnoće, tada za sve $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, uz pretpostavke o izmenljivosti graničnih procesa, imamo

$$\sum_{k=1}^{m} p_k^* \lambda_{kj} = 0, \quad \text{ili} \quad \boxed{\mathbf{p}^*\mathbf{\Lambda} = 0.} \tag{6.6}$$

  Dokaz. Kad u diferencijalnim jednačinama Kolmogorova $t \to \infty$, dobijamo

$$\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(t)\lambda_{kj},$$

$$(p_j^*)' = 0 = \sum_{k=1}^{m} p_k^* \lambda_{kj}.$$

- Ako su početne verovatnoće $\mathbf{p}(0) = [p_1(0)\ p_2(0) \ldots p_m(0)]$ jednake finalnim verovatnoćama $\mathbf{p}^* = [p_1^*\ p_2^* \ldots p_m^*]$, tada je proces Markova stacionaran.

6.5.3. Lanci i procesi Markova sa prebrojivim brojem stanja

U odeljcima 6.8.1. i 6.8.3. bavili smo se lancima i procesima Markova sa konačnim brojem stanja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Koristimo istu tehniku i izvodimo analogne zaključke u slučaju procesa Markova sa prebrojivim brojem stanja, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots\}$. Nećemo detaljno obrazlagati ovaj slučaj, nego navodimo dva primera kao ilustraciju obrade takvih procesa.

Proces rađanja i umiranja

Proces rađanja i umiranja služi kao model za opisivanje raznih prirodnih, tehničkih, društvenih sistema, a ime ovih procesa je ostalo od prvobitne primene u opisu biološke populacije. Naime, zamislimo biološki sistem kod kojeg stanjem sistema X_t u momentu t smatramo broj jedinki u momentu t. Skup stanja sistema je $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Neka, dalje, X_t bude homogen proces Markova sa sledećim osobinama

- Ako je sistem u stanju n u momentu t, verovatnoća prelaza u stanje $n+1$ u momentu $t + \Delta t$, za malo $\Delta t > 0$, približno je jednaka $\lambda_n \Delta t$. Brojeve λ_n nazivamo brzinama rađanja.
- Ako je sistem u stanju n u momentu t, verovatnoća prelaza u stanje $n-1$ u momentu $t + \Delta t$, za malo $\Delta t > 0$, približno je jednaka $\mu_n \Delta t$. Brojeve μ_n nazivamo brzinama umiranja.
- Ako je sistem u stanju n u momentu t, verovatnoća da će ostati u istom stanju n u momentu $t + \Delta t$, za malo $\Delta t > 0$, približno je jednaka $1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t$.
- Sve ostale verovatnoće prelaza približno su jednake 0 (značajno su manje od gore navedenih verovatnoća, tj. predstavljaju beskonačno male veličine u odnosu na Δt kad $\Delta t \to 0$).

Navedene uslove zapisujemo sa:

$$
\begin{array}{ll}
p_{00}(\Delta t) \approx 1 - \lambda_0 \Delta t, & \\
p_{nn}(\Delta t) \approx 1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t, & n \in \{1, 2, \ldots\}, \\
p_{n,n+1}(\Delta t) \approx \lambda_n \Delta t, & n \in \{0, 1, \ldots\}, \\
p_{n,n-1}(\Delta t) \approx \mu_n \Delta t, & n \in \{1, 2, \ldots\}, \\
p_{n,k}(\Delta t) \approx 0, & n, k \in \{1, 2, \ldots\},\ |n-k| > 1.
\end{array}
$$

Na osnovu relacije (6.4) dobijamo

$$
\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\
0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & \cdots \\
0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix},
$$

a na osnovu relacije (6.6) dobijamo sistem algebarskih jednačina

$$
\begin{gathered}
-\lambda_0 p_0^* + \mu_1 p_1^* = 0,\\
\lambda_{n-1} p_{n-1}^* - (\lambda_n + \mu_n) p_n^* + \mu_{n+1} p_{n+1}^* = 0, \quad n \in \{1,2,\ldots\}\,,\\
p_0^* + p_1^* + \ldots = 1,
\end{gathered}
$$

iz kojeg nalazimo finalne verovatnoće. Iz rekurzivnog sistema jednačina, sve p_n^*, $n \in \{1,2,\ldots\}$, izrazimo pomoću p_0^*,

$$p_n^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} p_0^*, \quad n \in \{1,2,\ldots\}\,,$$

i to zamenimo u poslednju jednačinu,

$$p_0^* \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \ldots \right) = 1.$$

Očigledno, poslednji izraz ima smisla jedino u slučaju kad red

$$1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} + \cdots \tag{6.7}$$

konvergira. Ako je njegova suma jednaka A, tada

$$p_0^* = \frac{1}{A}, \qquad p_n^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \frac{1}{A}. \tag{6.8}$$

Ukoliko je $\mu_n = 0$, $n \in \{1,2,\ldots\}$, dobijamo **proces čistog rađanja**, a ako je $\lambda_n = 0$, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$, imamo **proces čistog umiranja**.

Poasonov proces (primer 6.4.a) je proces čistog rađanja (što znači da je proces Markova) kod kojeg je $\lambda_n = \lambda > 0$, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$, i matrica $\mathbf{\Lambda}$ je

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

U slučaju da je u procesu rađanja i umiranja populacija biološkog sistema ograničena na k jedinki, matrica $\mathbf{\Lambda}$ ima oblik

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{k-1} & -\lambda_{k-1} - \mu_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_k & -\mu_k \end{bmatrix}$$

i finalne verovatnoće uvek postoje,

$$p_0^* = \frac{1}{B}, \qquad p_n^* = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{1}{B}, \tag{6.9}$$

gde je

$$B = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_k}. \tag{6.10}$$

Sistemi masovnog usluživanja ili redovi čekanja

Jednostavan sistem masovnog usluživanja je prikazan šematski na donjoj slici

$$\xrightarrow{\text{dolazak}} \boxed{\text{red čekanja}} \longrightarrow \boxed{\text{usluživanje}} \xrightarrow{\text{odlazak}}$$

Klijenti dolaze slučajno i bivaju usluženi odmah ako u sistemu postoji slobodno mesto za usluživanje, a staju u red ako su sva mesta zauzeta. Po završetku usluživanja odlaze iz sistema. Postoje razni sistemi usluživanja u zavisnosti od

- procesa koji opisuje dolazak,
- mehanizma servisiranja (broj mesta za usluživanje, dužina usluživanja,...),
- dužina reda (0-sistemi sa otkazom, k-sistemi sa konačnim redom čekanja, ∞-sistemi sa beskonačnim redom čekanja).

Sistem $M|M|1|\infty$

Kao prvo, detaljno opisujemo sistem sa jednim mestom za usluživanje, beskonačnim redom čekanja, Poasonovim potokom trebovanja i eksponencijalnom dužinom usluživanja (u oznaci $M|M|1|\infty$).

Kako je za određivanje karakteristika ovog procesa bitno njegovo ponašanje u vremenskim intervalima $(t, t+\Delta t)$ male dužine (kad $\Delta t \to 0$), razmotrićemo prvo šta se događa sa novim trebovanjima i usluživanjem kad je Δt malo.

- Pretpostavimo da je potok trebovanja Poasonov proces. Tada su bitne navedene tri činjenuce:
  1. Slučajni proces $Y_{\Delta t}$ koji predstavlja broj novih klijenata (trebovanja) u intervalu $(t, t+\Delta t)$, $t \geq 0$, $\Delta t \geq 0$, ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda \Delta t)$ raspodelu, tj.

$$P(Y_{\Delta t} = k) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

2. Videli smo (primer 6.4.a) da je tada

$$\begin{aligned} &P(Y_{\Delta t} = 0) \approx 1 - \lambda \Delta t, \\ &P(Y_{\Delta t} = 1) \approx \lambda \Delta t, \\ &P(Y_{\Delta t} = k) = o(\Delta t) \approx 0, \qquad k \in \{2, 3, \ldots\}, \end{aligned}$$

   što znači da tokom kratkog vremenskog intervala vrlo verovatno neće biti nijednog novog trebovanja, jedno trebovanje će se dogoditi sa malom verovatnoćom, a više od jednog će se dogoditi sa zanemarljivo malom verovatnoćom u odnosu na prethodna dva slučaja.

3. Vreme izmedju dva uzastopna trebovanja (izmedju dolaska dva uzastopna klijenta) ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu (što je pokazano u primeru 6.4.b). To znači da je λ^{-1} jednako očekivanoj (srednjoj) vrednosti vremena koje protekne izmedju dva uzastopna trebovanja (izmedju dolaska dva uzastopna klijenta). Jasno da λ možemo interpretirati kao očekivanu (srednju) brzinu pristizanja trebovanja, odnosno kao očekivani (srednji) broj novih trebovanja u jedinici vremena.

- Pretpostavimo da dužina usluživanja T na mestu za usluživanje ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu. Za dalji postupak bitne su navedene tri činjenice:

  1. ako usluživanje nije završeno do momenta t, verovatnoću da će biti završeno do momenta $t + \Delta t$, nalazimo iz

$$P(T \leq t + \Delta t \mid T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} =$$

$$= \frac{e^{-\mu t} - e^{-\mu(t+\Delta t)}}{1 - (1 - e^{-\mu t})} = 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t,$$

  2. ako usluživanje nije završeno do momenta t, verovatnoću da neće biti završeno do momenta $t + \Delta t$, nalazimo iz

$$P(T > t + \Delta t \mid T > t) = \frac{P(T > t + \Delta t, T > t)}{P(T > t)} =$$

$$= \frac{1 - \left(1 - e^{-\mu(t+\Delta t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\mu t})} = e^{-\mu \Delta t} \approx 1 - \mu \Delta t.$$

  3. Kako slućajna promenljiva koja predstavlja vreme usluživanja ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu, očekivana (srednja) vrednost vremena usluživanja jednaka je μ^{-1}. Analogno kao za λ, parametar μ jednak je očekivanoj (srednjoj) brzini usluživanja na jednom mestu za usluživanje, odnosno očekivanom (srednjem) broju usluženih klijenata na jednom mestu za usluživanje u jedinici vremena.

Neka je $X_t,\ t \in [0, \infty)$ slučajni proces čija je vrednost u momentu t jednaka broju trebovanja (klijenata) u sistemu (zbiru trebovanja ili klijenata u redu čekanja i na mestu za usluživanje). To znači da je skup stanja sistema X_t skup $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Na osnovu gore izloženog, možemo izvesti verovatnoće prelaza $p_{ij}(\Delta t)$.

$$p_{00}(\Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = 0 | X_t = 0) \approx 1 - \lambda \Delta t.$$

Ako je $i \in \{1, 2, \ldots\}$, tada

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = i - 1 | X_t = i) \approx \mu \Delta t (1 - \lambda \Delta t) \approx \mu \Delta t.$$

$$p_{i,i}(\Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = i | X_t = i) \approx (1 - \mu \Delta t)(1 - \lambda \Delta t) + \mu \lambda \Delta t^2 \approx 1 - (\lambda + \mu) \Delta t.$$

Ako je $i \in \{0, 1, \ldots\}$, tada

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = i + 1 | X_t = i) \approx (1 - \mu \Delta t) \lambda \Delta t \approx \lambda \Delta t,$$

a ako je $i, j \in \{0, 1, \ldots\},\ \ |i - j| > 1$, tada

$$p_{ij}(\Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = j | X_t = i) = o(\Delta t) \approx 0.$$

Kako je

$$\begin{array}{ll}
p_{00}(\Delta t) \approx 1 - \lambda \Delta t, & \\
p_{ii}(\Delta t) \approx 1 - (\lambda + \mu) \Delta t, & i \in \{1, 2, \ldots\}, \\
p_{i,i+1}(\Delta t) \approx \lambda \Delta t, & i \in \{0, 1, \ldots\}, \\
p_{i,i-1}(\Delta t) \approx \mu \Delta t, & i \in \{1, 2, \ldots\}, \\
p_{i,j}(\Delta t) \approx o(\Delta t), & i, j \in \{0, 1, \ldots\},\ \ |i - j| > 1,
\end{array}$$

primenom formule (6.4), dobijamo matricu $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -\lambda - \mu & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -\lambda - \mu & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda - \mu & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Vidimo da ovaj proces predstavlja proces rađanja i umiranja gde je $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$, $n \in \{0, 1, \ldots\}$. Iz (6.7) dobijamo da je egzistencija finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^*$ uslovljena konvergencijom geometrijskog reda

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k.$$

Ako je $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ (tj. ako je $\lambda < \mu$, što znači da je brzina pristizanja trebovanja manja nego brzina usluživanja), tada je suma reda jednaka $\frac{\mu}{\mu-\lambda}$, te je na osnovu (6.8)

$$p_0^* = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \qquad p_k^* = \frac{\lambda^k}{\mu^k}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

To znači da ako sistem dugo radi, verovatnoća da je sistem besposlen jednaka je $p_0^* = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, a da će biti k-1 klijenata u redu čekanja plus jedan na mestu za usluživanje, jednaka je $p_k^* = \frac{\lambda^k}{\mu^k}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad k \in \{1, 2, \ldots\}$.

Sistem $M|M|k|\infty$

Ako sistem za usluživanje ima k mesta za usluživanje, a svi ostali uslovi su isti kao u prethodno opisanom sistemu, tada takav sistem skraćeno obeležavamo sa $M|M|k|\infty$ i matrica $\mathbf{\Lambda}$ ima oblik

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & k\mu & -\lambda-k\mu & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k\mu & -\lambda-k\mu & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix},$$

što pokazuje da se i u ovom slučaju radi o sistemu rađanja i umiranja, gde je

$$\begin{aligned} &\lambda_n = \lambda, \quad n \in \{0, 1, \ldots\}, \\ &\mu_n = n\mu, \quad n \in \{1, 2, \ldots, k\}, \\ &\mu_n = k\mu, \quad n \in \{k+1, k+2, \ldots\}. \end{aligned}$$

Iz (6.7) zaključujemo da postojanje finalnih verovatnoća zavisi od konvergencije reda

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^i$$

Poslednji red konvergira samo ako je $\frac{\lambda}{k\mu} < 1$. U tom slučaju njegovu sumu označimo sa A. Kako se radi o geometrijskom redu, dobijamo

$$A = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \frac{\mu}{(k\mu - \lambda)k!}.$$

Iz (6.8) izračunavamo finalne verovatnoće

$$p_0^* = \frac{1}{A}, \tag{6.11}$$

$$p_n^* = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0^*, \quad n \in \{1,\dots,k\}, \tag{6.12}$$

$$p_n^* = \frac{1}{n!k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0^*, \quad n \in \{k+1,k+2,\dots\}. \tag{6.13}$$

Sistem $M|M|k|r$

Ako sistem za usluživanje ima k mesta za usluživanje i r mesta u redu čekanja, a svi ostali uslovi su isti kao u prethodno opisanim sistemima, tada takav sistem skraćeno obeležavamo sa $M|M|k|r$. Matrica $\mathbf{\Lambda}$ je formata k+r+1 i ima oblik

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k\mu & -\lambda-k\mu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k\mu & -k\mu \end{bmatrix},$$

što pokazuje da se i u ovom slučaju radi o sistemu rađanja i umiranja gde je

$$\begin{aligned} &\lambda_n = \lambda, && n \in \{0,1,\dots,k+r\}, \\ &\mu_n = n\mu, && n \in \{1,2,\dots,k\}, \\ &\mu_n = k\mu, && n \in \{k+1,k+2,\dots,k+r\}. \end{aligned}$$

Finalne verovatnoće uvek postoje i koristeći formule (6.9) i (6.10), dobijamo

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{Bn!}, \quad n \in \{0,1,\dots,k\},$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{Bk!\,k^{n-k}}, \quad n \in \{k+1,k+2,\dots,k+r\},$$

gde je

$$B = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^i.$$

Primer 6.8.c. Telefonskom vezom izmedju mesta A i B može se obavljati 3 razgovora istovremeno. Prosečno trajanje razgovora je 2.5 minuta. Ima prosečno 48 zahteva za uspostavljanjem veze na sat. Uz pretpostavku da se radi o $M|M|3|0$ procesu usluživanja naći

1. finalne verovatnoće,
2. verovatnoću da su sve veze slobodne,

3. verovatnoću da su sve veze zauzete,

4. očekivani broj neusluženih zahteva u toku jednog dana.

Rešenje. 1. Uz pretpostavku da se radi o $M|M|3|0$ procesu usluživanja, parametar λ jednak je prosečnom broju novih zahteva u jedinici vremena a μ prosečnom broju razgovora koji se obave na jednoj liniji u jedinici vremena. Očito da λ i μ zavise od jedinice vremena koju proizvoljno definišemo. Ako je, recimo, jedinica vremena jednaka 1 sat, tada je $\lambda = 48$ i $\mu = 24$. Ako je jedinica vremena jednaka 2.5 minuta, tada je $\lambda = 2$ i $\mu = 1$. Parametri λ i μ očigledno direktno zavise od izbora vremenske jedinice, ali njihov odnos (količnik $\frac{\lambda}{\mu}$) ne zavisi. Izbor vremenske jedinice ne utiče na rezultat ispitivanja. Ukoliko je vremenska jedinica 2.5 minuta, dobijamo matricu $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrrl} -2p_0^* & +p_1^* & & & = 0 \\ 2p_0^* & -3p_1^* & +2p_2^* & & = 0 \\ & 2p_1^* & -4p_2^* & +3p_3^* & = 0 \\ & & 2p_2^* & -3p_3^* & = 0 \\ p_0^* & +p_1^* & +p_2^* & +p_3^* & = 1, \end{array}$$

   gde je $\mathbf{p}^* = [p_0^*\, p_1^*\, p_2^*\, p_3^*]$ dobijamo $\mathbf{p}^* = [\frac{3}{19}\, \frac{6}{19}\, \frac{6}{19}\, \frac{4}{19}]$.

2. $p_0^* = \frac{3}{19}$.

3. $p_3^* = \frac{4}{19}$.

4. Očekivani broj trebovanja tokom jednog sata je 48, a tokom 24 sata je $48 \cdot 24 = 1152$, te je očekivani broj neusluženih zahteva jednak $p_3^* \cdot 1152 \approx 242$.

Primer 6.8.d. U zdravstvenu ustanovu koja ima samo jednog lekara dolazi prosečno jedan pacijent svakog sata

1. Koliko se vremena prosečno sme lekar baviti jednim pacijentom ako želi da verovatnoća da u redu čeka više od 4 pacijenta bude manja od 0.05?

2. Koliko je u tom slučaju očekivano vreme koje će lekar provesti bez pacijenata tokom 10-časovnog radnog vremena?

3. Koliko je očekivani broj pacijenata u ustanovi?

Rešenje. Očito da se radi o sistemu $M|M|1|\infty$ gde je $\lambda = 1$, a μ je nepoznato. Tada je

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -1-\mu & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -1-\mu & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \mu & -1-\mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

$$p_0^* = 1 - \frac{1}{\mu}, \quad p_k^* = \frac{1}{\mu^k}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right), \quad k \in \{1, 2, \dots\}.$$

1. Podsetimo da p_k^* predstavlja verovatnoću da u sistemu (u ordinaciji + u čekaonici) ima k pacijenata. Iz uslova

$$\sum_{k=6}^{\infty} p_k^* < 0.05 \Rightarrow \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{\mu^k}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) < 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu^6}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^k < 0,05 \Rightarrow \frac{1}{\mu^6} < 0,05 \Rightarrow \mu^6 > 1,64.$$

dobijamo da je $\mu \approx 1.64$. Tada je prosečna dužina usluživanja jednaka $\frac{1}{\mu} \approx 0.61$ sata.

2. Tokom 10-časovnog vremena lekar će provesti prosečno $10 \cdot p_0^* = 10 \cdot (1 - 0.61) = 3.9$ sati bez pacijenata (besposlen).

3. Pacijenti u ustanovi su pacijenti u čekaonici plus pacijent u ordinaciji. Kako je p_k^* verovatnoća da u ustanovi ima prosečno k pacijenata, to je očekivani broj pacijenata u ustanovi jednak

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{\mu^k}(1 - \frac{1}{\mu}) \approx 1.55.$$

Primer 6.8.e. U jednoj fabrici postoji veliki broj istovrsnih uredjaja. Njih održavaju tri majstora. Ustanovljeno je da se uredjaji kvare prosečnom brzinom dva uredjaja na sat. Majstor popravi uredjaj za prosečno jedan sat rada. Uz pretpostavku da se radi o $M|M|3|\infty$ sistemu usluživanja, naći verovatnoću da

1. su svi majstori slobodni ,
2. su svi majstori zaposleni,
3. na poravak čeka više od jednog uredjaja.

Rešenje. Navodimo odgovarajuću matricu Λ i sistem jednačina

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{rrrrrl} -2p_0^* & +p_1^* & & & & = 0 \\ 2p_0^* & -3p_1^* & +2p_2^* & & & = 0 \\ & 2p_1^* & -4p_2^* & +3p_3^* & & = 0 \\ & & 2p_2^* & -5p_3^* & +3p_4^* & = 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ p_0^* & +p_1^* & +p_2^* & +\cdots & & = 1. \end{array}$$

Iz (6.12) i (6.13) dobijamo $A = 9$, te je

1. $p_0^* = \frac{1}{9}$,
2. $1 - p_0^* - p_1^* - p_2^* = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
3. $1 - p_0^* - p_1^* - p_2^* - p_3^* - p_4^* = \frac{16}{81}$.

Prilog 1

Matematičke formule

I Sume

Navešćemo neke sume redova korišćene u ovom kursu. Po definiciji, za sve $k \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \cdots, k-1\}$

$$0! = 1, \quad \binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

U slučaju beskonačnih suma naznačena je oblast konvergencije.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n, \quad n \in \mathbb{N},\ x \neq 0,\ y \neq 0.$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0, \quad -1 < x < 1.$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x), \quad -1 < x \leq 1.$

II Gama funkcija

Gama funkcija, $\Gamma(a),\ a > 0$, je definisana sa

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0.$$

Osobine gama funkcije:
1. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
4. $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$

III Beta funkcija

Beta funkcija se obeležava sa $B(a,b),\ a > 0, b > 0$ i definisana je sa

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Ona je povezana sa gama funkcijom na sledeći način

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

IV Kombinatorne formule

1. Broj permutacija od n elemenata $\quad P(n) = n!.$

2. Broj varijacija od n elemenata klase $k \quad V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}.$

3. Broj varijacija sa ponavljanjem od n elemenata klase $k \quad \bar{V}_k(n) = n^k.$

4. Broj kombinacija od n elemenata klase $k \quad C_k(n) = \binom{n}{k}.$

Literatura

[1] A. Gerasimovič, *Matematičeskaja statistika,* Minsk, 1983.

[2] O. Hadžić, *Odabrane metode teorije verovatnoće,* Novi Sad, 1990.

[3] H. Hsu, *Probability, random variables and random processes,* McGraw-Hill, New York, 1996.

[4] Z. Ivković, *Matematička statistika,* Naučna knjiga, Beograd, 1992.

[5] Z. Ivković, *Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku,* Građevinska knjiga, Beograd, 1972.

[6] J. Mališić, *Slučajni procesi*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

[7] P. Mladenović, *Elementaran uvod u verovatnoću i statistiku,* Beograd, 1990.

[8] A. Mood, F. Graybill, D. Boes, *Introduction to the theory of statistics,* McGraw-Hill, New York, 1985.

[9] Ž. Pauše, *Vjerojatnost, informacija, stohastički procesi,* Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[10] A. Papoulas, *Probability, random variables, stochastic processes,* McGraw-Hill, New York, 1984.

[11] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti,* Školska njiga, Zagreb, 1987.

[12] M. Spiegel, *Theory and problems of probability and statistics,* McGraw-Hill, New York, 1975.

[13] M. Stojaković, *Uvod u teoriju verovatnoće i matematičke statistike*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1995.

[14] J. Uspensky, *Mathematical probability,* McGraw-Hill, New York, 1965.

[15] S. Vukadinović, *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike,* Privredni pregled, Beograd, 1990.

Pregled oznaka

Indeks