Nataša Sladoje

Matematička analiza 1

Materijal za kurs na odseku Geodezija i geomatika,

Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

Materijal se, u najvećoj meri, zasniva na sledećim izvorima:

- Calculus I, Paul Dawkins, Lamar University, http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx
- Calculus, Gilbert Strang, MIT,
- Matematička analiza 1, I deo, I. Kovačević, N. Ralević, Novi Sad, 2007
- Matematička analiza 1, II deo, I. Kovačević, V. Marić, M. Novković, B. Rodić, Novi Sad, 2007
- Integralni račun, I. Čomić, N. Sladoje, Novi Sad 1997

Najveći broj ilustracija preuzet je iz

Calculus I, Paul Dawkins, Lamar University, http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx

1 Granična vrednost funkcije

1.1 Šta je granična vrednost, intuitivno i po definiciji

Već smo svakako videli zapis oblika

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$$

ili, uopšteno, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, za neku (realnu) funkciju $f(x)$ i za neku tačku $a \in R$. Znamo da se ovo čita kao "granična vrednost (limes) funkcije f u tački a". Važno pitanje na koje treba da odgovorimo je: Šta ovo znači?

Preciznu definiciju pojma granične vrednosti navešćemo malo kasnije. Ta definicija nije jednostavna za razumevanje, pa ćemo početi sa njenom "intuitivnijom" verzijom:

Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački $a \in \mathbb{R}$, i pišemo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ako vrednosti $f(x)$ mogu postati *proizvoljno* bliske vrednosti L kada x postane *dovoljno* blisko vrednosti a. Važno je obratiti pažnju na nekoliko detalja:

- Termini "proizvoljno" i "dovoljno" su prilično značajni i treba ih dobro razumeti. "Proizvoljno" povezujemo sa "unapred odabrano", ili "ma kako zadato", a "dovoljno" sa nečim što sami nastojimo da postignemo, u skladu sa datim uslovima.
- Podrazumeva se da, ako je $f(x)$ postalo (proizvoljno) blisko vrednosti L kada je x postalo dovoljno blisko vrednosti a, ovaj trend funkcija i zadrži, odnosno da za vrednosti x koje nastavljaju da se približavaju vrednosti a, vrednosti funkcije $f(x)$ ostaju bar jednako, ili više, bliske vrednosti L.
- Vrednost funkcije $f(x)$ u tački $x = a$ u kojoj određujemo graničnu vrednost ne utiče na limes. Nije od značaja ni da li ta vrednost uopšte postoji (da li je funkcija definisana u tački $x = a$). Drugim rečima, granična vrednost funkcije u tački bavi se ponašanjem funkcije u blizini (okolini) te tačke, a ne u samoj tački.
- Još jedan način da formulišemo pitanje na koje odgovaramo izračunavanjem granične vrednosti funkcije u tački je: Da li se može utvrditi da se u okolini tačke $x = a$ vrednosti funkcije $f(x)$ stabilizuju oko neke vrednosti L.
- Ponašanje funkcije u blizini tačke $x = a$ radi određivanja granične vrednosti obavezno podrazumeva posmatranje vrednosti x i levo, i desno od tačke a.

Primer 1.1. *Pokušajmo da odredimo vrednost* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$.

Rešenje: S obzirom da još nismo govorili o načinu izračunavanja graničnih vrednosti, ovaj zadatak ćemo pokušati da rešimo posmatrajući (analizirajući) vrednosti date funkcije za vrednosti promenljive koje su bliske tački 2. Uočimo, odmah, i da data funkcija nije definisana za $x = 2$, ali jeste definisana za vrednosti bliske dvojci, i sa leve, i sa desne strane.

Prva reakcija nam je, vrlo verovatno, da formiramo tabelu vrednosti date funkcije, u blizini posmatrane tačke:

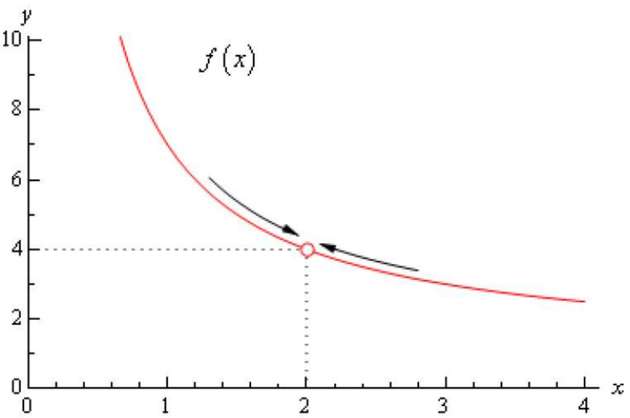
x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	3.4	1.5	5.0
2.1	3.857142857	1.9	4.157894737
2.01	3.985074627	1.99	4.015075377
2.001	3.998500750	1.999	4.001500750
2.0001	3.999850007	1.9999	4.000150008
2.00001	3.999985000	1.99999	4.000015000

Na osnovu navedenih vrednosti sa priličnom sigurnošću zaključujemo da je

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} = 4,$$

jer se za vrednosti x koje smo birali tako da budu sve bliže vrednosti $x = 2$, i sa leve i sa desne strane, funkcija sve više približavala vrednosti 4. Ovaj zaključak je tačan (kao što ćemo i sami moći da utvrdimo, kada budemo naučili kako se limesi izračunavaju), ali moramo biti oprezni i imati na umu da se proverom pomoću tabele nikad ne mogu dati pouzdani odgovori o limesu, već se samo, eventualno, može naslutiti (proceniti) šta bi granična vrednost mogla biti. Razlog je, naravno, u tome što tablicom možemo proveriti samo konačan broj tačaka, dok tražena svojstva limesa koja želimo da proverimo treba da važe za beskonačno mnogo realnih vrednosti.

Crtajući deo grafika posmatrane funkcije, Slika 1, potvrđujemo sve što smo do sad zaključili o ovoj graničnoj vrednosti. Vidimo da se vrednosti posmatrane funkcije približavaju (stabilizuju oko) vrednosti $L = 4$, kada se x približava vrednosti $a = 2$, bilo sa leve, bilo sa desne strane.

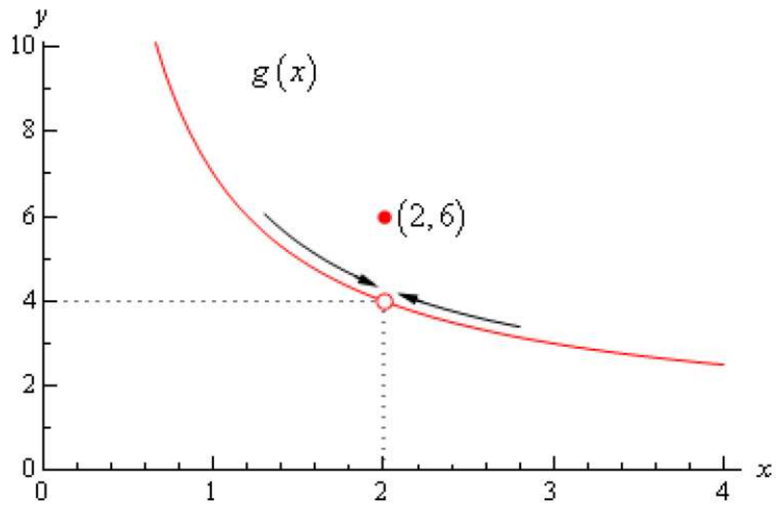


Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$ u okolini tačke $x = 2$.

Primer 1.2. *Pokušajmo da odredimo vrednost* $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, *ako je* $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$.

Rešenje: Problem koji posmatramo u ovom primeru se samo malo razlikuje od prethodnog: funkcija koju smo posmatrali u prethodnom primeru je sada dodefinisana u tački $x = 2$ u kojoj određujemo limes. Međutim, za sve vrednosti levo i desno od tačke $x = 2$ ništa se nije promenilo, pa se ne menja ni naš zaključak: $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

Uočavamo da je $g(2) = 6 \neq \lim\limits_{x\to 2} g(x)$, čime još jednom naglašavamo da granična vrednost funkcije i vrednost funkcije nikako ne moraju da budu jednake, pa čak ni da istovremeno postoje ili ne postoje. I ovu situaciju smo ilustrovali grafikom, Slika 2.



Slika 2: Grafik funkcije $y = g(x)$ (Primer 1.2) u okolini tačke $x = 2$.

Primer 1.3. *Ispitajmo postojanje granične vrednosti* $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Rešenje: Mada smo svesni svih ograničenja koja postoje kada koristimo tablicu vrednosti za procenu granične vrednosti funkcije, uradićemo to još jednom, vrlo obazrivo.

Uočavamo da funkcija $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ nije definisana u tački $x = 0$. Dalje, posmatramo vrednosti funkcije prikazane u tablici:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-1	-1	-1
0.1	1	-0.1	1
0.01	1	-0.01	1
0.001	1	-0.001	1

Na osnovu ovih vrednosti, mogli bismo zaključiti da je traženi limes jednak 1. Međutim, ukoliko ispitamo vrednosti funkcije u još nekoliko tačaka bliskih nuli, dobijamo:

$$f(\frac{1}{2001}) = \cos(2001\pi) = -1 \ , \qquad f(\frac{2}{2001}) = \cos(\frac{2001\pi}{2}) = 0 \ , \qquad f(\frac{4}{4001}) = \cos(\frac{4001\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da ne postoji vrednost oko koje se posmatrana funkcija stabilizuje kad se x približava vrednosti 0. Posmatrajući grafik funkcije, Slika 3, vidimo da ona sve brže osciluje dok se x približava nuli. Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da tražena granična vrednost ne postoji.

Sad kad smo stekli određenu ideju o tome šta je granična vrednost, možemo navesti i njenu formalnu definiciju. Pre svega, uočimo da skup tačaka x koje su "blizu" tačke a možemo opisati na sledeći način:

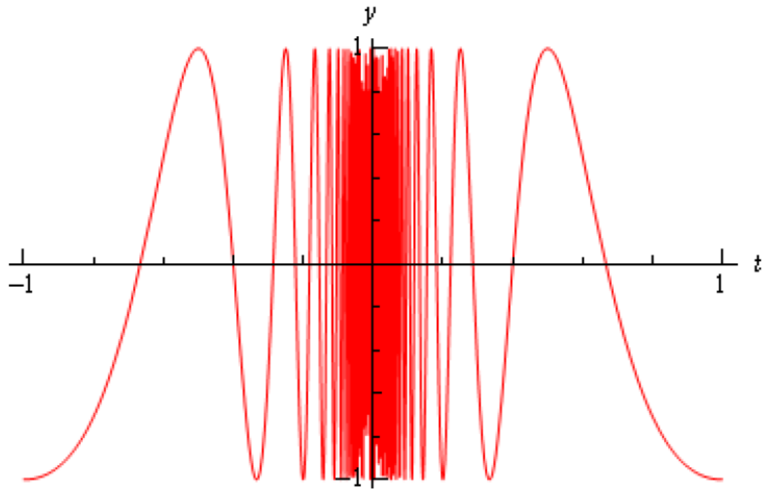
$$|x - a| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad -\delta < x - a < \delta \quad \Leftrightarrow \quad x \in (a - \delta, a + \delta)$$

za neku malu vrednost $\delta > 0$. Interval $(a - \delta, a + \delta)$ se zove δ-okolina tačke a. Slično, ε-okolina tačke L, za proizvoljno malu vrednost $\varepsilon > 0$, je skup tačaka $f(x)$ takvih da je

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \ .$$

Vrednosti $f(x)$ nalaze se proizvoljno blizu tačke L.

Koristeći ovu notaciju, sada možemo zapisati:



Slika 3: Grafik funkcije $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ u okolini tačke $x = 0$.

Definicija 1.1. *Broj L je granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, koja je tačka nagomilavanja skupa D, akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D \setminus \{a\})(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)\,.$$

Sa D je označen domen funkcije f. Ponovo uočavamo da tačka a ne mora da pripada skupu D (isključena je iz razmatranja o graničnoj vrednosti), kao i da je skup vrednosti x koje razmatramo simetričan u odnosu na tačku a - biramo vrednosti x i sa leve, i sa desne strane tačke a.

Važno je uočiti i da tačka a u kojoj izračunavamo limes ne može da bude baš bilo kakva; ona ne mora da pripada domenu funkcije, ali mora da ima osobinu da u svakoj njenoj okolini postoji beskonačno mnogo tačaka domena funkcije D. Takva tačka se zove *tačka nagomilavanja* skupa D. Granične vrednosti tražimo isključivo u tačkama nagomilavanja domena.

Primer 1.4. *Pokažimo, koristeći definiciju, da je $\lim\limits_{x\to 2} 5x = 10$.*

Rešenje: U ovom slučaju je $f(x) = 5x$, $\;a = 2\;$ i $\;L = 10$. Da bismo pokazali da navedeno tvrđenje važi, trebalo (sledeći definiciju) bi da pokažemo da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in R \setminus \{2\})(|x-2| < \delta \Rightarrow |5x - 10| < \varepsilon).$$

Uočavamo da važi

$$|5x - 10| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 5|x-2| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}\,,$$

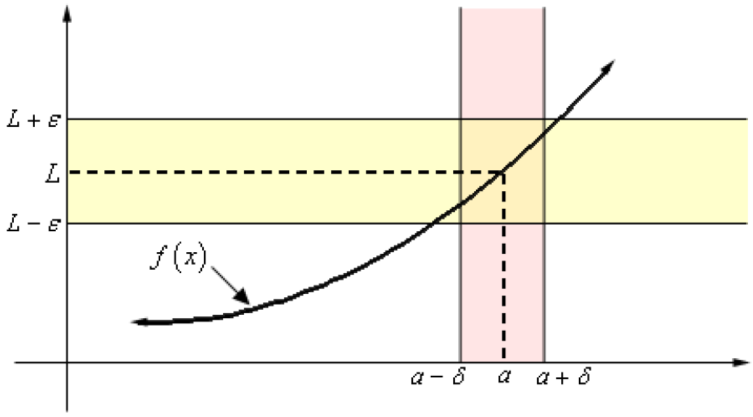
a to znači da za svako proizvoljno izabrano ε možemo uzeti da je $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ (tačnije, i svako δ koje je manje od $\dfrac{\varepsilon}{5}$ ispunjavaće uslov), i ispunićemo zahtev definicije:

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \Rightarrow \quad |5x-10| < 5|x-2| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

čime smo dokazali da je $\lim\limits_{x\to 2} 5x = 10$.

Grafički, definiciju možemo ilustrovati kao što je prikazano na Slici 4. Ukoliko je L granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, to znači da za svaku (ε-)okolinu tačke L možemo pronaći (simetričan) interval (δ-okolinu) oko tačke a tako da se ta okolina cela preslikava u uočenu ε-okolinu tačke L.

Ovo možemo "pročitati" i na sledeći način: ako zadamo vrednost ε i odredimo na osnovu nje položaj horizontalnog osenčenog (žutog) pojasa, (Slika 4), onda ispitujemo da li postoji mogućnost da postavimo vertikalni pojas - interval oko tačke a tako da pravougaonik sa centrom u tački (a, L) ima osobinu da grafik funkcije u njega "ulazi" i iz njega "izlazi" duž bočnih strana, a ne odozdo i odozgo. Ukoliko je moguće postaviti pravougaonik na taj način, to znači da je moguće naći odgovarajuće δ, i da je granična vrednost funkcije u tački a zaista vrednost L. U protivnom, možemo zaključiti da L nije granična vrednost posmatrane funkcije u tački a.

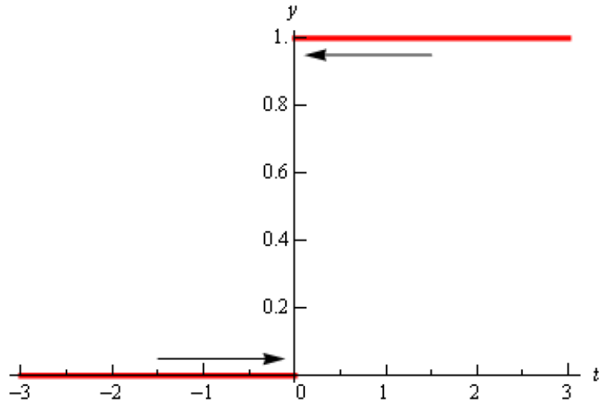


Slika 4: Ilustracija definicije granične vrednosti funkcije u tački. Ceo interval domena oko vrednosti a (interval na x-osi) unutar vertikalnog obojenog (ružičastog) pojasa preslikava se u odabrani horizontalni osenčeni interval oko vrednosti L (žuto obojeni pojas) na y osi.

Primer 1.3 pokazuje da se nikada ne može pronaći okolina tačke $x = 0$ takva da su u njoj sve vrednosti funkcije veoma bliske nekoj vrednosti L; zbog oscilovanja sa veoma velikom frekvencijom, praktično svaka okolina nule se preslikava u čitav interval $[-1, 1]$, za koji ne važi da je proizvoljno mali. Na kraju, navedimo jednu važnu osobinu: Ako funkcija ima graničnu vrednost u tački, onda je ta granična vrednost jedinstvena.

1.2 Leva i desna granična vrednost

Posmatrajmo funkciju $H(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0 \\ 1, & \text{za} \quad x \geq 0 \end{cases}$. Ova funkcija se zove Hevisajdova (Heaviside) funkcija, ili step-funkcija. Njen grafik je prikazan na Slici 5.



Slika 5: Grafik Hevisajdove funkcije u okolini tačke $x = 0$.

Ukoliko želimo da odredimo $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$, jasno je da nailazimo na problem.

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = A$ i pokušajmo da koristimo definiciju granične vrednosti. Treba da važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(|x - 0| < \delta \Rightarrow |H(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

Dakle, za pozitivne vrednosti x granična vrednost A bi trebalo da bude proizvoljno bliska vrednosti 1, a za negativne vrednosti x ta ista granična vrednost bi trebalo da bude proizvoljno bliska vrednosti 0. To nije moguće postići ni za jednu vrednost A. Ovo možemo potvrditi primerom.

Izaberimo, recimo, $\varepsilon = 0.25$. Tada bi trebalo da odredimo odgovarajuće $\delta > 0$ tako da

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |H(x) - A| < 0.25\,.$$

S obzirom na to da je $H(x)$ različito definisano za vrednosti x levo i desno od nule, uočavamo da se prethodno svodi na to da

$$\begin{aligned} &x \in (0, \delta) \quad \Rightarrow \quad |1 - A| < 0.25 \quad \Rightarrow \quad A \in (0.75, 1.25), \quad \text{jer je} \quad H(x) = 1,\\ &x \in (-\delta, 0) \quad \Rightarrow \quad |0 - A| < 0.25 \quad \Rightarrow \quad A \in (-0.25, 0.25), \quad \text{jer je} \quad H(x) = 0. \end{aligned}$$

Ovo, naravno, nije moguće ni za jednu vrednost A, jer navedeni intervali nemaju presek. Zaključujemo da $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$ ne postoji.

Prethodni primer veoma sugestivno navodi na uvođenje pojma *jednostrane* granične vrednosti.

Definicija 1.2. *Broj L_1 je leva granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in (a - \delta, a) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon)\,.$$

Ovo zapisujemo $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$.

Definicija 1.3. *Broj L_2 je desna granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in (a, a + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon)\,.$$

Ovo zapisujemo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$.

Na osnovu navedenog, nije teško zaključiti da je

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1.$$

Važno je uočiti da funkcija ima graničnu vrednost u tački a akko ima i levu i desnu graničnu vrednost u toj tački, i ako su one jednake. Drugim rečima,

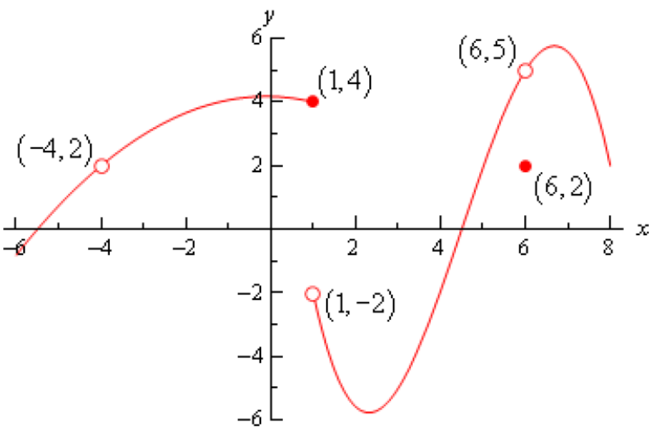
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = L\,.$$

Jednostrane granične vrednosti posmatramo i u situacijama kad funkcija nije definisana i levo i desno od posmatrane tačke. Tako je, na primer $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, a $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ ne postoji, jer je domen funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ skup nenegativnih realnih brojeva $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

Zaključimo sva navedena razmatranja još jednim ilustrativnim primerom:

Primer 1.5. *Za funkciju $y = f(x)$ čiji je grafik prikazan na Slici 6 odrediti sve navedene vrednosti i granične vrednosti:*

$$\begin{array}{llll} (a)\ f(-4) & (b)\ \lim\limits_{x\to -4^-} f(x) & (c)\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) & (d)\ \lim\limits_{x\to -4} f(x) \\ (e)\ f(1) & (f)\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) & (g)\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) & (h)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) \\ (i)\ f(6) & (j)\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) & (k)\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) & (l)\ \lim\limits_{x\to 6} f(x) \end{array} \tag{1}$$



Slika 6: Grafik funkcije $y = f(x)$, Primer 1.5.

Rešenje: S obzirom da su svi odgovori direktno čitljivi sa grafika, bez upuštanja u objašnjenja i diskusiju navodimo odgovore na postavljena pitanja:

$$
\begin{array}{llll}
(a)\ f(-4) \quad \text{ne postoji} & (b)\ \lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = 2 & (c)\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 2 & (d)\ \lim\limits_{x\to -4} f(x) = 2 \\
(e)\ f(1) = 4 & (f)\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4 & (g)\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2 & (h)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) \quad \text{ne postoji} \\
(i)\ f(6) = 2 & (j)\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = 5 & (k)\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = 5 & (l)\ \lim\limits_{x\to 6} f(x) = 5.
\end{array}
\tag{2}
$$

1.3 Operacije sa graničnim vrednostima

Do ovog trenutka nismo izračunali ni jednu graničnu vrednost. Uglavnom smo, analizirajući date funkcije procenjivali šta bi njihove granične vrednosti u pojedinim tačkama mogle biti. Takođe, naveli smo definiciju granične vrednosti, ali smo odmah shvatili da nam ona teško može poslužiti da izračunamo graničnu vrednost; uglavnom je koristimo da dokažemo da neka vrednost (koju sami na neki način odaberemo/pogodimo) jeste, ili nije, granična vrednost posmatrane funkcije.

Sa ciljem da konačno dođemo do postupka za izračunavanje neke granične vrednosti, navešćemo nekoliko operacija koje se mogu primeniti na granične vredosti.

Dakle, pretpostavimo da $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ postoje (to, u ovom trenutku, podrazumeva i da su obe konačni brojevi). Pretpostavimo i da je $c \in \mathbb{R}$. Tada važi:

1. $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \text{za} \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$
6. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\frac{1}{n}} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\frac{1}{n}}$
7. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

8. $\lim_{x\to a} x = a$

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

Neka od prethodnih svojstava su direktna posledica nekih drugih (kao, na primer, osobina 5, koja je direktna posledica osobine 3, ili osobina 9, koja je posledica osobine 5 za funkciju $f(x) = x$, i osobine 8). Ovde su sva svojstva navedena radi kompletnosti (i bez dokaza).

Napomenimo i da iste osobine važe i ako se svuda limes zameni jednostranim limesom.

Sada već postoje neke granične vrednosti koje možemo izračunati, koristeći samo gore navedene osobine.

Primer 1.6. *Izračunati* $\lim_{x\to -2}(3x^2 + 5x - 9)$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}(3x^2 + 5x - 9) &= \lim_{x\to -2} 3x^2 + \lim_{x\to -2} 5x - \lim_{x\to -2} 9 \\
&= 3 \lim_{x\to -2} x^2 + 5 \lim_{x\to -2} x - 9 \\
&= 3\left[\lim_{x\to -2} x\right]^2 + 5\cdot(-2) - 9 \\
&= 3(-2)^2 + (-10) - 9 \\
&= 3\cdot 4 + (-10) - 9 \\
&= -7
\end{aligned}$$

Uočimo da je i vrednost funkcije $P(x) = 3x^2 + 5x - 9$ u tački $x = -2$ jednaka dobijenoj graničnoj vrednosti, tj. $P(-2) = -7 = \lim_{x\to -2} P(x)$. Već nam je dobro poznato da granična vrednost funkcije nikako ne mora da bude jednaka vrednosti funkcije u posmatranoj tački, ali takođe znamo i da to nekad (kao, na primer, u ovom slučaju) može da se dogodi. Osobinu da im je granična vrednost u nekoj tački jednaka vrednosti u toj tački imaju i druge funkcije osim polinoma, i toj osobini ćemo se uskoro vratiti i preciznije je definisati. U ovom trenutku je korisno da napomenemo da ovu osobinu imaju sve elementarne funkcije, odnosno, da važi:

Granična vrednost svake elementarne funkcije u tački u kojoj je ta funkcija definisana, jednaka je vrednosti funkcije u toj tački.

To znači da je, na primer, za $x = a \in D$, gde je D domen funkcije,

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a\ , \quad \lim_{x\to a} e^x = e^a\ , \quad \lim_{x\to a} \ln x = \ln a\ , \quad \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad (Q(a) \neq 0).$$

Ovo su samo neki od primera. Ova osobina elementarnih funkcija uveliko olakšava izračunavanje graničnih vrednosti.

Iako nam prethodna zapažanja rešavaju mnoge probleme kada je reč o graničnim vrednostima, ipak ima situacija kada navedena pravila nisu dovoljna. Sledeći primer se odnosi na jednu takvu situaciju:

Primer 1.7. *Izračunati*

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x}$;

b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x - \sqrt{3x+4}}{4 - x}$.

Rešenje: Za oba navedena primera važi da funkcija nije definisana u tački u kojoj se traži granična vrednost. Takođe, pravilo da je granična vrednost količnika jednaka količniku graničnih vrednosti, a zatim pravilo da je granična vrednost polinoma u tački jednaka vrednosti polinoma u tački (analogno važi i za iracionalnu funkciju u drugom primeru, mada do sad još nismo formalno objasnili da je tako, ni zašto je tako), dovode do toga da zaključimo da su, u oba primera, granične vrednosti koje računamo neodređeni izrazi oblika " $\frac{0}{0}$ ". To znači da je neophodno uraditi još nešto da bi se tražene granične vrednosti odredile.

a) S obzirom da je vrednost u tački $x = 2$ polinoma u brojiocu jednaka 0, jasno je da je taj polinom deljiv sa $(x - 2)$, odnosno, da se može faktorisati tako da mu je jedan faktor $(x - 2)$. Isto važi i za polinom u imeniocu. Tada je $(x - 2)$ zajednički faktor brojioca i imenioca racionalne funkcije, i da se oni mogu skratiti. Nakon skraćivanja, ni brojilac, ni imenilac, nisu jednaki 0 u tački $x = 2$, pa, na osnovu prethodno navedenih pravila, izračunavamo graničnu vrednost uvrštavanjem $x = 2$ u dobijeni izraz.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+6}{x}\\ &= \frac{2+6}{2} = 4.\end{aligned}$$

Primetimo da smo (konačno) izračunali graničnu vrednosti kojom smo se bavili u Primeru 1.1.

b) Iako je u ovom primeru reč o iracionalnoj funkciji, ideja da "uklonimo neodređenost" iz izraza skraćivanjem zajedničkim faktorom $(x - 2)$ ostaje. Uobičajeni korak je proširivanje izraza onim što iracionalni deo dopunjava do razlike stepena (razlike kvadrata u ovom slučaju). Dalje je sve isto kao kod racionalnih funkcija.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{4-x} &= \lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{4-x}\cdot\frac{x+\sqrt{3x+4}}{x+\sqrt{3x+4}}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}\\ &= -\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{x+\sqrt{3x+4}}\\ &= -\frac{4+1}{4+\sqrt{3\cdot 4+4}}\\ &= -\frac{5}{8}\end{aligned}$$

Uočimo da su u oba primera tražene granične vrednosti neodređeni izrazi oblika $\frac{0}{0}$, ali da se daljim izračunavanjem dobijaju različite vrednosti. To je osnovna karakteristika neodređenih izraza - njihova vrednost može biti bilo šta.

Navešćemo (bez dokaza) još dve teoreme koje se odnose na granične vrednosti:

Teorema 1.1. *Ako je za sve vrednosti $x \in (a, b)$ zadovoljeno da je $f(x) \le g(x)$, onda za $c \in (a, b)$ važi da je $\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$.*

Teorema 1.2. *Ako je za sve vrednosti $x \in (a, b)$ zadovoljeno da je $f(x) \le h(x) \le g(x)$, i ako za $c \in (a, b)$ važi da je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$, onda je i $\lim_{x\to c} h(x) = L$.*

Iskoristićemo ovu teoremu u narednom primeru:

Primer 1.8. *Izračunati* $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$.

Rešenje: Data funkcija nije definisana u tački $x = 0$. Uz to, znamo i da $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ ne postoji (praktično, to je isti problem kao i u Primeru 1.3).

Uočimo da važi da je, za svako $x \neq 0$,

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1 ,$$

a da je, množenjem sa x^2 (koje je pozitivno, pa se ne menja smer nejednakosti)

$$-x^2 \leq x^2 \cos\frac{1}{x} \leq x^2 .$$

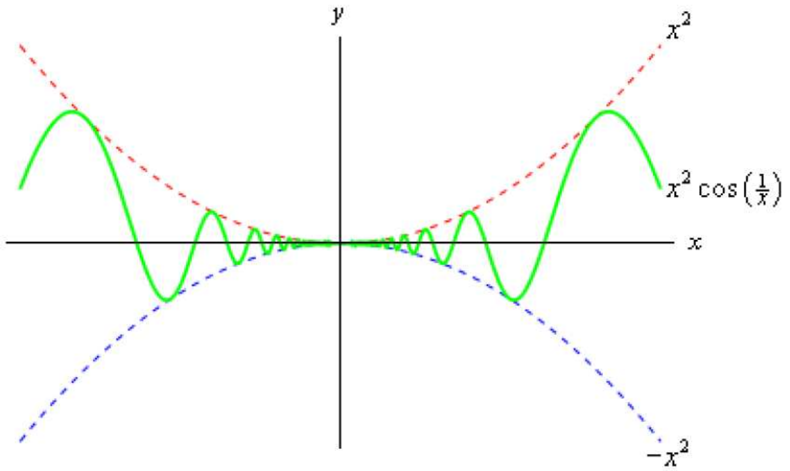
Kako je

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0,$$

na osnovu Teoreme 1.2, uzimajući da je $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$, važi i

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0.$$

Grafici funkcija $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ su prikazani na Slici 7; "uklještenje" u okolini $x = 0$ koje smo koristili se lako uočava.



Slika 7: Grafici funkcija $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$.

Još jedna (poznata) granična vrednost, koja se dalje može koristiti za određivanje drugih graničnih vrednosti trigonometrijskih funkcija, se može izračunati korišćenjem Teoreme 1.2.

Primer 1.9. *Izračunati* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Rešenje: Uočavamo da, mada su i funkcija $y = \sin x$ i funkcija $y = x$ definisane u $x = 0$, njihov količnik nije. Takođe, direktnim uvrštavanjem (koristeći ranije definisana pravila za izračunavanje graničnih vrednosti) dobijamo neodređeni izraz "$\frac{0}{0}$". Znamo da moramo još malo da se potrudimo da bismo odredili ovakvu graničnu vrednost.

Posmatrajući trigonometrijsku kružnicu, lako možemo uočiti da je, za $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ zadovoljeno

$$\sin x < x < \mathrm{tg} x.$$

Ovo se može potvrditi na sledeći način: ako krak ugla x[rad] seče kružnicu u tački A, a tangensnu osu u tački B, i ako je $C(1, 0)$ tačka dodira kružnice i tangensne ose, onda je površina trougla određenog tačkama OCA manja od površine kružnog isečka koji odgovara luku AC, a ova je opet manja od površine trougla određenog tačkama ACB (prva figura je podskup druge, a ova opet, podskup treće). Dalje je

$$P(\triangle\, OCA) = \frac{1 \cdot \sin x}{2}\,, \qquad P(\text{isečka}\measuredangle COA) = \frac{1^2 \cdot x}{2}\,, \qquad P(\triangle\, OCB) = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}\,.$$

Recipročne vrednosti navedenih veličina tada formiraju niz nejednakosti

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x},$$

a nakon množenja sa $\sin x$ (ova funkcija je, za posmatrane vrednosti x pozitivna), važi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} 1$, na osnovu Teoreme 1.2 važi i da je $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Kako je $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ parna funkcija (kao količnik dve neparne funkcije), važi da je $f(-x) = f(x)$, pa zaključak analogan ovom koji smo izveli o ponašanju funkcije desno od nule važi i levo od nule. Tačnije, važi da je i $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Odatle konačno zaključujemo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1.4 Uopštenje pojma granične vrednosti

a) Beskonačna granična vrednost (u konačnoj tački)

Ukoliko bismo postavili pitanje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$, i pokušali na njega da odgovorimo, recimo, tako što formiramo tablicu vrednosti funkcije za neke vrednosti x koje se približavaju nuli sa leve i desne strane, uočili bismo da:

- vrednosti funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ neograničeno rastu dok se x približava nuli sa desne strane (tj., preko pozitivnih vrednosti);
- vrednosti funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ neograničeno opadaju dok se x približava nuli sa leve strane (tj., preko negativnih vrednosti).

Ova zapažanja su potpuno u skladu sa grafikom funkcije, Slika 8.

Opisano ponašanje možemo smatrati uopštenjem situacije da se ponašanje funkcije "stabilizuje" u okolini neke tačke, u smislu da funkcija ("stabilno") neograničeno raste (ili opada). Samim tim, dolazimo i do uopštenja pojma granične vrednosti. Definicije koje precizno opisuju ovu vrstu graničnih vrednosti su:

Definicija 1.4. *Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ima beskonačnu graničnu vrednost u (konačnoj) tački a ukoliko važi*

$$(\forall M > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \ (\forall x \in D \setminus \{a\})\ (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)\,,$$

ili

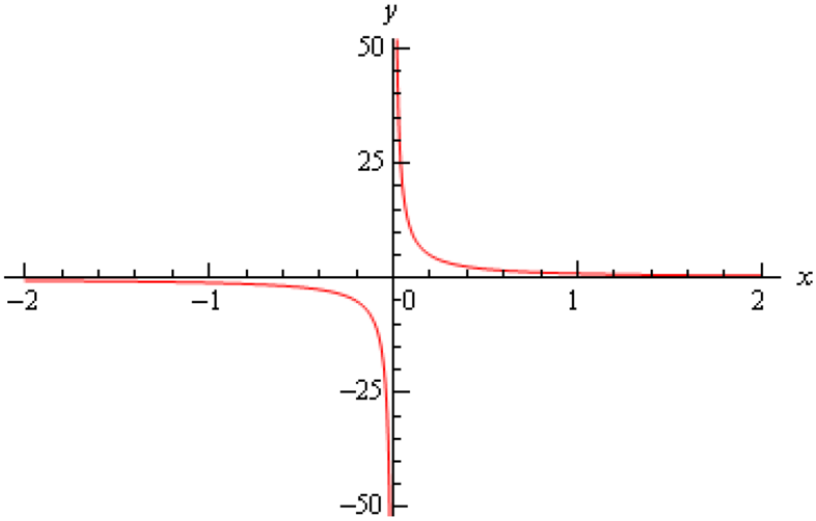
$$(\forall N < 0)\ (\exists \delta > 0)\ \ (\forall x \in D \setminus \{a\})\ (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N)\,.$$

U prvom slučaju pišemo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

a u drugom

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$



Slika 8: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ u okolini tačke $x = 0$.

Uočimo, međutim, da je u slučaju funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$, leva granična vrednost u $x = 0$ različita od desne, odnosno da važi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty\ , \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\ , \qquad \text{i da zbog toga} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{ne postoji.}$$

Primeri beskonačnih graničnih vrednosti u konačnim tačkama karakteristični su za racionalne funkcije (u tačkama u kojima ove funkcije nisu definisane, odnosno u nulama polinoma u imeniocu racionalne funkcije). Jedan takav primer je

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty\ , \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty\ , \qquad \text{i pri tome} \quad \lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3} \quad \text{ne postoji.}$$

Takođe, logaritamska funkcija, kao i, recimo, tangensna funkcija, neograničeno rastu, ili opadaju, u blizini konačne tačke. Tako je, na primer,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \mathrm{tg} x = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \mathrm{tg} x = \infty\ .$$

Ostaje da dopunimo spisak operacija sa graničnim vrednostima, u skladu sa ovim uopštenjem pojma granične vrednosti. Pretpostavimo, dakle, da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, gde je L konačan broj. Tada važi:

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = (\infty \pm L) = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = (\infty \cdot L) = \infty, \quad$ ako je $\quad L > 0$
3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = (\infty \cdot L) = -\infty, \quad$ ako je $\quad L < 0$
4. $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = (\dfrac{\infty}{L}) = \infty, \quad$ ako je $\quad L > 0$
5. $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = (\dfrac{\infty}{L}) = -\infty, \quad$ ako je $\quad L < 0$

$$6. \qquad \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = (\frac{L}{\infty}) = 0$$

Analogni izrazi važe i ako je $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Takođe, ako je $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, prethodnom spisku operacija sa (uopštenim) graničnim vrednostima možemo dodati i

$$7. \qquad \lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = (\infty + \infty) = \infty$$

$$8. \qquad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = (\infty\cdot\infty) = \infty.$$

Iako smo u prethodnom tekstu naveli veliki broj pravila za računanje sa graničnim vrednostima, postoji nekoliko situacija za koje nismo naveli rezultujuće granične vrednosti. U stvari, ispostavlja se da postoji tačno sedam takozvanih *neodređenih izraza* - izraza za koje, bez dodatnog razmatranja, ne možemo dati odgovor o graničnoj vrednosti, a nakon što obavimo pomenuto dodatno razmatranje, možemo, dobiti različite odgovore, koji zavise od konkretnih funkcija, a ne samo od njihovih graničnih vrednosti. Dakle, bez obzira o kojim funkcijama je reč, ukoliko znamo da obe teže beskonačnosti u nekoj tački, znamo i da njihov zbir (kao i njihov proizvod) teže beskonačnosti. Međutim, odgovor o tome kako se ponaša njihova razlika, ili njihov količnik ne možemo dati bez dodatnog razmatranja, pri čemu je oblik datih funkcija od presudnog značaja. Na ovakvu situaciju smo već naišli rešavajući granične vrednosti neodređenih izraza "$\frac{0}{0}$" (pogledati, recimo, Primer 1.7).

Sedam neodređenih izraza treba zapamtiti, i uvek imati na umu da zahtevaju dodatno razmatranje. To su izrazi oblika

$$\frac{0}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad 0\cdot\infty\,, \quad \infty-\infty\,, \quad 1^{\infty}\,, \quad 0^0\,, \quad \infty^0\,.$$

(Ovi, i slični, izrazi se često navode pod znacima navoda, da bi se naglasilo da su zapisi samo formalni i da nemaju značenje računskih operacija u smislu na koji smo navikli!)

b) Granična vrednost u beskonačnoj tački.

Kada je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $(-\infty, \infty)$, ili (t, ∞), ili $(-\infty, t)$, često je od značaja ispitati kako se funkcija ponaša kad se x neograničeno povećava (ili neograničeno smanjuje), odnosno, kada se približava beskonačnim rubnim tačkama domena. Ovo pitanje povezujemo sa još jednim uopštenjem pojma granične vrednosti: definišemo graničnu vrednost funkcije u beskonačnosti.

Formalne definicije su:

Definicija 1.5. *Broj L_1 je granična vrednost funkcije $f(x)$ kada $x\to\infty$ ("u beskonačnosti") akko*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists M>0)\ \ (\forall x\in D)(x>M\ \Rightarrow\ |f(x)-L_1|<\varepsilon)\,.$$

Ovo zapisujemo: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$.

Definicija 1.6. *Broj L_2 je granična vrednost funkcije $f(x)$ kada $x\to-\infty$ akko*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N<0)\ \ (\forall x\in D)(x<N\ \Rightarrow\ |f(x)-L_2|<\varepsilon)\,.$$

Ovo zapisujemo: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$.

Dakle, činjenica da funkcija ima graničnu vrednost kada $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ znači da se vrednosti funkcije proizvoljno približavaju uočenoj graničnoj vrednosti, ukoliko se vrednost argumenta x dovoljno poveća (ili dovoljno smanji).

Kao primer ponovo možemo posmatrati funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Posmatrajući njen grafik, prikazan na Slici 8, možemo uočiti da je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Pokušajmo ovo da potvrdimo koristeći definiciju.

Treba da pokažemo da za $L_1 = 0$ postoji vrednost M takva da za sve vrednosti $x > M$ važi da je $|f(x) - L_1| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$. Jasno je da ako za proizvoljno izabrano pozitivno ε izaberemo M tako da je $M = \frac{1}{\varepsilon}$ (ili više), ispunjavamo zahtev definicije i potvrđujemo da je tražena granična vrednost jednaka 0.

Analogno rezonujemo i u slučaju granične vrednosti za $x \to -\infty$, gde treba da utvrdimo da je za dovoljno malo x $(x < N < 0)$ zadovoljeno da je $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = -\frac{1}{x} < \varepsilon$, ma kako malo ε bilo. (Uočimo da je za negativne vrednosti x data funkcija negativna, što koristimo u izračunavanju apsolutne vrednosti.) Dalje je jasno da će traženi uslov biti ispunjen za $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, pa zaključujemo da vrednost N treba izabrati tako da bude $N = -\frac{1}{\varepsilon}$.

Rezultat opisan u prethodnom primeru možemo uopštiti. Biće nam koristan u mnogim daljim razmatranjima i konkretnim računanjima graničnih vrednosti. Dakle, za $c \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{Q}^+$ važi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^r} = 0, \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0. \tag{3}$$

(U drugom slučaju treba obratiti pažnju na definisanost funkcije $f(x) = x^r$ za negativne vrednosti x.)

Napomenimo da i granična vrednost funkcije u beskonačnosti može biti beskonačno velika. Takođe, sve što je rečeno o operacijama sa graničnim vrednostima u konačnim tačkama važi i za ovo uopštenje, odnosno za granične vrednosti u beskonačnim tačkama.

Navešćemo nekoliko primera funkcija čije granične vrednosti u beskonačnosti mogu često biti od značaja u radu, odnosno na koje ćemo često nailaziti.

Primer 1.10. *Izračunati*

a) $\lim_{x \to \infty} (2x^4 - x^2 + 8x)$;

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7}$;

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + x^6}{1 - 5x^3}$;

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x - 9}{2x^4 + 3x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$;

Rešenje: Svi navedeni limesi spadaju u grupu neodređenih izraza. Prvi je oblika $(\infty - \infty)$, a ostali su oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ideja koju koristimo u prvom primeru se koristi i u svim ostalim. Svodi se na izdvajanje najvišeg stepena, odnosno najvećeg (po apsolutnoj vrednosti) člana u polinomu (ili iracionalnom izrazu). U prvom slučaju to vodi do određenog izraza oblika $(c \cdot \infty = \infty)$, a u preostalim će omogućiti skraćivanje razlomka i svođenje na jedan od određenih izraza $(\dfrac{c_1}{c_2} = c$, ili $\dfrac{\infty}{c} = \infty$, ili $\dfrac{c}{\infty} = 0$, za neke vrednosti $c \in \mathbb{R})$.
Konačno, dobijamo:

$$a)\ \infty \qquad b)\ -\frac{2}{5} \qquad c)\ -\infty \qquad d)\ 0 \qquad e)\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad f)\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Navešćemo malo više detalja iz postupka izračunavanje samo za dva poslednja slučaja. Iskoristićemo, osim rezultata (3), još i to da je $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x, & \text{za} \quad x < 0 \\ x, & \text{za} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(3+\frac{6}{x^2})}}{x(\frac{5}{x}-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{(3+\frac{6}{x^2})}}{x(\frac{5}{x}-2)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{(3+\frac{6}{x^2})}}{x(\frac{5}{x}-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(3+\frac{6}{x^2})}}{(\frac{5}{x}-2)} = \frac{\sqrt{3}}{-2} .
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(3+\frac{6}{x^2})}}{x(\frac{5}{x}-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{(3+\frac{6}{x^2})}}{x(\frac{5}{x}-2)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{(3+\frac{6}{x^2})}}{x(\frac{5}{x}-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{(3+\frac{6}{x^2})}}{(\frac{5}{x}-2)} = \frac{-\sqrt{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3}}{2} .
\end{aligned}$$

Uočićemo i da je granična vrednost polinoma u beskonačnoj tački jednaka graničnoj vrednosti njegovog vodećeg člana za $x \to \infty$. Ovo takođe često koristimo pri izračunavanju limesa.

Osim polinoma, racionalnih i iracionalnih funkcija, i eksponencijalna, logaritamska, kao i arkus funkcije (tangensa i kotangensa) definisane su za beskonačne vrednosti x i od značaja je posmatrati njihove granične vrednosti u beskonačnosti. Navodimo granične vrednosti nekih od pomenutih elementarnih funkcija u beskonačnosti:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\ , \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\ , \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty\ , \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\ , \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Sve ove vrednosti se direktno čitaju sa grafika elementarnih funkcija.

Koristeći navedene granične vrednosti, možemo izračunati granične vrednosti nekih složenih funkcija:

Primer 1.11. *Izračunati*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(2x^4-x^2+8x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{(2-4x-8x^2)}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{10x}-4e^{6x}+3e^x+2e^{-2x}-9e^{-15x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6e^{4x}-e^{-2x}}{8e^{4x}-e^{2x}+e^{-x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2-5x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\,(x^3-5x+6)$.

Rešenje: Kombinujući postupak koji smo predložili za granične vrednosti iz prethodnog primera, čime određujemo graničnu vrednost argumenata eksponencijalne, logaritamske, i funkcije arkus tangens, sa znanjem o graničnim vrednostima samih elementarnih funkcija, lako dolazimo do traženih graničnih vrednosti. Ovu izuzetno korisnu ideju za izračunavanje limesa složene funkcije tako što izračunavamo vrednost funkcije u graničnoj vrednosti argumenta ćemo malo kasnije i formalno navesti i objasniti.

Konačno, dobijamo:

$$a)\ \infty \qquad b)\ 0 \qquad c)\ \infty \qquad d)\ \frac{3}{4} \qquad e)\ -\infty \qquad f)\ \frac{\pi}{2}.$$

2 Beskonačno male i beskonačno velike veličine

Do sad smo već prihvatili termin *beskonačno mala veličina u okolini tačke* a za funkciju (veličinu) $f(x)$ koja ima osobinu da je $f(x)\neq 0$ i da je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Analogno, za funkciju $g(x)$ za koju važi da je $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\infty$ kažemo da je beskonačno velika veličina u okolini tačke a.

Već smo shvatili da nisu sve beskonačno velike veličine jednako beskonačno velike, niti to važi za beskonačno male veličine. Među njima ima razlike; možemo ih porediti na sledeći način:
Ako su $f(x)$ i $g(x)$ dve beskonačno male veličine u okolini tačke $x=a$, i ako je $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$, onda

- ako je $L=0$, onda $f(x)$ brže teži nuli u okolini tačke a, i kažemo da je $f(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda od $g(x)$;
- ako je L beskonačno veliko, onda $g(x)$ brže teži nuli u okolini tačke a, i kažemo da je $g(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda od $f(x)$;
- ako je $L\neq 0$, (L konačno) onda kažemo da su f i g beskonačno male veličine istog reda u okolini tačke a;
- ako je $L=1$, kažemo da se funkcije f i g isto ponašaju u okolini tačke $x=a$ i to zapisujemo $f\sim g$.

Ukoliko granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ne postoji, kažemo da su funkcije f i g neuporedive u okolini tačke $x=a$.

Na primer, funkcija $f(x)=x^2$ je beskonačno mala veličina višeg reda od (beskonačno male veličine) funkcije $g(x)=x$ u okolini nule. Funkcije $f(x)=\sin x$ i $g(x)=x$ su beskonačno male veličine koje se isto ponašaju u okolini tačke $x=0$.

Potpuno analognu klasifikaciju možemo uvesti i za dve beskonačno velike veličine.

Uočimo da poznavanje ponašanja funkcije u okolini neke (konačne ili beskonačne) tačke može značajno da nam olakša izračunavanje graničnih vrednosti, pa i druga ispitivanja u vezi sa funkcijom. Recimo, već smo uočili da ponašanje polinoma u beskonačnoj tački možemo poistovetiti sa ponašanjem njegovog vodećeg člana, a to nam je znatno pojednostavilo određivanje graničnih vrednosti racionalnih funkcija u beskonačnim tačkama.

3 Asimptote funkcije

Asimptote funkcije su krive koje se, u okolini beskonačno daleke tačke, beskonačno približavaju posmatranoj funkciji. Koristeći granične vrednosti, ovo možemo zapisati na sledeći način:

Definicija 3.1. *Kriva $y = \varphi(x)$ je asimptota funkcije $y = f(x)$ kad $x \to \infty$ akko važi*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - \varphi(x)) = 0.$$

Analogna definicija važi i za $x \to -\infty$.

U najvećem broju slučajeva interesuju nas asimptote koje su linearne funkcije. Drugim rečima, pokušavamo da odredimo da li postoji prava $\varphi(x) = kx + m$ kojoj se grafik funkcije koju posmatramo beskonačno približava kada $x \to \infty$ (ili kada $x \to -\infty$). U skladu sa upravo uvedenom definicijom, ispitujemo da li postoje koeficijenti $k, m \in \mathbb{R}$, takvi da važi

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - m) = 0.$$

Dalje je

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = m,$$

a deljenjem jednakosti sa x dobijamo

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{f(x)}{x} - k) = \lim_{x\to\infty} \frac{m}{x} = 0.$$

Prethodno će biti zadovoljeno ako je

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\,, \qquad \text{a zatim i} \qquad m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Ovim smo opisali postupak za određivanje koeficijenata prave koja ima osobinu asimptote posmatrane funkcije za $x \to \infty$. Analogno se definišu parametri asimptote za $x \to -\infty$. Veoma je važno napomenuti da je ponašanje funkcije kada $x \to \infty$ u opštem slučaju nezavisno od ponašanja funkcije za $x \to -\infty$ i da se ova ponašanja nezavisno i ispituju.

Naravno, navedene granične vrednosti ne moraju da postoje, a tada posmatrana funkcija nema asimptotu. Ukoliko navedene granične vrednosti postoje, i ukoliko je $k \neq 0$, prava $y = kx+m$ je *kosa asimptota* funkcije $y = f(x)$ za $x \to \infty$ (analogno za $x \to -\infty$).

Ukoliko je $k = 0$, asimptota je oblika $y = m$. Ova prava je u specijalnom položaju - paralelna je sa x osom. Takva asimptota se naziva *horizontalna asimptota*. Naravno, kako je horizontalna asimptota samo specijalan slučaj kose asimptote, a funkcija se ne može istovremeno beskonačno približavati (za iste vrednosti x) dvema različitim pravama, zaključujemo da funkcija ne može imati istovremeno i horizontalnu i kosu asimptotu (za $x \to \infty$, odnosno, posebno, za $x \to -\infty$).

Korisno je uočiti i da horizontalnu asimptotu možemo odrediti ne samo kao specijalni slučaj kose, tj. dobijajući da je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, već i računajući

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L\ ;$$

ukoliko je L konačan broj, onda funkcija $y = f(x)$ ima horizontalnu asimptotu kada $x \to \infty$. Njena horizontalna asimptota je prava $y = L$.

Analogna razmatranja važe i za $x \to -\infty$.

Još jedan specijalni slučaj asimptote je *vertikalna asimptota.* Ona postoji ukoliko se funkcija $y = f(x)$ beskonačno približava (vertikalnoj) pravoj $x = a$ (ovde je, prirodno, a konačna vrednost). Sasvim je jasno da to znači da se funkcija neograničeno povećava u (levoj i/ili desnoj) okolini tačke $x = a$. Koristeći znanja o graničnim vrednostima, možemo definisati kriterijum:

Definicija 3.2. *Funkcija $y = f(x)$ ima u (konačnoj) tački $x = a$ vertikalnu asimptotu $x = a$ akko je*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \textit{ili} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty\ ,$$

i/ili

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \textit{ili} \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Ukoliko su i leva i desna granična vrednost funkcije u tački a beskonačne, funkcija ima dvostranu asimptotu, a ukoliko je samo jedna od graničnih vrednosti beskonačna, funkcija $y = f(x)$ ima jednostranu vertikalnu asimptotu u posmatranoj tački.

Asimptotsko ponašanje funkcija može ispoljiti u rubnim tačkama domena, tako da u tim tačkama i izračunavamo granične vrednosti i donosimo zaključke o postojanju asimptota. Pri tome, beskonačni limesi u konačnim rubnim tačkama domena ukazuju na postojanje vertikalnih asimptota (obavezno ispitujemo i levu i desnu graničnu vrednost, ukoliko je to u skladu sa domenom funkcije!), a konačni limesi u beskonačnim tačkama ukazuju na postojanje horizontalnih (odnosno kosih) asimptota. Važno je obratiti pažnju da funkcija koja nije definisana kada $x \to \infty$ i/ili $x \to -\infty$ ne može imati ni horizontalne, ni kose asimptote!

Ilustrovaćemo postupak određivanja asimptota na primeru jedne racionalne funkcije.

Primer 3.1. *Odrediti asimptote funkcije* $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

Rešenje: Kako se asimptote mogu pojaviti u rubnim tačkama domena funkcije, određivanje domena je prvi, i nezaobilazan, posao. Domen date racionalne funkcije je $D = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Vertikalna asimptota

Konačna rubna tačka domena je, dakle, vrednost $x = -1$, a funkcija je definisana i levo i desno od nje. To znači da ćemo ispitati i levu i desnu graničnu vrednost u $x = -1$ i utvrditi da li funkcija tu ima vertikalnu asimptotu. Ta tačka je i jedina konačna rubna tačka domena, pa tu postoji i jedina mogućnost za postojanje vertikalne asimptote.

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2}{1+x} = -\infty$, jer je brojilac ovog razlomka uvek pozitivan, a imenilac je negativan (i blizak nuli) za vrednosti x malo manje od -1.

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2}{1+x} = \infty$, jer je brojilac ovog razlomka uvek pozitivan, a imenilac je pozitivan (i blizak nuli) za vrednosti x malo veće od -1.

Kako u konačnoj tački funkcija ima beskonačnu graničnu vrednost, zaključujemo da tu ima i vertikalnu asimptotu. Prava $x = -1$ je obostrana vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota

Kako je

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{1+x} = -\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{1+x} = \infty$$

odnosno, kako funkcija ima beskonačnu graničnu vrednost u beskonačnoj tački (beskonačnim tačkama), zaključujemo da horizontalna asimptota ove funkcije ne postoji. To ostavlja mogućnost za postojanje kose asimptote.

Kosa asimptota

Izračunavamo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1=k,\qquad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1=m.$$

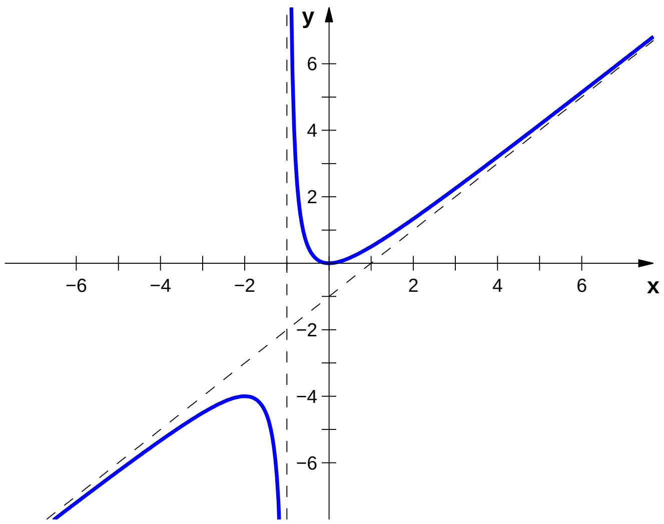
Odavde zaključujemo da je prava $y=x-1$ kosa asimptota date funkcije za $x\to\infty$.

Lako utvrđujemo da važi i da je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1\ ,\quad \text{i}\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1\ ,$$

pa zaključujemo da je (ista) prava $y=x-1$ kosa asimptota date funkcije i za $x\to-\infty$.

Na Slici 9 je prikazan grafik funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ sa njenom vertikalnom i kosom asimptotom.



Slika 9: Grafik funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$, sa vertikalnom i kosom asimptotom.

4 Neprekidnost funkcije

Neformalno rečeno, funkcija $f(x)$ je neprekidna ako se njen grafik može nacrtati bez podizanja olovke sa papira. Sad kad smo sigurni da ideja neprekidnosti, kada je reč o funkcijama, nije drugačija od našeg intuitivnog shvatanja pojma neprekidnosti (recimo, linije), možemo pokušati da ovaj pojam formalno, i precizno, definišemo.

Počećemo sa pojmom *neprekidnosti funkcije u tački.*

Definicija 4.1. *Funkcija $f:D\mapsto\mathbb{R}$ je neprekidna u tački $a\in D$ akko*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ \ (\forall x\in D)\ (|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)\,.$$

Ova definicija je jako slična definiciji granične vrednosti funkcije u tački a. Ako obratimo pažnju na razliku, uočavamo

- tačka a pripada domenu D funkcije f u definiciji neprekidnosti;
- tačka a je tačka nagomilavanja skupa D, u kojoj f ne mora da bude definisana, kada definišemo graničnu vrednost.

Ova razlika implicira neka važna zapažanja o odnosu neprekidnosti i postojanja granične vrednosti u tački:
Ukoliko funkcija nije definisana u tački a, ona u toj tački može imati graničnu vrednost, ali pitanje neprekidnosti u toj tački nije sasvim jednostavno. Kako je uslov za ispunjenost definicije neprekidnosti taj da $f(a)$ postoji, ukoliko to nije slučaj ne možemo tvrditi da definicija neprekidnosti nije ispunjena (osobine logičke operacije implikacije), pa zaključujemo da je, u tački u kojoj nije definisana, funkcija (trivijalno) neprekidna. Ovakvo shvatanje nije sasvim intuitivno, i izaziva nedoumice, pa i neslaganja. Jedan način da se problem izbegne je da se insistira da se o neprekidnosti funkcije (a samim tim i o "prekidnosti") govori samo u tačkama u kojima je ona definisana. Mi ćemo ovo imati na umu, ali nećemo biti suviše isključivi po tom pitanju.

Posmatrajući definicije neprekidnosti i granične vrednosti možemo zaključiti da je funkcija neprekidna u tački a ako je njena granična vrednost u toj tački jednaka njenoj vrednosti u toj tački. Ovim smo zaista došli do sasvim praktičnog uslova neprekidnosti funkcije, koji ćemo koristiti u radu. Činjenica je da Definicija 4.1 nije sasvim zgodna za ispitivanje neprekidnosti konkretnih funkcija u konkretnim tačkama, i da će nam neki "operativniji" pristup dobro doći.

Definicija 4.2. *Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $a \in D$ akko*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\,.$$

Ova definicija podrazumeva da, za neprekidnu funkciju $f(x)$, $f(a)$ postoji, kao i da postoji granična vrednost funkcije u tački a (to je jasno iz postavljenog uslova jednakosti leve i desne granične vrednosti). Konačno, granična vrednost i vrednost u tački a moraju biti jednake.

Uočimo da funkcija može imati graničnu vrednost, a ne biti neprekidna u posmatranoj tački. Ovakav slučaj ilustrovan je u Primeru 1.2.

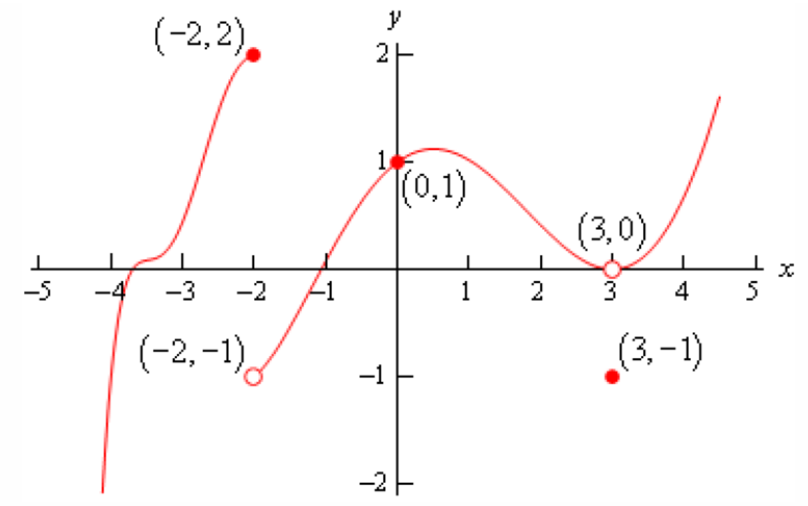
Ukoliko funkcija nije neprekidna u nekoj tački, to može biti posledica nekoliko razloga: bilo koje od tri vrednosti koje se posmatraju u Definiciji 4.2 (vrednost funkcije, leva i desna granična vrednost) mogu da ne postoje, ili bilo koja od jednakosti među njima može da ne bude zadovoljena. U vezi sa tim razlikujemo i vrste prekida.

- Ukoliko $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ postoji, ali nije jednak sa $f(a)$ (ili $f(a)$ ne postoji), prekid je *otklonjiv.* Funkcija se može dodefinisati, ili redefinisati, i postaće neprekidna.
- Ukoliko $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, pri čemu obe vrednosti postoje i konačne su, funkcija f u tački a ima *skok.* U ovom slučaju prekid je neotklonjiv. Skok i otklonjivi prekid spadaju u grupu *prekida prve vrste.*
- Ukoliko leva ili desna granična vrednost funkcije u tački a ne postoje, ili nisu konačne, funkcija ima *prekid druge vrste.* (Prekidi druge vrste su neotklonjivi.)

Primer 4.1. *Ispitati neprekidnost funkcije prikazane na Slici 10 u tačkama*
(a) $x = -2$, *(b)* $x = 0$, *(c)* $x = 3$.

Rešenje:
(a) Sa grafika čitamo da je $f(-2) = 2$, kao i da je

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -1 \neq 2 = \lim_{x\to -2^-} f(x)\,.$$



Slika 10: Grafik funkcije $y = f(x)$ posmatrane u Primeru 4.1

Odatle zaključujemo da data funkcija ima *skok* u tački $x = -2$.

(b) Kako je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \ ,$$

data funkcija je neprekidna u tački $x = 0$.

(c) Vidimo da je $f(3) = -1$, i da je

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0 \neq 3 \ .$$

Zaključujemo da posmatrana funkcija u tački $x = 3$ ima *otklonjivi prekid.* Da bi postala neprekidna treba je redefinisati, odnosno treba definisati $f(3) = 0$.

Neprekidne funkcije i njihove osobine

Funkcija je neprekidna nad skupom ukoliko je neprekidna u svakoj tački posmatranog skupa. Ukoliko je funkcija neprekidna nad svojim domenom, kažemo da je funkcija neprekidna.

Svaka elementarna funkcija je neprekidna.

Neke važne osobine neprekidnih funkcija su:

- Zbir, razlika, proizvod i količnik neprekidnih funkcija su neprekidne funkcije.
- Inverzna funkcija neprekidne funkcije je neprekidna.
- Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Ova tvrđenja značajno smanjuju potrebu da se neprekidnost funkcija ispituje korišćenjem (bilo jedne, bilo druge) definicije.

Još jedan način da razumemo pojam neprekidnosti funkcije je da ga interpretiramo kao osobinu da male promene argumenta funkcije uzrokuju malu promenu vrednosti funkcije. Ovo je neka vrsta garancije “stabilnosti u ponašanju” funkcije, koja je često od velikog značaja u praksi.

Još jedna korisna osobina neprekidnih funkcija je formulisana sledećim tvrđenjem:

Teorema 4.1. *Pretpostvimo da je, za funkcije f i g, $f(g(x))$ definisano na intervalu koji sadrži tačku a. Ako za g važi da je $\lim_{x\to a} g(x) = L$ i ako je f neprekidna u tački L, onda je*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L) .$$

Ovo obično "čitamo" kao mogućnost da limes i neprekidna funkcija zamene redosled. Ovu osobinu smo već koristili kod izračunavanja graničnih vrednosti.

Primer 4.2. *Izračunati* $\lim_{x\to 0} e^{\sin x}$.

Rešenje: S obzirom da je eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$, a da je $\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ (i ovo je takođe posledica neprekidnosti funkcije $\sin x$), na osnovu prethodnog tvrđenja je

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x} = e^0 = 1 .$$

Na kraju, navešćemo (bez dokaza) još nekoliko važnih i korisnih osobina neprekidnih funkcija, posmatranih nad zatvorenim intervalom.

- Funkcija f koja je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrednost nad tim intervalom.
- Funkcija koja je neprekidna nad zatvorenim intervalom je nad tim intervalom i ograničena.
- Funkcija koja je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ uzima nad tim intervalom sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$ (uz pretpostavku da važi $f(a) \neq f(b)$).
- Ako je funkcija f neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, i ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda postoji bar jedna nula funkcije f na intervalu $[a, b]$.

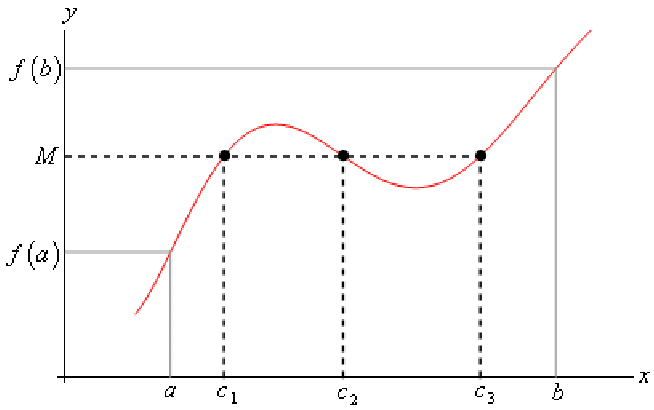
Praktično, prethodnim je rečeno da neprekidna funkcija preslikava zatvoreni interval $[a, b]$ (sirjektivno) *na* zatvoreni interval $[p, q]$. Posledica toga je da za svaku tačku $t \in [p, q]$ možemo odrediti (bar jedan) "original", tj. tačku $c \in [a, b]$ takvu da je $f(c) = t$. To znači da svakako postoje tačke intervala $[a, b]$ (domena) koje se preslikavaju u svaku od krajnjih tačaka (p, odnosno q) kodomena; p je minimalna, a q maksimalna postignuta vrednost funkcije. Ove dve vrednosti predstavljaju i ograničenja funkcije na posmatranom intervalu.

Jasno je, naravno, da se krajnje tačke domena, tačke a i b, ne moraju preslikavati u krajnje tačke kodomena, tačke p i q. U stvari, tačke p i q nije uvek potpuno trivijalno odrediti (to uglavnom podrazumeva traženje ekstremnih vrednosti funkcije, u skladu sa uobičajenim postupkom za to). Tada pojednostavljujemo situaciju time što se "zadovoljimo" činjenicom da su $f(a)$ i $f(b)$ tačke koje pripadaju kodomenu $[p, q]$, i da određuju jedan podinterval tog kodomena. Tada je jasno da i za svaku tačku između tih tačaka ($f(a)$ i $f(b)$), postoji original koji pripada intervalu $[a, b]$.

Ilustracija ovih tvrđenja je prikazana na Slici 11. Neprekidna funkcija $y = f(x)$ je posmatrana nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Pod tim uslovima, grafik funkcije f nad posmatranim intervalom je *neprekidna linija* koja spaja tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Intuitivno je jasno da, neprekidno "prelazeći" od $f(a)$ do $f(b)$, vrednosti funkcije moraju proći kroz ceo interval između $f(a)$ i $f(b)$. Jedna takva vrednost je proizvoljno izabrana tačka $M \in [f(a), f(b)]$; jasno je, da postoji bar jedna tačka iz intervala $[a, b]$ koja se preslikava u M. U prikazanom slučaju postoje tri takve tačke: $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = M$.

U slučaju prikazanom na Slici 11 najveću i najmanju vrednost funkcija postiže upravo u tačkama a i b. Već smo napomenuli da to ne mora uvek biti slučaj.

Konačno, ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, to znači da su vrednosti $f(a)$ i $f(b)$ različitog znaka, odnosno, da se između njih nalazi i 0 (dakle, pomenuta tačka M sada može biti i 0). Tada, na osnovu svega prethodnog,



Slika 11: Neprekidna funkcija f nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ uzima nad tim intervalom sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$.

interval $[a, b]$ sadrži (bar jednu) vrednost $c \in [a, b]$ takvu da je $f(c) = 0$, odnosno, sadrži (bar jednu) nulu funkcije. Jasno je da je ovo veoma korisna informacija o ponašanju funkcije ako želimo da saznamo nešto o njenim nulama, a nismo u mogućnosti da ih tačno (analitički) odredimo, već to možemo samo približno. Važno je uočiti da ovim nismo rešili pitanje određivanja vrednosti c, već samo pitanje manje ili više precizne lokalizacije. Takođe, ne znamo koliko takvih vrednosti c ima na posmatranom intervalu; znamo da postoji bar jedna.

Primer 4.3. *Utvrditi da li funkcija* $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 5$ *ima nulu na intervalu* $[-1, 2]$.

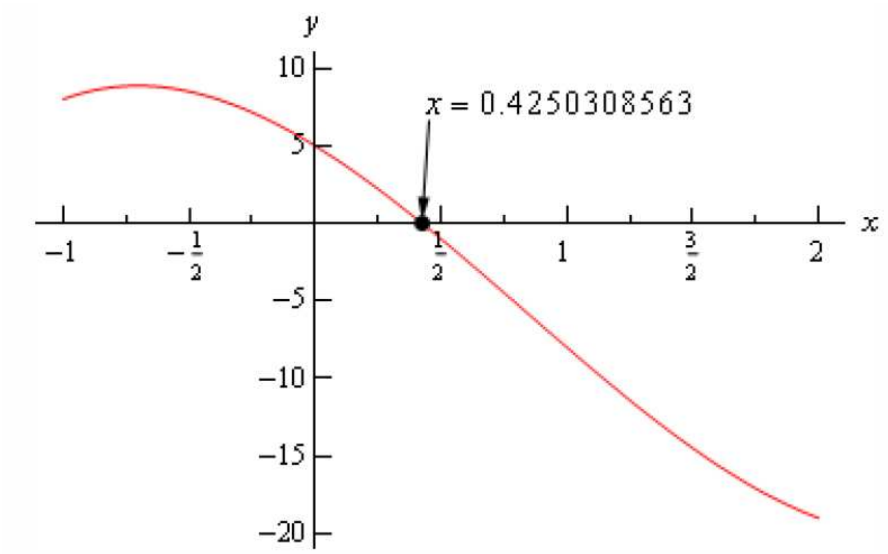
Rešenje: Polinom trećeg stepena ima bar jednu realnu nulu (znamo, međutim, da može da ih ima i tri). Naš zadatak je da utvrdimo da li je (bar jedna) nula u intervalu $[-1, 2]$.

Koristeći činjenicu da je polinom neprekidna funkcija, znamo da on uzima, za $x \in [-1, 2]$, sve vrednosti između vrednosti $f(-1)$ i $f(2)$.

Kako je $f(-1) = 8$ i $f(2) = -19$, uočavamo da su ove vrednosti različitog predznaka (ili, kako se to još zapisuje, $f(-1) \cdot f(2) < 0$), pa važi da je $0 \in [-19, 8]$. Tada mora postojati vrednost $c \in [-1, 2]$ takva da je $f(c) = 0$. Drugim rečima, na datom intervalu nalazi se bar jedna realna nula posmatranog polinoma.

Jasno je da možemo pokušati i preciznije da odredimo traženi koren polinoma, ukoliko pokušamo da suzimo interval, a da pri tom očuvamo situaciju da su vrednosti funkcije u krajevima intervala različitog znaka. Recimo, kako važi da je $f(0) = 5$, znači da je i $f(0) \cdot f(2) < 0$, odnosno da se (bar jedna) nula posmatranog polinoma nalazi u intervalu $[0, 2]$. Ovaj postupak možemo nastaviti sa ciljem da dalje sužavamo interval i još preciznije odredimo položaj korena polinoma, što jeste ideja koja se koristi kod numeričkog rešavanja jednačina. Da bismo, međutim, bolje kontrolisali ceo proces, potrebno je da budemo sigurni da u posmatranom intervalu postoji tačno jedna nula funkcije. Ovim problemom ćemo se pozabaviti kasnije, kada budemo znali više o osobini monotonosti funkcije.

Na kraju, ilustrujmo ovaj primer grafikom posmatrane funkcije $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 5$, Slika 12. Na njemu je naznačena približna vrednost nule funkcije. Možemo potvrditi da smo dobro lokalizovali njenu vrednost: $x = 0.4250308563 \in [-1, 2]$.



Slika 12: Grafik funkcije $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 5$ sa naznačenom približnom vrednošću nule funkcije.

5 Brojni nizovi

5.1 Definicija niza i osnovni pojmovi

Brojni niz je lista brojeva koji su navedeni utvrđenim redosledom. Dakle, od značaja je koji je broj prvi, koji peti, koji n-ti na listi. Uobičajeni načini zapisivanja ovakve liste su

$$a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n,\ a_{n+1}, \ldots \qquad \text{ili} \qquad \{a_n\} \qquad \text{ili} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ .$$

Pri tome, a_n se zove *opšti član* niza. Indeks n određuje poziciju elementa a_n u okviru liste.

Primer 5.1. *Navesti nekoliko članova niza* $\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *i predstaviti ovaj niz grafički.*

Rešenje: Opšti član ovog niza je $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$. Prvi član niza, a_1 dobijamo uzimajući da je $n = 1$, drugi izračunavamo uvrštavajući u izraz za opšti član $n = 2$, itd. Tako dobijamo da su članovi niza

$$2,\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{9}, \frac{5}{16},\ \frac{6}{25},\ \ldots\ .$$

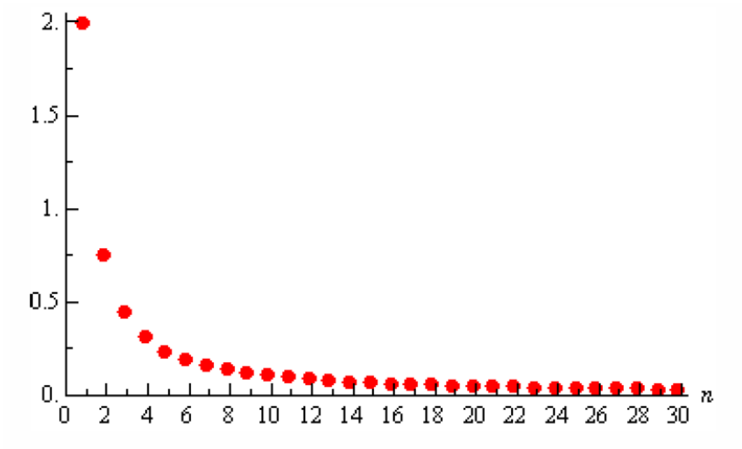
Grafički, ovaj niz možemo prikazati kao na Slici 13:

S obzirom na način određivanja elemenata niza na osnovu opšteg člana, jasno je da niz nije ništa drugo nego preslikavanje (funkcija) definisano nad skupom prirodnih brojeva. Na osnovu ovog zapažanja možemo formulisati i definiciju niza.

Definicija 5.1. *(Realan) Brojni niz je svako preslikavanje (funkcija)* $\quad a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}.$

Dakle, za opšti član a_n niza a važi da je $a_n \equiv a(n)$. Zapis a_n je kraći i koristi se umesto uobičajenog zapisa za vrednost funkcije u tački, $a(n)$.

Činjenica da je niz funkcija (specifična po tome što joj je domen skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva) olakšaće nam u mnogim situacijama rad sa nizovima. Mnoge osobine nizova i operacije sa njima biće posledica



Slika 13: Grafički prikaz članova niza $\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

onoga što važi za funkcije u opštem smislu. Na primer, niz u Primeru 5.1 ima mnoge osobine koje ima i realna funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ (navedeni niz je *restrikcija* ove funkcije na skup prirodnih brojeva, a funkcija je *ekstenzija* posmatranog niza). Važno je, međutim, istaći da postoje i neka svojstva nizova koja nisu karakteristična za realne funkcije, kao i da postoje nizovi za koje nije moguće, na opisani način, definisati odgovarajuće realne funkcije, i da pri uopštavanjima treba biti pažljiv.

Primer 5.2. *Napisati nekoliko članova niza* $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Rešenje: Zbog karakterističnog faktora $(-1)^{n+1}$, elementi ovog niza redom naizmenično menjaju predznak. Niz sa takvom osobinom se zove *alternativni niz*. Nekoliko prvih članova datog niza su:

$$a_0 = a(0) = -1, \quad a_1 = a(1) = \frac{1}{2}, \quad a_2 = a(2) = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = a(3) = \frac{1}{8}, \quad a_4 = a(4) = -\frac{1}{16}, \quad a_5 = a(5) = \frac{1}{32}, \ldots$$

Uočimo, međutim, da "odgovarajuća" neprekidna realna funkcija u ovom slučaju nije definisana, upravo zbog nedefinisanosti $(-1)^x$, za $x \in \mathbb{R}$ (ili $x \in \mathbb{R}^+$); pri definisanju realne eksponencijalne funkcije $f(x) = b^x$ postavljamo uslov da osnova b stepena bude pozitivan broj.

Neke osobine koje brojni nizovi mogu da imaju navedene su u sledećoj definiciji:

Definicija 5.2. *Realan brojni niz* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je*

- *monotono rastući ako je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n < a_{n+1}$;
- *monotono opadajući ako je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n > a_{n+1}$;
- *ograničen odozdo ako postoji konstanta* $M \in \mathbb{R}$ *takva da je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n \geq M$; *(konstanta* M *se zove donje ograničenje niza);*
- *ograničen odozgo ako postoji konstanta* $P \in \mathbb{R}$ *takva da je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n \leq P$; *(konstanta* P *se zove gornje ograničenje niza);*
- *ograničen ako je ograničen i odozdo, i odozgo.*

Ove osobine ilustrovane su sledećim primerom:

Primer 5.3. *Ispitati monotonost i ograničenost nizova:*

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\left\{n^2-10n-24\right\}_{n=1}^{\infty}$;

Rešenje: Monotonost niza, u najopštijem slučaju, možemo ispitati tako što razliku $a_{n+1}-a_n$ upoređujemo sa nulom. Ukoliko je, za svako $n \in \mathbb{N}$, ova razlika negativna, niz je monotono opadajući; ukoliko je pozitivna, niz je monotono rastući. Ukoliko ova razlika menja znak, niz nije monoton.

Slično, možemo uporediti količnik $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ sa 1. Ukoliko je količnik veći od 1, niz je monotono rastući; ukoliko je, za svako $n \in \mathbb{N}$, manji od 1, niz je monotono opadajući. Ukoliko količnik nije stalnog znaka, posmatrani niz nije monoton.

Da niz nije monoton često možemo utvrditi posmatrajući samo nekoliko njegovih uzastopnih članova, ukoliko oni ne pokazuju monotono ponašanje. Važno je, međutim, istaći da, samo na osnovu nekoliko članova koji ispoljavaju monotono ponašanje, ne možemo tvrditi da je niz u celini monoton.

Konačno, ispitivanje monotonosti niza može se svesti i na ispitivanje monotonosti odgovarajuće realne funkcije.

a) Ovaj niz je monotono rastući, što možemo utvrditi posmatrajući

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0.$$

Niz je i ograničen, jer za sve njegove članove a_n važi $0<a_n<1$.

b) Ovaj niz uzima, naizmenično, vrednosti 1 i (-1). Već na osnovu ponašanja njegova prva tri elementa može se utvrditi da nije monoton. Niz je ograničen; 1 i (-1) su mu, redom, gornje i donje ograničenje.

c) S obzirom da za svaki prirodan broj n važi da je $n^2<(n+1)^2$, ovaj niz je monotono rastući i ograničen odozdo. Donje ograničenje (svakog monotono rastućeg) niza je njegov prvi član, $a_1=a(1)=1$. Gornje ograničenje ne postoji, jer je n^2 veće od svake konstante, za dovoljno veliko n.

d) Ovaj niz nije monoton. Ispitivanje monotonosti ovog niza najjednostavnije je uraditi posmatrajući odgovarajuću ekstenziju - realnu neprekidnu funkciju $f(x)=x^2-10x-24$. Ova kvadratna funkcija ima minimum za $x=5$; za argumente manje od 5 funkcija opada, a za argumente veće od 5 funkcija raste. To važi i za posmatrani niz: on je opadajući za prvih pet članova (-33, -40, -45, -48, -49) , a zatim je rastući.

   Ograničen je odozdo: njegovo donje ograničenje je, na primer, $a_5=a(5)=-49$. Niz nije ograničen odozgo.

Uočimo da, kada je niz ograničen, bilo odozgo, bilo odozdo, on ima beskonačno mnogo ograničenja, gornjih i/ili donjih. Najveće donje ograničenje niza a_n zove se *infimum* niza a_n, što označavamo sa $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Najmanje gornje ograničenje zove se *supremum* niza, što označavamo sa $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Važi da je svaki broj M, takav da je $M<\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, donje ograničenje niza a_n, a da ni jedna vrednost T takva da je $T>\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ nije donje ograničenje tog niza. Takođe, svaki broj P, takav da je $P > \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, je gornje ograničenje niza a_n, a ni jedan broj H, takav da je $H < \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, nije gornje ograničenje tog niza.

Još jedan pojam koji ćemo koristiti u vezi sa nizovima je pojam *podniza.* Za niz $\{a_n\}$, izdvajanjem njegovih članova sa parnim indeksima može formirati podniz $\{a_{2n}\}$ (često se zove "parni podniz"), a izdvajanjem članova sa neparnim indeksima može se formirati podniz $\{a_{2n+1}\}$ (često se zove "neparni podniz"). Podniz niza se može formirati i na druge načine, izdvajanjem članova niza sa indeksima koji zadovoljavaju neko unapred definisano pravilo.

5.2 Granična vrednost niza

S obzirom da je niz (specijalna) funkcija, ispitivanje granične vrednosti - osobine niza da se njegovi članovi "stabilizuju" (nagomilavaju) oko neke vrednosti - svakako je i ovde interesantno. Uočimo odmah da granična vrednost u konačnoj tački nema smisla kada je reč o nizovima; argument n niza je prirodan broj, a preko prirodnih brojeva nije moguće proizvoljno se približavati nekoj konačnoj vrednosti (skup prirodnih brojeva nije dovoljno "gust"). Dakle, jedino zanimljivo pitanje odnosi se na ponašanje niza kada se njegov argument n neograničeno povećava. Definicija granične vrednosti niza, analogna Definiciji 1.5, je

Definicija 5.3. *Broj $L \in \mathbb{R}$ je granična vrednost niza $\{a_n\}$, što zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, akko*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)\ .$$

Specifičnost niza kao funkcije je ta što sve vrednosti (i argumenta i same funkcije) možemo da nabrojimo (navedemo redom). Imajući to na umu, možemo "pročitati" definiciju granične vrednosti niza na sledeći način:

Broj L je granična vrednost niza $\{a_n\}$ ako se u svakoj, proizvoljno maloj, ε-okolini tačke L nalaze skoro svi članovi niza, odnosno - svi nakon člana sa indeksom n_0.

Intuitivno, što je manje odabrano ε, očekujemo da bude veći indeks n_0 nakon kog su svi članovi niza na rastojanju manjem od ε od granične vrednosti L. Značajno je uočiti da je broj n_0 konačan, i jednak je broju elemenata niza koji ostaju van uočene (proizvoljne) ε-okoline granične vrednosti L. Iz ovoga sledi jedan veoma koristan način da "pročitamo" Definiciju 5.3:

Broj L je granična vrednost niza $\{a_n\}$ akko *van* svake ε-okoline broja L postoji *samo konačno mnogo* članova niza $\{a_n\}$.

Definicija 5.4. *Niz je konvergentan akko ima konačnu graničnu vrednost.*

Ukoliko niz ima graničnu vrednost, ona je jedinstvena.

Za operacije sa graničnim vrednostima nizova važe ista pravila koja smo definisali za operacije sa graničnim vrednostima funkcija. Ovde ih, zato, nećemo ponovo navoditi, ali ćemo ih, po potrebi, koristiti.

Ukoliko niz nema konačnu graničnu vrednost, kažemo da je *divergentan.* Niz može biti divergentan iz jednog od dva moguća razloga: (1) njegova granična vrednost je beskonačna, ili (2) njegova granična vrednost ne postoji. Prvi slučaj je potpuno analogan onome što smo već videli kod funkcija:

Definicija 5.5.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \textit{akko} \qquad (\forall M > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M)\ .$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \textit{akko} \qquad (\forall P < 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \Rightarrow a_n < P)\ .$$

Drugi slučaj, situacija da niz nema graničnu vrednost, nastupa kada ne postoji vrednost koja "oko sebe okuplja" skoro sve članove niza, a ne važi ni da su skoro svi članovi niza veći (manji) od neke utvrđene vrednosti.

Ilustrovaćemo navedeno nekim primerima.

Primer 5.4. *Ispitati konvergenciju nizova*

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$;

c) $\{\sqrt{n}\}_{n=0}^{\infty}$;

Rešenje:

a) U ovom slučaju u mogućnosti smo da koristimo odgovarajuće uopštenje (ekstenziju) do neprekidne funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, zaključujemo da je i za dati niz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

b) Uočavajući da su elementi ovog niza, redom, $1, -1, 1-1, 1, \ldots$, zaključujemo da ne postoji vrednost u čijoj su proizvoljnoj ε-okolini skoro svi članovi datog niza: ima ih beskonačno mnogo u svakoj okolini tačke 1 i beskonačno mnogo u svakoj okolini tačke (-1). Međutim, svih beskonačno mnogo članova koji su u proizvoljnoj okolini tačke 1 su van (pogodno odabrane) ε-okoline tačke (-1), čime se narušava definicija granične vrednosti za $L = -1$. Analogno važi i ako uzmemo $L = 1$. Zaključujemo da dati niz divergira. Uočimo da je ovaj niz, iako divergentan, ograničen.

c) Elementi ovog niza se neograničeno povećavaju (ovo je monotono rastući niz koji nije ograničen odozgo). On, dakle divergira, pri čemu važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

U ispitivanju konvergencije nizova ponekad mogu dobro poslužiti i neka tvrđenja koja (bez dokaza) navodimo u nastavku.

Teorema 5.1. *Ako za niz $\{a_n\}$ važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, onda je niz $\{a_n\}$ konvergentan i važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.*

Jasno je da, ako je neki niz konvergentan, važi da je svaki njegov podniz konvergentan, i da ima istu graničnu vrednost kao i sam niz. Odatle, opet, sledi da ako ne važi da svi podnizovi jednog niza konvergiraju ka istoj vrednosti, niz mora biti divergentan. Međutim, nije lako (nije moguće) proveriti da li *svi* podnizovi konvergiraju istoj vrednosti (podnizova ima beskonačno mnogo). Teorema 5.1 omogućava da proveru svedemo na samo dva podniza - "parni" i "neparni".

Sledeći primer ilustruje mogućnost primene ovog rezultata.

Primer 5.5. *Ispitati konvergenciju nizova*

a) $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{n(1-(-1)^n)\}_{n=1}^{\infty}$;

Rešenje: Uočimo da je, kada ispitujemo konvergenciju alternativnog niza, veoma često od koristi posmatrati ponašanje njegovog parnog i neparnog podniza.

a) Elementi ovog niza su, redom, $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$.
Za njegov parni podniz važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n} 2n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, a za njegov neparni podniz je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n+1}(2n+1) = -\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1) = -\infty$. Kako ova dva podniza imaju različite granične vrednosti, jasno je da niz $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ divergira.

b) Za parni podniz ovog niza važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n} \dfrac{2n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = 1$, a za njegov neparni podniz je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} \dfrac{2n+1}{2n+2} = -\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n+2} = -1$. Kako ova dva podniza imaju različite granične vrednosti, jasno je da niz $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ divergira. (Uporediti sa Primerom 5.4(a).)

c) Članovi ovog niza su, redom, $2, 0, 6, 0, 8, 0, \ldots$. Dakle, parni podniz ovog niza je *stacionaran niz* čiji su svi elementi jednaki nuli, i za koji važi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2n(1-(-1)^{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n(1-1) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.
Međutim, članovi sa neparnim indeksima se neograničeno povećavaju (čine niz parnih prirodnih brojeva). Za ovaj podniz važi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)(1-(-1)^{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)(1+1) = \lim\limits_{n\to\infty} 2(2n+1) =$
To znači da dati niz a_n nema graničnu vrednost.

Teorema 5.2. *Ako za nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ važi da postoji $M \in \mathbb{N}$ takvo da je za sve vrednosti $n > M$ zadovoljeno $a_n \le b_n \le c_n$, i da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.*

Navedena teorema ("o uklještenju") je analogna Teoremi 1.2 koju smo formulisali za granične vrednosti funkcija. Na osnovu Teoreme 5.2 sledi sledeće tvrđenje:

Teorema 5.3. *Ako je za niz $\{a_n\}$ zadovoljeno da je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dokaz ove teoreme sledi direktno iz Teoreme 5.2, ako uočimo da za svaki broj (član niza) a_n važi da je

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|,$$

a da je, pod navedenim uslovima, $\lim\limits_{n\to\infty} (-|a_n|) = -\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Prethodno tvrđenje možemo ilustrovati sledećim primerom:

Primer 5.6. *Odrediti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Rešenje: Uočimo, prvo, da za određivanje ovog limesa ne možemo koristiti znanje o graničnoj vrednosti odgovarajuće ekstenzije, jer funkcija $f(x) = \dfrac{(-1)^x}{x}$ za $x \in \mathbb{R}$ nije definisana. Ono što nam može poslužiti je Teorema 5.3.

S obzirom da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\ ,$$

na osnovu Teoreme 5.3 je i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\ .$$

Veoma je važno uočiti da Teorema 5.3 važi samo ako je granična vrednost niza apsolutnih vrednosti jednaka nuli. Na primer, u slučaju niza $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (Primer 5.5 (b)) nije moguće iskoristiti Teoremu 5.3, jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \left|(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \ne 0$. Kao što smo već utvrdili, navedeni niz nema graničnu vrednost (tako da ona svakako nije jednaka jedinici, što bismo, možda, po “inerciji” mogli pogrešno pomisliti!).

Uočimo da je svaki konvergentan niz ograničen; dokaz za ovo tvrđenje zasniva se na činjenici da se uvek samo konačno mnogo članova niza nalazi van ε-okoline granične vrednosti L posmatranog niza, pa se može odrediti koji je, od tih konačno mnogo članova, najdalje od L. Na osnovu tog rastojanja mogu se odrediti gornje, odnosno donje, ograničenje niza.

Obrnuto, međutim, ne važi: primer niza koji je ograničen ali nije konvergentan je $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ (Primer 5.4(b)). “Dopunjujući” uslov ograničenosti, dolazimo do važnog tvrđenja o konvergenciji nizova:

Teorema 5.4. *(Princip monotonije): Ako je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen, on je konvergentan.*

Ovo tvrđenje nećemo formalno dokazivati. Samo ćemo prokomentarisati da uslov tvrđenja obezbeđuje da je monotono rastući niz ograničen odozgo (osim što je, svakako ograničen odozdo svojim prvim članom). Tada važi da je granična vrednost monotono rastućeg niza njegovo najmanje gornje ograničenje $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n)$, što se može utvrditi pokazujući da ovaj supremum zadovoljava definiciju granične vrednosti. Analogno, za monotono opadajući niz se traži da bude ograničen (i) odozdo, a njegovo najveće donje ograničenje je tada i njegova granična vrednost, što se pokazuje po definiciji. $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n)$.

Jedna važna primena Principa monotonije je definicija broja e. Broj e (osnova prirodnog logaritma) je, naime, definisan kao granična vrednost konvergentnog niza $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 5.5. *Niz $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monoton i ograničen.*

Dokaz ovog tvrđenja podrazumeva da se pokaže da je $a_{n+1} > a_n$, odnosno

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = 1 ,$$

niz je monotono rastući.

Može se pokazati i da je

$$2 \le a_n < 4 , \quad \text{za svako } n\in\mathbb{N}$$

pa sledi da je niz ograničen.

Zaključujemo, na osnovu Teoreme 5.4, da je niz konvergentan, odnosno da postoji $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Ako tu graničnu vrednost označimo sa e, možemo pisati da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Uzimajući sve veću vrednost za n možemo dobiti približnu vrednost za e sa sve većom tačnošću. Napomenimo da je e iracionalan broj i da je $e \approx 2.71828182....$

Prethodni niz i njegova granična vrednost se često pojavljuju u praksi. Značaj ovog niza i njegove granične vrednosti se višestruko povećava i zbog mogućnosti uopštenja navedenog rezultata: važi da za svaki niz $\{b_n\}$ za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, važi da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$. Isto važi i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Takođe rezultat se može uopštiti i na neprekidne funkcije, odnosno, može se pokazati (koristeći ideju "uklještenja") da važi i

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

Priču o nizovima zaključujemo još jednim rezultatom koji se često može iskoristiti.

Primer 5.7. *Pokazati da za niz sa opštim članom $a_n = q^n$ važi sledeće*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & za \quad |q|<1 \\ 1, & za \quad q=1 \\ \infty, & za \quad q>1 \\ \textit{ne postoji}, & za \quad q\leq -1 \end{cases} \tag{4}$$

Rešenje: Graničnu vrednost za slučaj kada je $q \in (0,1)$ možemo odrediti koristeći Princip monotonije. Za $q=0$ niz je stacionaran - svi članovi su mu jednaki 0, a tolika mu je i granična vrednost. Rezultat za $|q|<1$ sledi na osnovu Teoreme 5.3.

Ako je $q=1$, niz je stacionaran, $a_n = 1$, a tada je i njegova granična vrednost jednaka jedinici.

Ako je $q>1$, niz je (kao i odgovarajuća funkcija) monotono rastući i neograničen.

Ako je $q=-1$, slučaj smo analizirali u Primeru 5.4(b), i zaključili da je niz oscilatoran i nema graničnu vrednost.

Ako je $q<-1$ posmatranjem parnog podniza (koji se neograničeno povećava) i neparnog podniza (koji se neograničeno smanjuje), zaključujemo da granična vrednost ne postoji.

6 Izvod funkcije

U ovom delu kursa posvetićemo se temi od izuzetnog značaja, kada je reč o matematičkoj analizi. Definisaćemo prvi izvod funkcije i navesti njegove osnovne osobine. Naučićemo kako da izračunamo prvi izvod funkcije, za funkcije zadate na različite načine. Objasnićemo šta je smisao prvog izvoda i kako ga možemo interpretirati, šta na osnovu njega možemo reći o funkciji i na koje ga sve načine možemo primeniti.

6.1 Geometrijski smisao i definicija prvog izvoda funkcije

Pretpostavimo da želimo da, za datu funkciju $y = f(x)$, odredimo tangentu u tački $x = x_0$. Tangenta, kao i svaka prava, može da se definiše jednačinom oblika $t : y(x) = kx + m$, a za pisanje ove jednačine potrebno nam je da znamo koeficijent pravca prave, k, i jednu tačku kroz koju ova prava prolazi. Dobro je podsetiti se da je koeficijent pravca prave definisan kao tangens ugla između prave i pozitivnog smera x-ose.

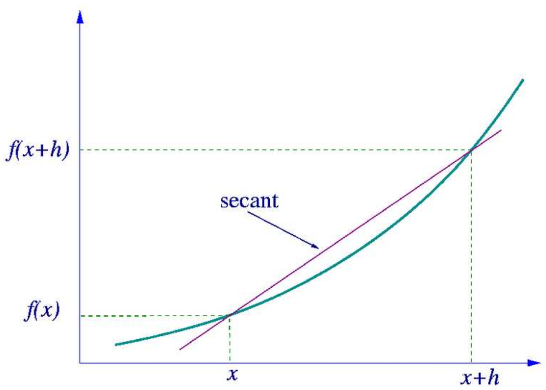
Jasno je da će tražena tangenta prolaziti kroz tačku $P(x_0, f(x_0))$ koja, za uočeno $x = x_0$ pripada grafiku funkcije. Dalje je potrebno da odredimo i koeficijent pravca tangente, da bismo mogli da napišemo njenu jednačinu.

Uočimo proizvoljnu tačku $Q(x_1, f(x_1))$ na krivoj. Označimo:

$$h = \triangle x = x_1 - x_0 \qquad \text{i} \qquad \triangle y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)\,.$$

Veličina $\triangle x$ zove se *priraštaj argumenta*, a veličina $\triangle y$ zove se *priraštaj funkcije*. Napomenimo da oba ova priraštaja, u opštem slučaju, mogu biti pozitivni, negativni, ili jednaki nuli.

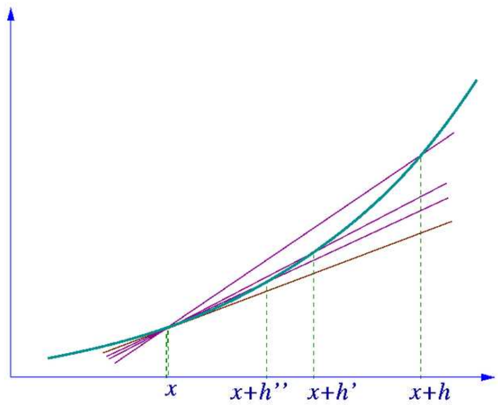
Prava koja prolazi kroz tačke P i Q je sečica krive $y = f(x)$; jedna takva situacija je prikazana na Slici 14. Uočimo da je koeficijent pravca posmatrane sečice, odnosno tangens ugla koji ona određuje sa pozitivnim smerom x ose, jednak količniku $\frac{\triangle y}{\triangle x}$.



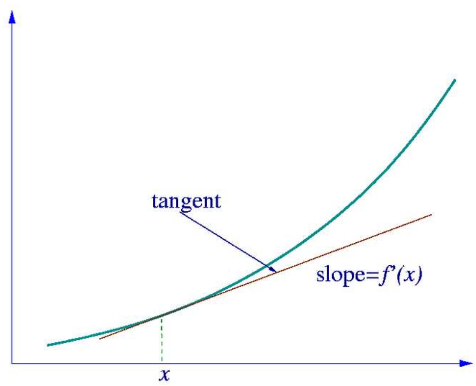
Slika 14: Sečica krive - prava koja prolazi kroz dve tačke na krivoj.

Posmatrajmo, zatim, situaciju kada se tačka Q približava po krivoj tački P; to postižemo tako što vrednost $\triangle x = h$ smanjujemo, odnosno tako što rastojanje između tačaka x_1 i x_0 postaje blisko nuli. Na taj način generišemo niz sečica i niz njihovih koeficijenata pravca, koji su svi jednaki odgovarajućem količniku $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ova situacija je ilustrovana na Slici 15.

Približavanjem tačke Q tački P sečica krive kroz tačke P i Q se približava položaju tangente na krivu u tački P, i zauzima ga u graničnom slučaju, kada se x_1 beskonačno približi tački x_0, odnosno kada $h \to 0$. U skladu sa prethodno navedenim zapažanjima, jasno je da će u tom slučaju i koeficijent pravca tangente u tački P biti jednak graničnoj vrednosti količnika $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, za $h \to 0$. Ova situacija je prikazana na Slici 16.



Slika 15: Niz sečica krive koji se formira kada se rastojanje h između tačaka x_0 i x_1 smanjuje, i približava nuli.



Slika 16: Granični slučaj sečice na krivu, kada rastojanje h između tačaka x_0 i x_1 teži nuli, je tangenta na krivu u tački $P(x_0, f(x_0))$.

Opisanim postupkom definisali smo koeficijent pravca tangente na datu krivu u datoj tački. Ovo možemo ilustrovati sledećim primerom:

Primer 6.1. *Odrediti tangentu na krivu* $f(x) = 15 - 2x^2$ *u tački* $x = 1$.

Rešenje: Tražena tangenta prolazi kroz tačku koja pripada krivoj (zadovoljava funkciju), za $x = 1$ Kako je $f(1) = 13$, tačka ima koordinate $P(1, 13)$.

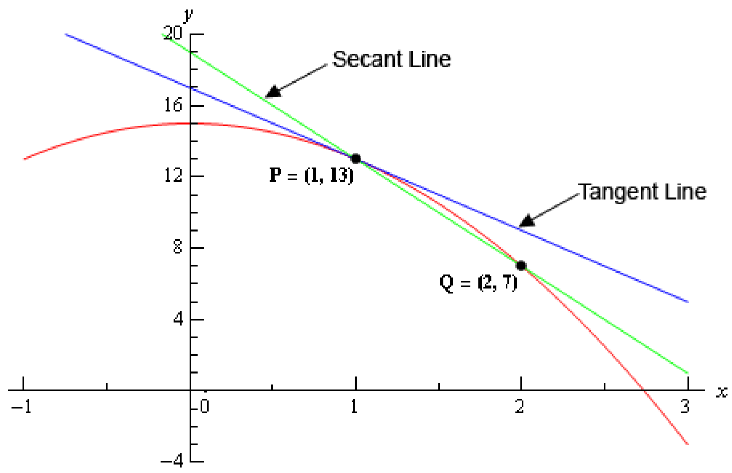
Sledeće što treba da odredimo je koeficijent pravca tangente. Na osnovu prethodno izloženog, to je:

$$\begin{aligned}\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{15 - 2(1+h)^2 - 13}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-2h(2+h)}{h} = -2 \lim_{h \to 0} (2 + h) = -4 \,.\end{aligned}$$

Sada je lako zaključiti da je jednačina tražene tangente

$$y - 13 = -4(x - 1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -4x + 17 \,.$$

Ilustracija je prikazana na Slici 17.



Slika 17: Sečica i tangenta na krivu $f(x) = 15 - 2x^2$ u tački $x = 1$, Primer 6.1.

Granična vrednost kojom je definisan koeficijent pravca tangente na datu funkciju u datoj tački ima veliki značaj u matematici (i mnogim drugim oblastima u kojima se matematika primenjuje) i zove se *prvi izvod funkcije u tački.* Formalno:

Definicija 6.1. *Prvi izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 (u čijoj je okolini funkcija f definisana), koji označavamo sa $f'(x_0)$, je*

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ukoliko ova granična vrednost postoji.

U skladu sa ovom definicijom, možemo zaključiti:

Jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $(x_0, f(x_0))$ je $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$

Jednačina normale na krivu $y = f(x)$ u tački $(x_0, f(x_0))$ je $\quad y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

Podsetimo se da je normala na krivu u nekoj tački, po definiciji, normala na tangentu krive u toj tački, a i da za koeficijente pravaca k_1 i k_2 dve uzajamno normalne prave važi da je $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Naglasimo odmah da, posmatrajući prvi izvod funkcije u svakoj tački nekog skupa koji je podskup domena funkcije, definišemo prvi izvod funkcije nad nekim skupom, odnosno definišemo prvi izvod funkcije kao novu funkciju. U tom smislu, često se izvod ne vezuje isključivo za neku tačku (x_0), nego se navodi definicija izvodne funkcije:

Definicija 6.2. *Za funkciju $y = f(x)$ funkcija prvog izvoda (izvodna funkcija) je*

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

za one vrednosti x za koje navedena granična vrednost postoji.

Primer 6.2. *Data je funkcija $f(x) = x^2$.*

a) Odrediti izvodnu funkciju funkcije $f(x) = x^2$.

b) U kojoj tački je tangenta na krivu $f(x) = x^2$ paralelna sa x osom?

c) Napisati jednačinu normale na krivu $f(x) = x^2$ u tački u kojoj je tangenta na krivu paralelna sa x-osom.

d) U kojoj tački tangenta na krivu određuje sa pozitivnim smerom x-ose ugao veličine $\frac{\pi}{4}$?

Rešenje:

a) Izvodna funkcija je, na osnovu definicije,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \ .$$

Uočimo da je vrednost izvodne funkcije u svakoj konkretnoj tački $x = x_0$ jednaka koeficijentu pravca tangente na krivu u toj tački.

b) Ako je prava paralelna sa x-osom, onda je njen koeficijent pravca jednak 0. To znači da tražimo tačku u kojoj je vrednost izvoda (koeficijenta pravca tangente na krivu) jednaka nuli, tj, $y'(x) = 2x = 0$. Jasno, ta tačka je $x = 0$. Kako je $f(0) = 0$, a tačka $(0,0)$ je i teme parabole, zaključujemo da je tangenta na parabolu $y = x^2$ u temenu $(0,0)$ x-osa.

c) Jednačinu normale na krivu u tački $(0,0)$, u kojoj je tangenta na krivu paralelna sa x-osom (tačnije - tangenta je x-osa) ne možemo napisati koristeći formulu za normalu, odnosno određujući koeficijent pravca normale kao $-\frac{1}{f'(0)}$, jer je $f'(0) = 0$ i ovaj izraz nije definisan. Međutim, potpuno je jasno da je normala na x-osu (tangentu) u koordinatnom početku (tački $(0,0)$) prava $x = 0$, odnosno y-osa. Ta prava je i tražena normala na krivu u tački $x = 0$.

d) Kako je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, toliki je i koeficijent pravca tangente na krivu koja sa pozitivnim smerom x ose obrazuje ugao $\frac{\pi}{4}$. To znači da tražimo tačku u kojoj je vrednost prvog izvoda (koeficijent pravca tangente) jednaka 1. Dakle:

$$f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \text{ je tačka u kojoj tangenta ima traženi položaj.}$$

Primer 6.3. *Za funkciju $f(x) = |x|$ odrediti vrednost $f'(0)$. Kakav je položaj tangente na datu krivu u tački $x = 0$?*

Rešenje: Na osnovu definicije je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \ .$$

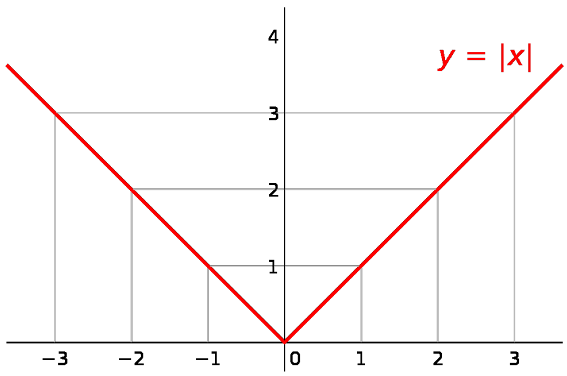
Dalje moramo uzeti u obzir da je $|h| = \begin{cases} h, & \text{za} \quad h \geq 0 \\ -h, & \text{za} \quad h < 0 \end{cases}$,

(funkcija $y = |x|$ je prikazana na Slici 18) pa je

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \ .$$



Slika 18: Grafik funkcije $f(x) = |x|$ u okolini tačke $x = 0$.

Dakle, leva i desna granična vrednost na osnovu kojih se definiše vrednost prvog izvoda date funkcije za $x = 0$ nisu jednake, pa granična vrednost, a samim tim ni $f'(0)$, za ovu funkciju ne postoji.

Jasno je da je posledica nepostojanja ovog prvog izvoda to da tangentu na krivu $f(x) = |x|$ za $x = 0$ ne možemo odrediti.

Prethodni primer ukazuje na mogućnost da (čak i u slučaju ovako "obične" funkcije kao što je $f(x) = |x|$) prvi izvod funkcije u nekoj tački ne postoji. Posledica ovoga je da tangenta na funkciju $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$ nije definisana. Kao što se vidi na Slici 18, funkcija u tački $x = 0$ ima špic, a tada postoji beskonačno mnogo pravih koje imaju različite koeficijente pravca i imaju samo jednu zajedničku tačku sa funkcijom u okolini $x = 0$. Drugim rečima, tangenta u ovoj tački ne postoji, jer nije jednoznačno definisana.

6.2 Interpretacija prvog izvoda funkcije

Najvažnija interpretacija izvoda funkcije je ta da on pokazuje *stopu promene* funkcije u nekoj tački. Dakle, prvi izvod pokazuje koliko će se vrednost funkcije promeniti, relativno u odnosu na (malu) promenu argumenta. S obzirom da prvi izvod govori sve što nam treba o tangenti na krivu u posmatranoj tački, ova interpretacija je prilično jasna - tangenta predstavlja (linearnu) aproksimaciju funkcije, koja se u okolini posmatrane tačke isto ponaša (menja na isti način i istom brzinom) kao i sama funkcija. Uočimo da izvod ne govori ništa o vrednostima funkcije, već samo o promeni. Ova informacija je, međutim, često od veće koristi nego poznavanje nekih konkretnih vrednosti funkcije.

Primer 6.4. *Pretpostavimo da je količina vode u nekom rezervoaru u minutu t data funkcijom $V(t) = 2t^2 - 16t + 35$. Odrediti:*

a) Da li količina vode u rezervoaru raste ili opada u prvom minutu ($t = 1$)?

b) Da li količina vode u rezervoaru raste ili opada u petom minutu ($t = 5$)?

c) Da li se količina vode u rezervoaru brže menja u trenutku $t = 1$ ili u trenutku $t = 5$?

d) Da li postoji trenutak (minut) t u kom se količina vode u rezervoaru ne menja?

Rešenje: S obzirom da se pitanja odnose na *promenu* količine vode u rezervoaru, a ne na samu količinu vode, biće potrebno da odredimo funkciju prvog izvoda koja odgovara datoj funkciji $V(t)$. Na osnovu definicije, znamo da je to

$$
\begin{aligned}
V'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\triangle V}{\triangle t} = \lim_{h\to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2(t+h)^2 - 16(t+h) + 35) - (2t^2 - 16t + 35)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4th + 2h^2 - 16h}{h}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4t+2h-16)}{h} = \lim_{h\to 0}(4t+2h-16) = 4t-16.$$

Koristeći činjenicu da je stopa promene funkcije $V(t)$ u tački t opisana funkcijom $V'(t)$ možemo odgovoriti na postavljena pitanja.

a) Kako je $V'(1) = -12$, zaključujemo da je promena funkcije negativna, odnosno da funkcija - količina vode - opada u prvom minutu. Takođe možemo konstatovati da je koeficijent pravca tangente na krivu $V(t)$ u tački $t = 1$ negativan (jednak -12), što znači da tangenta i pozitivni smer x ose grade tup ugao (linearna funkcija koja odgovara tangenti je opadajuća).

b) Kako je $V'(5) = 4$, zaključujemo da je promena funkcije pozitivna, odnosno da funkcija - količina vode u rezervoaru - raste u petom minutu. Koeficijent pravca tangente je pozitivan, a ugao između tangente i x-ose je oštar.

c) Kada nas zanima brzina promene, ne razlikujemo slučaj kada je promena pozitivna i slučaj kada je negativna (tj. nije od značaja da li funkcija raste ili opada, samo koliko brzo to radi.) Kako je brzina promene u potpunosti predstavljena koeficijentom pravca tangente, odnosno veličinom ugla između tangente i pozitivnog smera x ose, potrebno je da uporedimo apsolutne vrednosti prvog izvoda u tačkama koje posmatramo.

   Kako je $|V'(1)| > |V'(5)|$, zaključujemo da se količina vode u rezervoaru brže menja u prvom, nego u petom minutu.

d) Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da se funkcija ne menja u tački u kojoj je njen izvod jednak nuli. Kako je

$$V'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4t - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4,$$

   zaključujemo da se količina vode u rezervoaru neće menjati u četvrtom minutu. Ovo zapažanje odnosi se samo na taj kratki vremenski interval od najviše jednog minuta.

Ako funkcija koju posmatramo predstavlja položaj neke pokretne tačke u trenutku t tokom nekog vremenskog perioda na nekoj putanji kojom se tačka kreće, onda se interpretacija izvoda kao promene funkcije u odnosu na promenu argumenta svodi na promenu položaja tačke u nekom (kratkom) vremenskom periodu (pređeni put), relativno u odnosu na taj vremenski period. Ovo nije ništa drugo nego definicija *brzine kretanja*. Ovim smo formulisali još jednu važnu interpretaciju izvoda:

Prvi izvod funkcije položaja tačke koja se kreće po nekoj putanji, po promenljivoj koja predstavlja vreme, je brzina kretanja tačke po toj putanji.

Primer 6.5. *Pretpostavimo da je položaj objekta (tačke) nakon t minuta određen funkcijom $s(t) = \dfrac{t}{t+1}$.*

a) Da li se u toku desetog minuta ($t = 10$) objekat kreće levo ili desno?

b) Da li objekat ikada prestaje da se kreće?

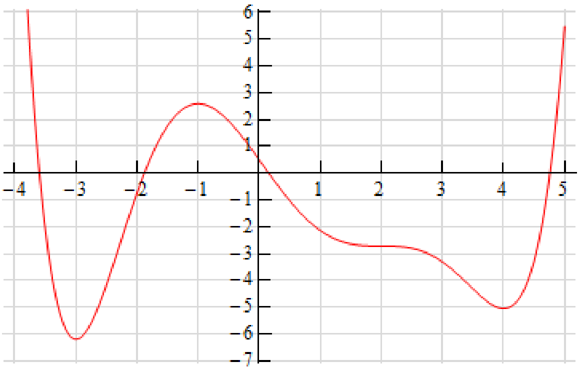
Rešenje: Ukoliko je *promena* položaja objekta u nekoj tački pozitivna, objekat se kreće desno; u protivnom se kreće levo (uočimo da je datom funkcijom predstavljen položaj tačke na nekoj krivoj, u smislu rastojanja tačke od početne tačke putanje; ako funkcija raste, raste i rastojanje, a tačka se kreće "unapred"; ako funkcija opada, to znači da se smanjuje rastojanje od početne tačke putanje i tačka se kreće "unazad".) O promeni položaja nam govori izvod funkcije. Nakon što po definiciji odredimo izvod funkcije, dobijamo

$$s'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}\ .$$

a) Odgovor na pitanje dobijamo određujući $s'(10) = \frac{1}{121}$. Kako je ova vrednost, koja predstavlja brzinu kretanja tačke u trenutku $t = 10$, pozitivna, zaključujemo da se objekat kreće desno ("unapred") i povećava svoje rastojanje od početne tačke putanje.

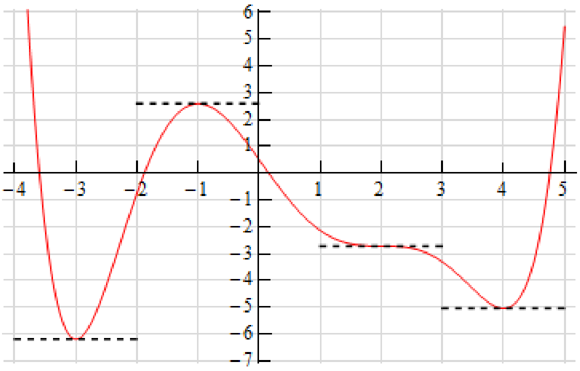
b) Uočavamo da je $s'(t) > 0$ za svake t. To znači da je za opisano kretanje brzina stalno pozitivna, a tačka se stalno kreće udesno, povećavajući rastojanje od početne tačke putanje. Dakle, ova tačka nikad neće prestati da se kreće.

Primer 6.6. *Funkcija $y = f(x)$ data je grafikom prikazanim na Slici 19. Skicirati približno grafik izvoda $y = f'(x)$ date funkcije.*



Slika 19: Grafik funkcije $y = f(x)$ posmatrane u Primeru 6.6.

Rešenje: Odmah treba naglasiti da na ovo pitanje ne možemo očekivati potpuno precizan odgovor. Tome je prilagođena i formulacija zadatka ("skicirati približno"). Ono što smo do sad naučili je da izračunamo izvod funkcije (po definiciji), ako je funkcija data analitički. Sada je funkcija zadata grafikom. Ono što smo do sad takođe naučili, a što će se pokazati kao korisno, je da znak izvoda povezujemo sa smerom promene funkcije (rast ili opadanje), a da intenzitet izvoda povezujemo sa brzinom promene funkcije. Izvod jednak nuli ukazuje na tačke u kojima se funkcija ne menja (ne raste, niti opada). Polazeći od toga, prvi korak u rešavanju je podela datog grafika (funkcije) na segmente, tako što uočimo tačke u kojima se funkcija ne menja. To su tačke u kojima je tangenta na krivu paralelna sa x osom (tangenta i x osa obrazuju ugao veličine 0). Za datu krivu te tačke su $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$ i $x = 4$. Ova situacija prikazana je na Slici 20.



Slika 20: Grafik funkcije $y = f(x)$ posmatrane u Primeru 6.6. Označene su tačke u kojima je $f' = 0$.

Jasno je da će važiti da je

$$f'(-3) = 0 \quad \text{i} \quad f'(-1) = 0 \quad \text{i} \quad f'(2) = 0 \quad \text{i} \quad f'(4) = 0;$$

U ovim tačkama grafik izvodne funkcije preseca x-osu.

Ove tačke, najčešće, predstavljaju granice intervala rasta, odnosno opadanja funkcije. Znamo takođe i da je u tačkama gde funkcija opada njen izvod negativan, a da je u tačkama gde raste njen izvod pozitivan. Na osnovu grafika sa Slike 19 zaključujemo da je:

	$x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 4$	$x > 4$
funkcija f	opada	raste	opada	opada	raste
izvodna funkcija f'	$f' < 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$

Izvodna funkcija je, dakle, negativna do $x = -3$. Na tom intervalu mora i da raste, jer na grafiku na Slici 19 vidimo da se polazna funkcija sporije menja (koeficijent pravca tangente je negativan, i povećava se) u blizini tačke -3.

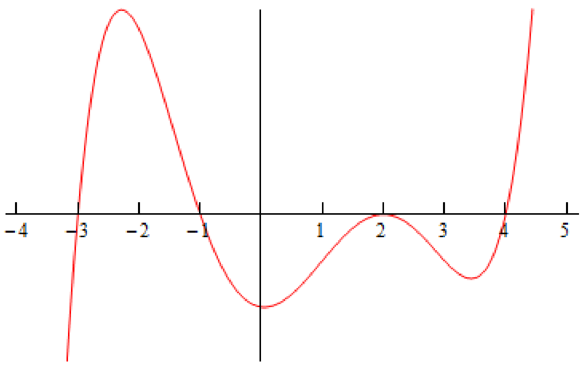
Nakon preseka sa x osom u tački -3, izvodna funkcija je pozitivna (polazna funkcija je rastuća), sve do sledećeg preseka sa x osom, za $x = -1$. Pozitivna funkcija između svoje dve nule može se ponašati na mnogo načina; ako se odlučimo za najjednostavniji slučaj, onda je jasno da postoji tačka maksimuma izvodne funkcije, do koje izvod raste, (a to je interval koji odgovara funkciji koja se brže menja), a zatim izvod opada (funkcija i dalje raste, ali sve sporije).

Između tačaka $x = -1$ i $x = 2$ situacija je slična kao i na intervalu $(-3, -1)$, samo je sada polazna funkcija opadajuća, a izvodna funkcija negativna. Između svojih nula negativna izvodna funkcija će postići ekstremnu vrednost, pre koje će opadati (što odgovara situaciji da polazna funkcija opada sa sve većim nagibom tangente), a zatim će izvodna funkcija rasti (to odgovara sporijem opadanju polazne funkcije).

Polazna funkcija nastavlja da opada za $x \in (2, 4)$, a izvodna funkcija je na tom intervalu negativna. Ponašanje i zaključci su analogni kao za interval $(-1, 2)$.

U tački $x = 4$ izvodna funkcija ima još jednu nulu (seče x osu), a zatim je pozitivna. U tom intervalu je nagib tangente na polaznu krivu sve veći, pa je izvodna funkcija rastuća.

Konačno, izvodnu funkciju možemo skicirati kao što je prikazano na Slici 21. Jasno je da većinu prikazanih vrednosti nismo precizno odredili, ali je količina informacije koju smo dobili na osnovu polaznog grafika ipak u velikoj meri dobro iskorišćena da bi se generisao grafik izvodne funkcije. Dobro je imati na umu da je koeficijent pravca tangente na krivu u posmatranoj tački jednak vrednosti izvoda. To znači da, ako nam je potrebno, možemo, recimo, uočiti da je koeficijent tangente na polaznu krivu u tački $x = 1$ približno -1 (ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose je približno $-\frac{\pi}{4}$); tada na grafiku izvodne funkcije tački $x = 1$ pridružujemo (približno) tačku $y = -1$.



Slika 21: Aproksimacija grafika funkcije $y = f'(x)$ za funkciju $f(x)$ posmatranu u Primeru 6.6.

Ovim primerom ilustrovali smo da je moguće uraditi i zadatak potpuno suprotan onome što smo do sad uglavnom radili (a i opet ćemo se tome posvetiti malo kasnije) - skicirali grafik date funkcije na osnovu njene izvodne funkcije. Sada smo skicirali grafik izvodne funkcije na osnovu grafika polazne, i pokazali da je informacija sadržana u jednom grafiku relevantna za generisanje drugog.

6.3 Osobine izvoda

Do ovog trenutka smo izračunali izvode nekih veoma jednostavnih funkcija, oslanjajući se samo na definiciju. Iako taj posao nije bio težak, ipak je sasvim jasno da za složenije funkcije ovakav način računanja izvoda neće biti ni malo prijatan. Zato ćemo uočiti neke osobine izvoda funkcije koje ćemo zvati *pravila diferenciranja*. Diferenciranje je postupak određivanja izvoda. Pravila koja ćemo navesti taj postupak znatno olakšavaju.

6.3.1 Izvod zbira, razlike, proizvoda i količnika funkcija

Ukoliko za dve funkcije f i g postoje izvodne funkcije f' i g', onda postoje i izvodne funkcije zbira, razlike, proizvoda i količnika funkcija f i g, i pri tome važe jednakosti:

$$\begin{aligned} (c\, f)' &= c \cdot f', \quad \text{za} \quad c \in \mathbb{R}; \\ (f \pm g)' &= f' \pm g'; \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g'; \\ (\frac{f}{g})' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad \text{za} \quad g \neq 0. \end{aligned}$$

Dokaz ovih osobina je tehnički i izvodi se na osnovu definicije izvoda. Navešćemo samo dokaz za izvod proizvoda, radi ilustracije.

Dokaz: Za funkciju $y(x) = f(x) \cdot g(x)$, na osnovu definicije izvoda, važi:

$$\begin{aligned} (y(x))' = (f \cdot g)' &= \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Dakle, izvod zbira i razlike funkcija jednak je zbiru, odnosno razlici izvoda funkcija. Međutim, analogno ne važi ni za izvod proizvoda, ni za izvod količnika: izvod proizvoda (količnika) dve funkcije *nije* jednak proizvodu (količniku) izvoda tih funkcija.

6.3.2 Izvod složene funkcije

Pretpostavimo da za funkcije f i g postoje izvodne funkcije f' i g'. Pretpostavimo da je složena funkcija y definisana kao kompozicija funkcija f i g: $y(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Tada za izvod složene funkcije y važi:

$$y'(x) = (f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ovo pravilo nećemo dokazivati, ali ćemo ga veoma često koristiti.

6.3.3 Izvod inverzne funkcije

Ako za funkciju $y = f(x)$ nad nekim intervalom (a, b) postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ i ako postoji njena izvodna funkcija $y' = f'(x)$ takva da je $f'(x) \neq 0$, onda postoji i izvodna funkcija inverzne funkcije funkcije f, $\left(f^{-1}\right)'$, i važi da je

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}\ .$$

Dokaz: I ovaj dokaz se oslanja isključivo na definiciju izvoda i definiciju inverzne funkcije. Podsetimo se da funkcija ima inverznu funkciju akko je bijekcija, a dovoljan uslov da funkcija bude bijekcija na nekom intervalu je da je monotona. Posmatranje možemo ograničiti na neki interval (a, b) koji pripada domenu funkcije.

Kako su nam potrebne (različite) oznake i za priraštaj funkcije i za priraštaj argumenta, koristićemo $\triangle y$ i $\triangle x$, umesto do sada korišćenog h.

Primetimo da za funkciju f^{-1} koja je inverzna funkciji $y = f(x)$ važi da je $f^{-1}(y) = x$. Takođe, kako je $f(x + \triangle x) = f(x) + \triangle y = y + \triangle y$, jasno je da je i $f^{-1}(y + \triangle y) = x + \triangle x$, kao i da je $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$.

Konačno, važi i da $\triangle x \to 0$ kada $\triangle y \to 0$. Tada je, na osnovu definicije izvoda, zadovoljeno:

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(y) &= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \triangle y) - f^{-1}(y)}{\triangle y} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x + \triangle x) - x}{f(x + \triangle x) - f(x)} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}} = \frac{1}{f'(x)}.
\end{aligned}$$

6.4 Izvodi elementarnih funkcija - tablica izvoda

Sve navedene osobine izvoda su od velike pomoći pri izračunavanju prvog izvoda pojedinih funkcija, jer je jasno da se, zahvaljujući njima, izvod za samo mali broj funkcija mora računati po definiciji. Sasvim je izvesno da je dovoljno znati izvode elementarnih funkcija, a da zatim izvodi svih ostalih funkcija, koje se dobijaju primenjujući operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicije, slede na osnovu navedenih pravila. Zato se izvodi elementarnih funkcija izračunaju jednom, a zatim se od dobijenih rezultata formira *Tablica izvoda*, koja se dalje koristi u radu. Pri izračunavanju izvoda elementarnih funkcija ključno je izračunavanje (odgovarajućih) graničnih verdnosti. Takođe, važno je imati na umu da su neke elementarne funkcije inverzne nekim drugim, pa se neki od tabličnih izvoda mogu dobiti i na osnovu pravila za izvod inverzne funkcije.

Primer 6.7. *Odrediti izvodnu funkciju elementarne trigonometrijske funkcije $y = \sin x$, a zatim i izvod funkcije $y = \arcsin x$.*

Rešenje: Po definiciji je

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

Koristili smo poznati rezultat da je $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, kao i da je

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{h}{\cos h + 1} \\
&= -1^2 \cdot 0 = 0\ .
\end{aligned}$$

Dalje, za određivanje izvoda funkcije $y = \arcsin x$ koristićemo upravo dobijeni rezultat da je $(\sin x)' = \cos x$, i činjenicu da je funkcija $y = \arcsin x$ inverzna funkciji $x = \sin y$, odnosno da važi

$$y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad x = \sin y \, .$$

Tada je, na osnovu pravila za izvod inverzne funkcije,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin \underbrace{\arcsin x}_{=y})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

Na sličan način, uz manje ili više truda, mogu se odrediti izvodi svih ostalih elementarnih funkcija. Rezultati su sumirani u Tablici izvoda:

Tabela 1: Tablica izvoda elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c, \ \ c \in \mathbb{R}$	0	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n, \ \ n \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathrm{tg}\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$a^x, \ \ a > 0, \ a \neq 1$	$a^x \ln a$	$\mathrm{ctg}\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{arctg}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arcctg}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

6.5 Izvod parametarski zadate funkcije

Osim eksplicitno, u obliku $y = f(x)$, funkcije mogu biti zadate i na druge načine. Jedan od tih načina je i *parametarski oblik* zadavanja funkcije. Ovaj oblik podrazumeva da je funkcija $y = y(x)$ definisana pomoću dve funkcije oblika

$$x = x(t) \quad \text{i} \quad y = y(t), \qquad \text{za} \quad t \in I,$$

gde je t neki *parametar*, a $I \subset \mathbb{R}$ neki interval realnih bojeva. Ovakve funkcije se grafički prikazuju u pravouglom koordinatnom sistemu, a grafik funkcije čini skup tačaka $(x(t), y(t))$ čije koordinate zadovoljavaju date parametarske jednačine (za istu vrednost parametra). Uočimo da se, eliminacijom parametra t iz datih jednačina, može dobiti eksplicitni (ili implicitni) zapis funkcije.

Za parametarski zadate funkcije možemo, naravno, definisati prvi izvod oslanjajući se na eksplicitni zapis do kog možemo doći eliminacijom parametra. Značajno je, međutim, da izvod parametarski zadate funkcije možemo izračunati i koristeći parametarske jednačine. Da bismo izveli formulu za izvod parametarski zadate funkcije, koristićemo pravilo za izvod složene funkcije, i pravilo za izvod inverzne funkcije.

Ako je funkcija $y = f(x)$ data parametarskim jednačinama $x = h(t)$ i $y = r(t)$, za $t \in I$, i ako funkcija h ima inverznu funkciju h^{-1}, onda je

$$t = h^{-1}(x) \qquad \text{i} \qquad y(x) = r(h^{-1}(x)),$$

a tada je

$$y'(x) = \left(r(h^{-1}(x))\right)' = r'(h^{-1}(x)) \cdot \left(h^{-1}(x)\right)' = r'(h^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{h'(t)} = \frac{r'(t)}{h'(t)}\ .$$

Često se prethodno zapisuje u obliku

$$y'(x) = f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

a nekad se, da bi se naglasilo da je reč o parametarskim izvodima, koriste i oznake

$$y'(x) = f'(x) = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t}\ .$$

Parametarski zapis funkcije je vrlo pogodan i prirodan u mnogim situacijama u praksi. Uobičajeno se koristi da se opiše kretanje tačke duž neke putanje, gde se u svakom trenutku t koordinate x i y položaja tačke određuju kao funkcije parametra (vremena) t. Grafik funkcije predstavlja trajektoriju (putanju) tog kretanja. "Podaci" o kretanju iz ovakvog zapisa funkcije se dobijaju na načine koje ćemo mnogo detaljnije opisati u okviru kursa iz Matematičke analize 2.

Primer 6.8. *Položaj tačke u trenutku t, tokom nekog kretanja, određen je jednačinama $x(t) = 2\cos t$ i $y(t) = \sin t$, za $t \in [0, 2\pi]$. Odrediti tangentu na trajektoriju u tački za koju je $x = 1$ i $y > 0$.*

Rešenje: Prvo možemo primetiti da je putanja po kojoj se tačka kreće centralna elipsa sa poluosama 2 i 1. To možemo potvrditi uvrštavajući različite vrednosti parametra t u parametarske jednačine i generišući koordinate tačaka putanje.

Da bismo napisali jednačinu tangente na ovu krivu potrebni su nam (baš kao i do sad) tačka na krivoj u kojoj želimo da odredimo tangentu i koeficijent pravca tangente. Za tačku sa $x = 1$, na osnovu odgovarajuće parametarske jednačine, važi

$$1 = 2\cos t \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2} \text{ (uz uslov } y > 0), \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad y(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

pa je tačka u kojoj određujemo tangentu $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Koeficijent pravca tangente je vrednost izvodne funkcije $y'(x)$ u tački $x = 1$. Ovaj izvod ćemo odrediti koristeći parametarske jednačine funkcije.

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t}{-2\sin t}\ .$$

Uvrštavajući $t = \frac{\pi}{3}$, dobijamo da je $y'(1) = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{-2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}}$. Konačno, tražena jednačina tangente je

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x - 1)\ .$$

6.6 Izvod implicitno zadate funkcije

U slučaju kada je funkcija zadata implicitno može biti teško odrediti njen eksplicitni oblik, čak i kada je izvesno da takav oblik (teoretski) postoji. U takvim slučajevima je od koristi mogućnost da se izvod funkcije odredi na osnovu implicitnog oblika funkcije. Dovoljno je na odgovarajući način iskoristiti pravilo za izvod složene funkcije.

Funkcija $F(x, y(x)) = 0$ je implicitna forma funkcije $y = f(x)$. To znači da je jasno koja od dve promenljive, koje su naizgled potpuno ravnopravne u implicitnoj formi funkcije, predstavlja zavisnu, a koja nezavisnu promenljivu (ili bar da je jasno da ne mogu obe biti nezavisne!).

Recimo, linearna funkcija $y(x) = x - 3$ je zadata eksplicitno, a ista ta funkcija u implicitnom obliku je $x - y = 3$. Naravno, istu funkciju možemo napisati i u eksplicitnom obliku $x(y) = y - 3$; ova funkcija je dovoljno jednostavna da lako dolazimo do svih navedenih oblika. To, nažalost, nikako nije pravilo u opštem slučaju.

Postupak za diferenciranje implicitno zadate funkcije ćemo prikazati na primeru.

Primer 6.9. *Odrediti izvode funkcija* $\sin(3 - 6x)$ *i* $\sin(y(x))$.

Rešenje: U prvom slučaju reč je o složenoj funkciji koju lako diferenciramo primenjujući odgovarajuće pravilo:

$$(\sin(3 - 6x))' = \sin'(3 - 6x) \cdot (3 - 6x)' = \cos(3 - 6x) \cdot (-6) .$$

Ispostavlja se da ni u drugom slučaju situacija nije drugačija; sada je, praktično, problem malo opštiji, jer umesto konkretne funkcije $f(x) = 3-6x$ imamo opštu funkciju $y(x)$, ali je način razmišljanja i redosled koraka potpuno isti. Imamo na umu da je izvod funkcije $y(x)$ funkcija $y'(x)$.

$$(\sin(y(x)))' = \sin' y(x) \cdot y'(x) = \cos y(x) \cdot y'(x) .$$

Primer 6.10. *Odrediti* y' *za implicitno zadatu funkciju* $y = y(x)$ *definisanu jednačinom* $e^{2x+3y} = x^2 - \ln(xy^3)$.

Rešenje: Diferenciranjem leve i desne strane date jednačine po nezavisnoj promenljivoj x, potpuno analogno kao u prethodnom primeru, sada izračunavamo

$$e^{2x+3y}(2 + 3y') = 2x - \frac{1}{xy^3}(y^3 + 3xy^2y') .$$

Izražavajući odatle y', dobijamo traženi izraz za izvod date implicitne funkcije:

$$\begin{aligned}
2e^{2x+3y} + 3y'e^{2x+3y} &= 2x - \frac{y^3}{xy^3} - \frac{3xy^2y'}{xy^3} \\
2e^{2x+3y} + 3y'e^{2x+3y} &= 2x - \frac{1}{x} - \frac{3y'}{y} \\
\left(3e^{2x+3y} + \frac{3}{y}\right) y' &= 2x - \frac{1}{x} - 2e^{2x+3y} \\
y' &= \frac{2x - \frac{1}{x} - 2e^{2x+3y}}{3e^{2x+3y} + \frac{3}{y}} .
\end{aligned}$$

6.7 Logaritamski izvod

Uočimo da, ukoliko želimo da odredimo izvod funkcije $y(x) = x^x$, to ne možemo da uradimo direktno primenjujući rezultate iz Tablice izvoda i navedene osobine diferenciranja; posmatrana funkcija ima promenljivu i u osnovi, i u eksponentu stepena, a funkcije koje imamo na raspolaganju u tablici su ili stepena funkcija (sa konstantnim eksponentom stepena), ili eksponencijalna (sa konstantnom osnovom stepena). U navedenom slučaju ćemo morati da uradimo nešto drugo. Primenićemo logaritmovanje, a zatim i pravilo za izvod implicitno zadate funkcije.

Postupak koji ćemo opisati može se primeniti na određivanje izvoda funkcija oblika $y(x) = f(x)^{g(x)}$ (podrazumevamo da je $f(x) > 0$). Logaritmovanjem leve i desne strane ovog izraza dobijamo:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x) .$$

Diferenciranjem leve i desne strane, koristeći pravilo za izvod implicitno zadate funkcije (leva strana) i pravilo za izvod proizvoda i složene funkcije (desna strana), dobijamo izraz za izvod posmatrane funkcije:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) .$$

Primer 6.11. *Odrediti izvod funkcije* $y(x) = x^x$

Rešenje: Umesto da pamtimo konačan izraz za izvod funkcije navedenog oblika, sprovešćemo opisani postupak uvek kada nam je ovakav izvod potreban. U ovom slučaju je, za $x > 0$:

$$\ln y(x) = \ln x^x = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = x^x(\ln x + 1) \; .$$

Uočimo da logaritmovanje pre izračunavanja izvoda može da bude korisno i kada prosto želimo da pojednostavimo račun, a funkcija je oblika proizvoda stepena više funkcija.

Primer 6.12. *Odrediti izvod funkcije* $y(x) = \sin^3 x \cdot \ln^2 x \cdot x^3$.

Rešenje: Logaritmovanjem leve i desne strane izraza dobićemo zbir funkcija, umesto proizvoda stepena funkcija. Određivanje izvoda time postaje mnogo jednostavnije nego kada to radimo direktno na osnovu datog oblika funkcije.

$$\ln y = 3 \ln \sin x + 2 \ln \ln x + 3 \ln x \; .$$

Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$$\frac{y'}{y} = 3\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2}{x \ln x} + \frac{3}{x} \; ,$$

odnosno

$$y'(x) = \sin^3 x \cdot \ln^2 x \cdot x^3 \left(3 \operatorname{ctg} x + \frac{2}{x \ln x} + \frac{3}{x} \right) \; .$$

6.8 Izvodi višeg reda

Kada za funkciju f odredimo izvodnu funkciju f', ništa nas ne sprečava da i za funkciju f' odredimo izvodnu funkciju (naravno, tamo gde ona postoji). Ovim smo definisali drugi izvod funkcije f, koji označavamo sa f''.

Drugim rečima, važi

$$f''(x) = (f'(x))'$$

i, u opštem slučaju,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \; .$$

Uočimo da se izvod višeg reda označava korišćenjem eksponenta u zagradi, izuzev prvih nekoliko (uglavnom prva tri). Uobičajeno je da se sama funkcija smatra svojim "nultim izvodom", odnosno da se koristi oznaka $y^{(0)}(x) = y(x)$.

Primer 6.13. *Odrediti*

a) $y^{(5)}$ *za funkciju* $y(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 7$.

b) $y^{(n)}$ *za funkciju* $y(x) = e^x$.

c) $y^{(n)}$ *i* $y^{(n)}(0)$ *za funkciju* $y(x) = \cos x$.

Rešenje:

a) Računajući redom izvode od prvog do petog, za dati polinom četvrtog stepena, dobijamo:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4 \\ y''(x) &= 36x^2 - 12x + 2 \\ y'''(x) &= 72x - 12 \\ y^{(4)}(x) &= 72 \\ y^{(5)}(x) &= 0 \; . \end{aligned}$$

Uočavamo da je izvod $(n+1)$-vog reda polinoma n-tog stepena jednak nuli. Ovu osobinu polinoma nije loše imatu na umu.

b) Računajući redom nekoliko izvoda date eksponencijalne funkcije, uočavamo pravilnost:

$$y'(x) = e^x, \qquad y''(x) = e^x, \qquad y'''(x) = e^x, \qquad y^{(4)}(x) = e^x, \ \ldots$$

i zaključujemo da važi da je

$$y^{(n)}(x) = e^x \ .$$

Ovo je veoma zgodna osobina eksponencijalne funkcije.

c) Računajući redom nekoliko izvoda date trigonomtrijske funkcije, uočavamo pravilnost:

$$y'(x) = -\sin x, \qquad y''(x) = -\cos x, \qquad y'''(x) = \sin x, \qquad y^{(4)}(x) = \cos x, \ \ldots$$

i zaključujemo da važi da je, za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$y^{(4k)}(x) = \cos x, \qquad y^{(4k+1)}(x) = -\sin x, \qquad y^{(4k+2)}(x) = -\cos x, \qquad y^{(4k+3)}(x) = \sin x \ .$$

Dalje je

$$y^{(4k)}(0) = \cos 0 = 1, \qquad y^{(4k+2)}(x) = -\cos 0 = -1,$$

dok je

$$y^{(4k+1)}(0) = -\sin 0 = y^{(4k+3)}(0) = \sin 0 = 0, \ .$$

6.9 Diferencijal funkcije - definicija i geometrijski smisao. Linearna aproksimacija funkcije.

Pojam *diferencijala funkcije* pojavljuje se u vezi sa analizom priraštaja funkcije u odnosu na priraštaj njene linearne aproksimacije (tangente na krivu).

Uvodeći definiciju prvog izvoda funkcije u tački, naglasili smo suštinsku vezu između vrednosti prvog izvoda funkcije u tački i jednačine njene tangente u toj tački. Uočili smo, takođe, da je tangenta na krivu u okolini posmatrane tačke bliska funkciji, odnosno (s obzirom da je tangenta definisana linearnom funkcijom), da tangenta predstavlja *linearnu aproksimaciju* date funkcije. Linearna aproksimacija je najjednostavnija po obliku, a često je dovoljno dobra; ovakvom aproksimacijom pojednostavljujemo funkciju zamenjujući je linearnom, a da pri tom vrednosti aproksimirajuće funkcije ostaju dovoljno blizu "pravim".

Posmatrajmo funkciju $y = f(x)$ i pretpostavimo da znamo njenu vrednost $f(x_0)$ u nekoj tački x_0. Interesuje nas vrednost ove funkcije u tački $(x_0 + \triangle x)$ koja je bliska tački x_0. Ta vrednost je $f(x_0 + \triangle x)$. Razliku vrednosti funkcije u ovim dvema tačkama, (x_0 i $x_0 + \triangle x$), smo već ranije nazvali priraštaj funkcije i označili sa $\triangle y$:

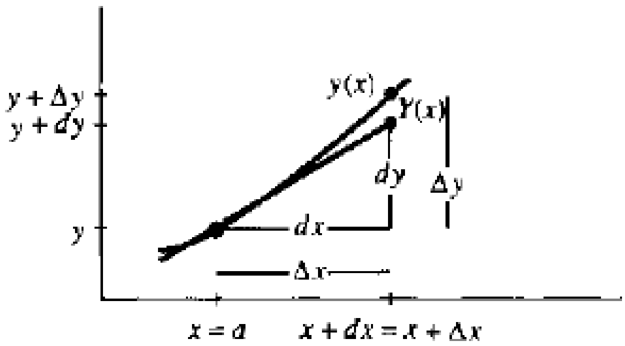
$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

Jasno je da, znajući vrednost $f(x_0)$ i vrednost navedenog priraštaja $\triangle y$, možemo da izračunamo i vrednost $f(x_0 + \triangle x)$. Ukoliko, međutim, nismo u mogućnosti da odredimo tačnu vrednost $f(x_0 + \triangle x)$, (a u praksi često nismo), u nekim situacijama možemo da se zadovoljimo i približnom vrednošću za $f(x_0 + \triangle x)$ - *aproksimacijom*. Za tu aproksimaciju nam, u stvari, treba aproksimacija odgovarajućeg priraštaja $\triangle y$. Posmatrajući Sliku 22, uočavamo da je tangenta na krivu u tački x (relativno) dobra aproksimacija funkcije, bar za vrednosti argumenta bliske tački x (tj. za malo $\triangle x$). U stvari, uočavamo da je priraštaj linearne funkcije (tangente), na slici označen sa dy, dobra aproksimacija priraštaja $\triangle y$. Vrednost dy se naziva *diferencijal* funkcije f.

Posmatrajući Sliku 22, lako uočavamo da je

$$dy = f'(x_0)dx \ , \tag{5}$$

pri čemu je sa dx označen (mali) korak duž x-ose, odnosno, mala promena promenljive x, ali ovog puta naglašeno vezano za tangentu (linearnu funkciju). Drugim rečima, "par" $\triangle x$, $\triangle y$ koristimo da označimo priraštaj argumenta i priraštaj posmatrane funkcije, a "par" dx, dy koristimo da označimo priraštaj argumenta i priraštaj linearne aproksimacije funkcije.



Slika 22: Geometrijska interpretacija diferencijala - linearna aproksimacija funkcije.

Ono što nas zanima je razlika između $\triangle y$ i dy kada je $\triangle x = dx$. Jasno je da možemo napisati da je

$$\triangle y = dy + R(\triangle x), \tag{6}$$

i da je tada $R(\triangle x)$ razlika između priraštaja date funkcije i priraštaja duž njene tangente. Jasno je, takođe, da veličina R zavisi od $\triangle x$, ali tačnu formulu te zavisnosti, u opštem slučaju ne znamo. Ono što očekujemo od (dobre) aproksimacije je da greška bude mala, bar u blizini tačke x_0, odnosno, za male vrednosti $\triangle x$. Formalno, očekujemo da važi da u graničnom slučaju, kada $\triangle x = dx \to 0$, bude ispunjeno i da $\dfrac{R(\triangle x)}{\triangle x} \to 0$, a samim tim i $\triangle y \to dy$. Tada kažemo da je funkcija y *diferencijabilna* u tački x_0. Diferencijabilnost funkcije možemo shvatiti i kao njenu osobinu da se (lokalno) može dobro aproksimirati svojom tangentom (odnosno, da greška te aproksimacije teži nuli u okolini posmatrane tačke).

S obzirom na jednakost (6), uobičajeno je da se kaže da je diferencijal funkcije *glavni* ili *linearni* deo priraštaja funkcije.

Važno tvrđenje, koje navodimo bez dokaza, je:

Teorema 6.1. *Potreban i dovoljan uslov da funkcija $y = f(x)$ bude diferencijabilna u nekoj tački x je da u toj tački postoji prvi izvod funkcije, $f'(x)$.*

Na osnovu prethodne teoreme, jasno je da diferencijabilna funkcija mora imati tangentu u svakoj posmatranoj tački. To znači da svakako mora biti neprekidna, ali da uz to ne sme imati, recimo, špiceve, ni vertikalne tangente. Uočimo da smo prethodnim formulisali i vezu između neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije - diferencijabilna funkcija je neprekidna, ali neprekidna funkcija ne mora biti diferencijabilna (recimo, funkcija $y = |x|$ je neprekidna, ali nije diferencijabilna za $x = 0$).

Ukoliko funkcija f ima izvod u svakoj tački x nekog intervala (odnosno, diferencijabilna je na tom intervalu), onda važi da je za sve posmatrane vrednosti x

$$dy = f'(x)dx\ .$$

Uočimo da odavde možemo "izvesti" i da je

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\,, \qquad \text{odnosno} \quad y'(x) = \frac{dy}{dx}\ .$$

Ovu oznaku (Lajbnicovu oznaku) prvog izvoda ćemo često koristiti. Jako je, međutim, važno da imamo na umu da $\dfrac{dy}{dx}$ nije ni u kom slučaju razlomak u uobičajenom smislu!

Konačno, možemo zaključiti da za (diferencijabilnu) funkciju $y = f(x)$ u okolini tačke x_0 važi aproksimacija da je $\triangle y \approx dy$ (za malo $\triangle x = dx = x - x_0$), odnosno:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ . \tag{7}$$

Ova aproksimacija (linearnu aproksimacija, ili aproksimacija pomoću diferencijala) se veoma često koristi u praksi i dobro ju je imati na umu. Uočimo da ovu aproksimaciju zasnivamo na poznavanju vrednosti funkcije i vrednosti njenog prvog izvoda u *jednoj* tački x_0, i da na osnovu toga približno određujemo vrednosti funkcije u svim tačkama x u nekoj okolini tačke x_0.

Primer 6.14. *Koristeći linearnu aproksimaciju (diferencijal) funkcije, odrediti približnu vrednost za* $(1.01)^2$ *i za* $(1.02)^2$. *Kolika se greška pravi ovakvom aproksimacijom?*

Rešenje: Jasno je da nam za izračunavanje traženih vrednosti treba aproksimacija funkcije $y = x^2$ u tački $x_0 = 1$. Za to nam trebaju vrednosti $f(1)$ i $f'(1)$. Kako je za funkciju $y = x^2$ izvodna funkcije $y = 2x$, vrednost $y'(1) = 2$, dok je $f(1) = 1^2 = 1$.

Ono što ćemo uraditi je da ćemo priraštaj funkcije aproksimirati priraštajem tangente na funkciju, za priraštaje argumenta $\triangle x = dx = 0.01$ i $\triangle x = dx = 0.02$. Dakle, umesto da posmatramo ponašanje kvadratne funkcije $y = x^2$, mi ćemo koristiti ponašanje njene tangente

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x - 1.$$

Diferencijal funkcije je $dy = f'(1)dx = 2dx$. Kako je, u prvom slučaju, $dx = \triangle x = 0.01$, dobijamo

$$(1.01)^2 = f(1.01) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0.01 \qquad \Rightarrow \qquad (1.01)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0.01 \qquad \Rightarrow \qquad (1.01)^2 \approx 1.02\,.$$

U drugom slučaju je $dx = \triangle x = 0.02$, pa je

$$(1.02)^2 = f(1.02) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0.02 \qquad \Rightarrow \qquad (1.02)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0.02 \qquad \Rightarrow \qquad (1.02)^2 \approx 1.04\,.$$

S obzirom da je tačna vrednost $(1.01)^2 = 1.0201$, zaključujemo da je greška aproksimacije u ovom slučaju $1.0201 - 1.02 = 0.0001$.

Takođe, tačna vrednost $(1.02)^2 = 1.0404$, pa zaključujemo da je greška aproksimacije u ovom slučaju $1.0404 - 1.04 = 0.0004$. U ovom slučaju greška je veća; to je u skladu sa činjenicom da je i $\triangle x$ u ovom slučaju veće, odnosno da je tačka u kojoj računamo približnu vrednost udaljenija od tačke u kojoj koristimo tačnu vrednost.

Primetimo da smo za izračunavanje približnih vrednosti u oba slučaja koristili vrednosti $f(1)$ i $f'(1)$, kao jedine vrednosti "u vezi sa" datom funkcijom i da se sve aproksimacije u blizini tačke $x = 1$ zasnivaju samo na njima, i željenom koraku $dx = \triangle x$.

Takođe, nije na odmet naglasiti da je navedeni primer ilustrativan, i da u realnom slučaju svakako ne znamo tačne vrednosti funkcije. To znači da grešku aproksimacije ne možemo odrediti kao u navedenom primeru, odnosno, da je ne znamo. U većini slučajeva nastojimo da je (pr)ocenimo.

Napomenimo još i da se osnovna pravila diferenciranja (računanja izvoda) prenose i na diferencijal, odnosno da važi:

$$\begin{aligned} d(cf) &= c \cdot df \quad \text{za } c \in \mathbb{R} \\ d(f \pm g) &= df \pm dg \\ d(fg) &= g\,df + f\,dg \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}. \end{aligned}$$

7 Primene izvoda funkcije

Ovaj deo kursa posvećen je nekim od brojnih primena izvoda funkcije. Ideja prisutna u svim narednim odeljcima (posvećenim različitim primenama izvoda) je kako na osnovu izvoda funkcije saznati nešto o funkciji.

7.1 Teorema o srednjoj vrednosti - Lagranžova teorema

Teorema o srednjoj vrednosti je jedan od najvažnijih rezultata diferencijalnog računa. Ona dovodi u vezu nagib (rast) funkcije u tački sa prosečnim nagibom (rastom) funkcije na nekom intervalu. Klasična ilustracija pitanja na koje daje odgovor Teorema o srednjoj vrednosti je: Ako je duž nekog puta prosečna brzina $75km/h$, da li postoji tačka (trenutak) u kom je trenutna brzina kretanja $75km/h$? Teorema tvrdi da, pod odgovarajućim uslovima koje funkcija (brzina) mora da zadovolji, takva tačka postoji.

Teorema 7.1. *(Teorema o srednjoj vrednosti (Lagrange)) Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ zadovoljava sledeća dva uslova:*

1. *f je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$;*
2. *f je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b).*

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da važi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ili

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Lagranžova teorema je egzistencijalnog karaktera - ne govori ništa o tome kako da odredimo tačku c sa navedenom osobinom, samo tvrdi da takva tačka postoji na posmatranom intervalu.

Izraz $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ predstavlja prosečnu stopu rasta (nagib) funkcije na posmatranom intervalu. Možemo ga izraziti i kao $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ za $\triangle x = b - a$. Izraz $f'(c)$ je, sa druge strane, vrednost $\frac{dy}{dx}$ u tački $x = c$. Ovo znači da Teorema o srednjoj vrednosti uspostavlja vezu (jednakost) između izraza $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ i izraza $\frac{dy}{dx}$ bar u jednoj tački posmatranog intervala.

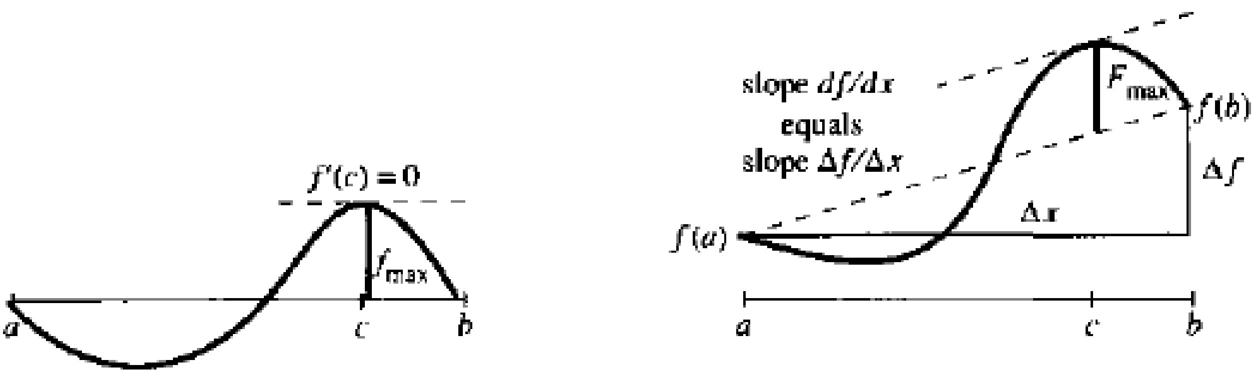
Geometrijska interpretacija Teoreme o srednjoj vrednosti je prikazana na Slici 23. Slika na desnoj strani prikazuje da na posmatranom intervalu (a, b) postoji tačka c u kojoj je tangenta na krivu paralelna pravoj koja spaja krajnje tačke krivolinijskog segmenta, tj. tačke $f(a)$ i $f(b)$. Na levoj strani Slike 23 je prikazana interpretacija specijalnog slučaja Teoreme o srednjoj vrednosti, kada je $f(a) = f(b)$ (u ovom specijalnom slučaju su obe navedene vrednosti jednake 0. Geometrijski, u ovom slučaju Teorema tvrdi da unutar intervala (a, b) tada postoji tačka u kojoj je tangenta paralelna sa x-osom.

Pomenuti specijalni slučaj Lagranžove teoreme poznat je kao Rolova teorema. Njena formulacija je:

Teorema 7.2. *(Teorema Rola (Rolle)) Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ zadovoljava sledeća tri uslova:*

1. *f je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$;*
2. *f je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b);*
3. *$f(a) = f(b)$*

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da važi da je $f'(c) = 0$.



Slika 23: Geometrijska interpretacija Rolove i Lagranžove teoreme.

Navedene teoreme nećemo dokazivati. Napomenućemo samo da se dokaz Rolove teoreme zasniva na osobini neprekidne funkcije da na zatvorenom intervalu postiže svoj (globalni) maksimum i minimum, kao i na činjenici da je u ekstremnim tačkama (tačkama (lokalnog) minimuma i maksimuma) zadovoljeno da je $f'(x) = 0$.

Lagranžova teorema se zatim dokazuje tako što se svede na specijalni slučaj Rolove (geometrijski, ovo je prilično jasno sugerisano na Slici 23). To se postiže definisanjem pomoćne funkcije

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{\triangle f}{\triangle x}(x-a) \right)$$

na koju se može primeniti Rolova teorema. Izračunavajući izvod funkcije $F(x)$ u tački c u kojoj je (po Rolovoj teoremi) $F'(c) = 0$, dobijamo tvrđenje Lagranžove teoreme.

Navešćemo još nekoliko komentara, zapažanja i posledica, u vezi sa Lagranžovom i Rolovom teoremom.

- Ako u formulaciji Lagranžove teoreme stavimo da je $b = x$, dobijamo da je, za $c \in (a, x)$ zadovoljeno da je $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$. Ovo tvrđenje je vrlo slično linearnoj aproksimaciji funkcije (7). Osnovna razlika je što ovde imamo jednakost, umesto aproksimacije. Naravno, problem je u tome što jednakost možemo da koristimo samo ako znamo vrednost c, a to u opštem slučaju, ne znamo. Dakle, ostaje nam na raspolaganju aproksimacija, i saznanje da (idealna) tačka c negde postoji.

- Posledica Lagranžove teoreme je tvrđenje: Ako je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$ (za funkciju f koja ispunjava uslove Lagranžove teoreme o neprekidnosti i diferencijabilnosti), onda je $f(x) = c$ na intervalu $[a, b]$. (Dakle, f je tada konstantna funkcija).

- Ako za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ na nekom intervalu (a, b) važi da je $f'(x) = g'(x)$, onda se funkcije f i g na tom intervalu razlikuju samo za konstantu, tj. važi da je $f(x) = g(x) + c$, za $c \in \mathbb{R}$.

- Na osnovu Rolove teoreme može se pokazati da za funkciju $y = f(x)$ koja ispunjava sledeća tri uslova

  1. $f(x)$ je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$;
  2. $f(x)$ je diferencijabilna nad otvorenim intervalom (a, b) i pri tom je $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$;
  3. $f(a) \cdot f(b) < 0$,

  važi f ima tačno jednu nulu nad intervalom (a, b).
  Napomena: Već nam je poznato da uslovi 1. i 3. obezbeđuju postojanje *bar* jedne nule funkcije na posmatranom intervalu. Uslov 2. obezbeđuje da je nula funkcije u uočenom intervalu jedinstvena.

Ova tvrđenja nalaze primene u mnogim situacijama. I mi ćemo se kasnije u nekim slučajevima pozivati na njih.

7.2 L'Hospital-ovo pravilo - granične vrednosti neodređenih izraza

Polazeći od jednog uopštenja Teoreme o srednjoj vrednosti (Košijeva teorema) koje ovde nećemo navoditi, može se dokazati Lopitalova teorema. Ova teorema je od izuzetnog značaja pri rešavanju graničnih vrednosti neodređenih izraza. Sa neodređenim izrazima i njihovim graničnim vrednostima smo se već susreli. Neke smo rešavali lako, ali će nam u mnogim slučajevima teorema koja sledi biti od velike pomoći. Navešćemo je bez dokaza.

Teorema 7.3. *(L'Hospital-ova teorema) Pretpostavimo da za funkcije $f(x)$ i $g(x)$, koje su definisane i diferencijabilne nad nekim intervalom I (sem, eventualno, u tački $a \in I$), i pri tome je funkcija g takva da je $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in I$ sem, eventualno, u tački a, važi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Tada je*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ukoliko $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji.

Primer 7.1. *Odrediti $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.*

Rešenje: Već smo dokazali da je tražena granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Sada to možemo potvrditi primenom Lopitalove teoreme.

Funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x$ su definisane i diferencijabilne na čitavom skupu $\mathbb{R}$, a uz to važi da je $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Lopitalova teorema tvrdi da je tada

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1\ .$$

Nekoliko napomena u vezi sa ovom teoremom:

- Uslovi teoreme jasno govore da se primenom Lopitalovog pravila rešavaju granične vrednosti neodređenih izraza oblika $\dfrac{0}{0}$. Ideja na koju se ova teorema oslanja je da se dve beskonačno male veličine aproksimiraju tangentama, a da se zatim njihov količnik ponaša kao i količnik koeficijenata pravaca tih tangenti.
- Pravilo je definisano za granične vrednosti u konačnoj tački. Lako se može uopštiti i na granične vrednosti u beskonačnoj tački (tj. za $x \to \infty$, kao i za $x \to -\infty$).
- Pravilo se dalje može uopštiti i na slučaj kada za posmatrane funkcije važi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (i opet, i za limes u beskonačnoj tački, a takođe i za slučajeve koji uključuju $-\infty$). Dakle, i u slučaju granične vrednosti neodređenog izraza oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$ Lopitalova teorema se može direktno primeniti i može se posmatrati količnik izvoda funkcija umesto količnika samih funkcija.
- Veoma je važno imati na umu da Lopitalovo pravilo podrazumeva da računamo *količnik izvoda* funkcija, a ne izvod količnika funkcija. Naravno, dobro je i da ne zaboravimo kada (i kako) treba računati izvod količnika funkcija.
- Teorema se može primeniti više puta uzastopno, ukoliko su uslovi za to zadovoljeni (odnosno, ukoliko je i granična vrednost količnika izvoda funkcija neodređeni izraz).
- Teorema garantuje da je granična vrednost neodređenog izraza oblika $\dfrac{0}{0}$ (ili $\dfrac{\infty}{\infty}$) jednaka graničnoj vrednosti količnika izvoda, ako ova poslednja postoji. Važno je imati na umu da, ukoliko $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ne postoji, to ništa ne govori o postojanju polazne granične vrednosti $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (osim da je moramo računati na neki drugi način).

- Teorema se direktno može primeniti za izračunavanje samo dve od sedam graničnih vrednosti neodređenih izraza. Međutim, svih preostalih pet se mogu svesti na jednu od dve na koje se teorema direktno odnosi. To znači da se Lopitalova teorema (direktno ili indirektno) može koristiti za izračunavanje svih oblika graničnih vrednosti neodređenih izraza.

Primer 7.2. *Izračunati* $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$.

Rešenje: Funkcije $f(x) = x + \sin x$ i $g(x) = x$ ispunjavaju sve uslove Lopitalove teoreme, a tražena granična vrednost je neodređeni izraz oblika $\frac{\infty}{\infty}$. Direktnom primenom Lopitalove teoreme dobijamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = 1 + \lim_{x\to\infty} \cos x \ ,$$

međutim, ovaj poslednji limes, $\lim_{x\to\infty} \cos x$, ne postoji. To znači da o traženoj graničnoj vrednosti na ovaj način nismo dobili odgovor. Uočavamo, međutim, da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 \ .$$

Dakle, u ovom slučaju je graničnu vrednost bilo lako izračunati direktno, a nije se mogla odrediti primenom Lopitalove teoreme.

Primer 7.3. *Izračunati:*

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$*;*

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$*;*

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$*;*

d) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$*;*

e) $\lim_{x\to -\infty} x e^x$*;*

f) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$*;*

g) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$*;*

Rešenje: Sve navedene granične vrednosti su limesi neodređenih izraza. Sve se mogu izračunati primenom Lopitalove teoreme, direktno ili nakon pogodne transformacije i svođenja polaznog izraza na oblik pogodan za primenu teoreme.

a) Direktnom primenom Lopitalovog pravila dva puta uzastopno, za ovaj limes neodređenog izraza oblika $\frac{\infty}{\infty}$ dobijamo $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$.

b) Direktnom primenom Lopitalovog pravila za ovaj limes neodređenog izraza oblika $\frac{0}{0}$ dobijamo $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

c) Direktnom primenom Lopitalovog pravila za ovaj limes neodređenog izraza oblika $\dfrac{0}{0}$ koji smo već računali u Primeru 6.7 dobijamo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

d) Ovaj neodređeni izraz je oblika $0\cdot\infty$ pa se na njega Lopitalovo pravilo može primeniti tek nakon transformacije koja ga svodi na jedan od oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$ ili $\dfrac{0}{0}$. U skladu sa standardnim postupkom je

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0\,.$$

e) Ovaj neodređeni izraz je, kao i prethodni, oblika $0\cdot\infty$, i ideja za njegovo rešavanje je ista kao i u prethodnom slučaju. Važno je uočiti, međutim, da je u ovom primeru važno na koji od dva moguća, i u opštem slučaju potpuno ravnopravna, načina transformišemo izraz. Tako pokušaj da limes odredimo kao

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{-\frac{2}{x^3}} = \ldots$$

očigledno ne vodi nikakvom korisnom zaključku, ali graničnu vrednost lako dobijamo uz pomoć druge transformacije:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

f) Neodređeni izraz je u ovom slučaju oblika $\infty-\infty$. On se obično faktorizacijom svodi na izraz oblika $0\cdot\infty$, na koji se zatim primenjuje postupak opisan u primerima (d) i (e). U nekim slučajevima se $\infty-\infty$ i direktno može svesti na količnike $\dfrac{\infty}{\infty}$ ili $\dfrac{0}{0}$. Ovde je, upravo u tom smislu:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}\,.$$

g) Ovaj primer predstavlja neodređeni izraz oblika ∞^0. Postupak za njegovo rešavanje uključuje niz koraka koji dovode do toga da se može primeniti Lopitalova teorema. Potpuno istim postupkom izračunavaju se i limesi neodređenih izraza oblika stepena: 0^0 i 1^∞.

Postupak podrazumeva sledeće korake: (1) logaritmovanje datog izraza, (2) izmenu redosleda limesa i funkcije (zahvaljujući neprekidnosti logaritamske funkcije), (3) primenu osobine logaritma za stepen, (4) transformisanje dobijenog limesa oblika $0\cdot\infty$ na oblik na koji se primenjuje Lopitalova teorema, (5) primenu Lopitalove teoreme i izračunavanje granične vrednosti logaritma polazne funkcije (6) antilogaritmovanje i izračunavanje tražene granične vrednosti.

Na posmatranom primeru to izgleda ovako:

$$A = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \qquad\Rightarrow\qquad \ln A = \ln\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\,,$$

pa je dalje

$$\begin{aligned}\ln A &= \ln\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\ln x^{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0\,,\end{aligned}$$

pa, na osnovu $\ln A = 0$, za traženi limes A važi da je $A = e^0 = 1$.

7.3 Aproksimacija funkcije - Tejlorov polinom

Definišući diferencijal funkcije naveli smo i da se on koristi za aproksimaciju date funkcije linearnom funkcijom. Ovo je najjednostavnija aproksimacija, za koju se koristi polinom prvog stepena. Uopštavanjem ove ideje i korišćenjem polinoma višeg stepena, dolazimo do preciznijih aproksimacija funkcije. Smanjenje greške dolazi kao posledica veće složenosti aproksimirajuće funkcije (povećanja stepena aproksimirajućeg polinoma). Odavde je već jasno da će konkretni zahtevi praktičnog problema "diktirati" koliko složenu aproksimaciju želimo; to će biti polinom najnižeg stepena kojim se obezbeđuje neka željena/zahtevana tačnost.

Da bismo došli do opšteg oblika aproksimirajućeg polinoma funkcije u nekoj tački, podsetimo se da za funkciju $y = f(x)$ koja na nekom intervalu $[a, b]$ zadovoljava uslove Lagranžove teoreme važi da postoji tačka $c \in (a, b)$ tako da važi

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) ,$$

pri čemu ne znamo tačnu vrednost c. Takođe, znamo da je c moguće zapisati u obliku $c = a + \theta(b - a)$, za $\theta \in (0, 1)$. Ovo nije ništa drugo nego zapažanje da je c na duži određenoj tačkama a i b i da je zbog toga moguće napisati ovu tačku kao linearnu (konveksnu) kombinaciju krajeva intervala. Sve tačke između a i b dobijaju se kao navedena linearna kombinacija, za odgovarajuću vrednost θ.

Već smo naveli i da se tvrđenje Lagranžove teoreme može interpretirati kao formula za linearnu aproksimaciju funkcije $y = f(x)$, stavljajući da je $b = x$. Tada su za vrednosti x u nekoj okolini tačke a može napisati da je

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) ,$$

ali kako ne znamo c koje obezbeđuje ovu jednakost, praktično pišemo da je

$$f(x) = f(a) + R_1(x) ,$$

gde je $R_1(x)$ greška aproksimacije.

Ako želimo da napišemo bolju (precizniju) aproksimaciju funkcije, možemo celu prethodnu priču uopštiti. Ukoliko pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima na posmatranom intervalu $[a, b]$ i izvode višeg reda, recimo do reda n, i ako sada izvodi višeg reda zadovoljavaju pretpostavke analogne onima iz Lagranžove teoreme (izvodi do reda $(n - 1)$ postoje i neprekidni su na $[a, b]$, a izvod reda n postoji na (a, b)), onda se (korišćenjem pomoćne funkcije i Rolove teoreme) može pokazati da za funkciju $y = f(x)$ postoji tačka $c \in (a, b)$ tako da važi da je

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n .$$

Ovim je formulisana poznata Tejlorova formula. Analogno onom što smo napisali na osnovu Lagranžove teoreme za linearnu aproksimaciju funkcije, napisaćemo odgovarajuću reformulaciju Tejlorove formule, stavljajući $b = x$:

Teorema 7.4. *(Tejlorova teorema): Neka su funkcija $y = f(x)$, i svi njeni izvodi do reda $(n - 1)$ neprekidni nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i neka postoji $f^{(n)}(x)$ nad otvorenim intervalom (a, b). Tada postoji vrednost $\theta \in (0, 1)$ tako da za svako $x \in (a, b)$ važi da je*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + R_n(x) ,$$

pri čemu je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x - a))}{n!}(x - a)^n .$$

Polinom

$$T_{n-1}(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

naziva se **Tejlorov polinom** $(n-1)$-vog stepena funkcije $f(x)$ u tački a. Važi da je

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x) \ , \qquad \text{odnosno} \quad f(x) \approx T_{n-1}(x) \ .$$

Dakle, Tejlorov polinom je aproksimativni polinom funkcije $f(x)$ u okolini tačke a.

Grešku ove aproksimacije ne možemo tačno odrediti, jer ne znamo vrednost θ koje obezbeđuje navedenu jednakost. Ovu grešku zato najčešće *ocenjujemo*: određujemo (što preciznije možemo) gornje ograničenje apsolutne vrednosti greške. Greška očigledno zavisi od veličine intervala na kom koristimo aproksimaciju (udaljnosti x od a), kao i od stepena n polinoma koji koristimo. Ocenjujući grešku kao funkciju ovih dveju veličina, možemo kontrolisati preciznost aproksimacije i odabrati odgovarajuće parametre za postizanje željene tačnosti.

U specijalnom slučaju, kada je $a = 0$, Tejlorov polinom se zove *Maklorenov* polinom. Za funkciju koja zadovoljava uslove Tejlorove teoreme na nekom intervalu $[0, b]$, za svako $x \in (0, b)$ postoji $\theta \in (0, 1)$ tako da je

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x) \ ,$$

pri čemu je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \ .$$

Primer 7.4. *Napisati Maklorenove polinome $T_2(x)$, $T_4(x)$ i $T_8(x)$ za funkciju $y = \cos x$ i grafički ih predstaviti na intervalu $[-4, 4]$.*

Rešenje: Potrebno je da odredimo prvih 8 izvoda funkcije $y = \cos x$ i izračunamo njihovu vrednost za $x = 0$. Pozivajući se na Primer 6.13(c), dobijamo:

$$f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = 1 \ , \quad f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = f^{(7)}(0) = 0 \ , \quad f''(0) = f^{(6)}(0) = -1 \ .$$

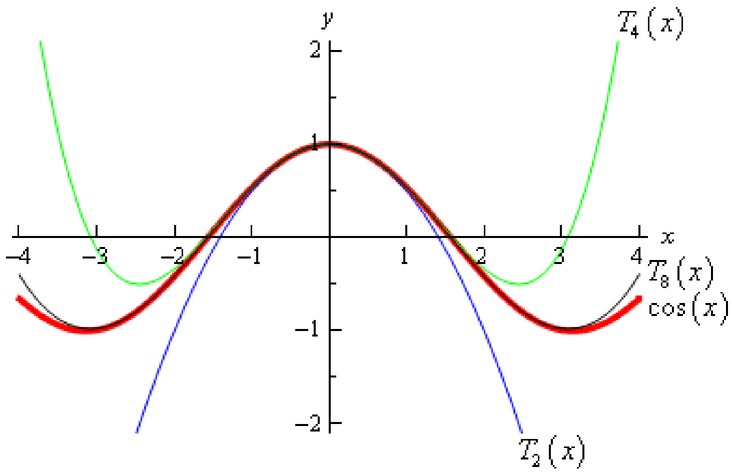
Sada je

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} \ , \\
T_4(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ , \\
T_8(x) &= \sum_{i=0}^{8}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \ .
\end{aligned}$$

Grafički prikaz je dat na Slici 24. Uočavamo da polinom višeg stepena manje odstupa od funkcije, kao i da je aproksimacija bolja (greška - odstupanje manje) za vrednosti x bliže tački 0 (tački u kojoj je "razvijen" polinom).

Primer 7.5. *Napisati Maklorenove polinome stepena $n-1$ i formule za ostatak $R_n(x)$ za funkcije:*

a) $f(x) = e^x$;



Slika 24: Aproksimacija funkcije $f(x) = \cos x$ Maklorenovim polinomima različitog stepena.

b) $f(x) = \sin x$*;*

c) $f(x) = \cos x$*;*

d) $f(x) = \ln(1 + x)$*.*

Rešenje:

a) S obzirom da je $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$, zaključujemo da je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n(x)\ , \qquad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n\ .$$

b) S obzirom da je $f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(4k+1)}(0) = 1 \quad$ i $\quad f^{(4k+3)}(0) = -1$, dobijamo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x)\ , \qquad R_{2k}(x) = \frac{(-1)^k \cos(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1}\ .$$

c) S obzirom da je (kao u Primeru 6.13(c)) $\quad f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k+3)}(0) = 0, \quad f^{(4k)}(0) = 1 \quad$ i $\quad f^{(4k+2)}(0) = -1$, dobijamo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x)\ , \qquad R_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k \cos(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1}\ .$$

d) Data funkcija je definisana za $x > -1$, a njeni izvodi su

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \qquad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \qquad f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \qquad f^{(4)}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4}, \ \ldots$$
$$\ldots \quad f^{(n-1)}(x) = (-1)^n (n-2)!(1+x)^{-(n-1)}, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Njihove vrednosti za $x = 0$ su

$$f(0) = 0\ , \qquad f^{(n-1)}(0) = (-1)^n (n-2)!\ ,$$

i

$$f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+\theta x)^{-n};,$$

pa je

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x)$$

pri čemu je

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} \,.$$

Primer 7.6. *Odrediti približnu vrednost za* $\sqrt{4.1}$ *koristeći Tejlorov polinom trećeg stepena. Oceniti grešku aproksimacije. Koliki stepen polinoma je potreban da bi se tražena vrednost izračunala sa greškom manjom od* 10^{-3}*?*

Rešenje:

7.4 Ispitivanje intervala monotonosti funkcije

Primena izvoda funkcije na ispitivanje intervala rasta i opadanja funkcije, kao i na ispitivanje (postojanja) ekstremnih vrednosti, je verovatno najpoznatija, a po svemu sudeći - i najvažnija primena. Obratimo pažnju na činjenicu da bismo na pitanja o maksimalnoj ili minimalnoj vrednosti funkcije, bez primene izvoda uglavnom bili prinuđeni da računamo vrednosti funkcije (koliko takvih vrednosti?!) i da ih međusobno upoređujemo. Koristeći sredstva matematičke analize, sve odgovore nalazimo ispitujući izvod funkcije.

Uočimo da smo već na samom početku priče o izvodu funkcije doveli u vezu pojam prvog izvoda u tački i pojam rasta, odnosno opadanja, funkcije u tački. "Posrednik" je bila geometrijska interpretacija izvoda, kao koeficijenta pravca tangente na funkciju u posmatranoj tački; ako je koeficijent pravca tangente (izvod u tački) pozitivan, funkcija u toj tački raste, baš kao i njena tangenta; ako je negativan - funkcija u toj tački "prati" tangentu i opada. Tačke u kojima funkcija niti raste, niti opada, prepoznavali smo po tome što je koeficijent pravca tangente na krivu u toj tački - a to znači i prvi izvod - jednak nuli. Međutim, cela ova priča se odnosi samo na ponašanje funkcije *u tački.*

Da bismo došli do rezultata koje, u stvari, znamo i koristimo još od srednje škole, a to je da znamo kako se funkcija ponaša za svaki *par tačaka* (znajući šta radi u svakoj tački), koristimo Teoremu o srednjoj vrednosti. Njena "sposobnost" da poveže lokalno sa globalnim i ovde je od suštinskog značaja.

Teorema 7.5. *Pretpostavimo da je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna na nekom intervalu* (a, b)*.*

- *Ako je* $f'(x) > 0$ *za* $x \in (a, b)$*, onda je* $f(x)$ *rastuća funkcija na* (a, b)*;*
- *Ako je* $f'(x) < 0$ *za* $x \in (a, b)$*, onda je* $f(x)$ *opadajuća funkcija na* (a, b)*.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f'(x) > 0$ za $x \in (a, b)$ i da su $x_1, x_2 \in (a, b)$ takvi da je $x_1 < x_2$. Tada, na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti, važi da je za neko $c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (\text{jer je } \; x_2 - x_1 > 0)$$

a $f(x_2) > f(x_1)$ znači da je funkcija rastuća. Analogno se dokazuje i drugi deo tvrđenja.

Važno je imati na umu da u obrnutom smeru tvrđenje moramo malo modifikovati: ako je funkcija $f(x)$ rastuća na intervalu (a, b), za njen izvod $f'(x)$ važi da je $f'(x) \geq 0$.

Dakle, ne možemo isključiti mogućnost da je izvod rastuće funkcije u nekoj tački jednak nuli. Primer za to je funkcija $y = x^3$, koja je monotono rastuća celim svojim tokom, a važi da je $y'(0) = 0$. U ostalim tačkama važi da je $y'(x) = 3x^2 > 0$.

Primer 7.7. *Odrediti intervale rasta i opadanja funkcije* $f(x) = x^3 - 3x - 2$*.*

Rešenje: Za $f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$ je $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Za izvodnu funkciju tada važi:

$$f' > 0 \quad \text{za} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad \Rightarrow \quad f \text{ je monotono rastuća;}$$

$$f' < 0 \quad \text{za} \quad x \in (-1, 1) \quad \Rightarrow \quad f \text{ je monotono opadajuća.}$$

Interesantno je dovesti u vezu grafike funkcije i njene izvodne funkcije.

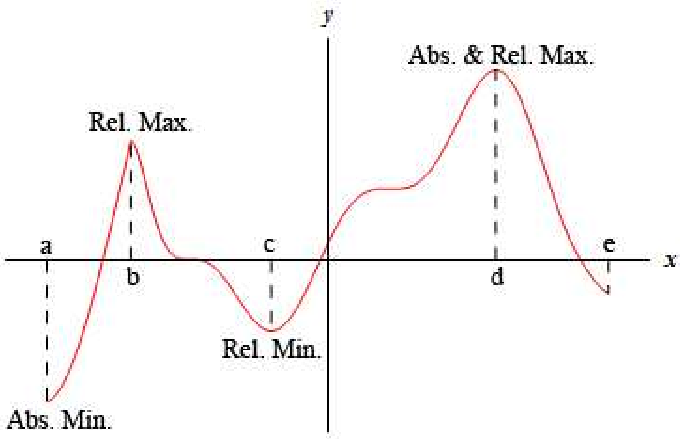
7.5 Ispitivanje ekstremnih vrednosti funkcije

Određivanje ekstremnih vrednosti funkcije je svakako od ogromnog značaja u analizi funkcija (a samim tim i u praksi). Razlikujemo globalne (apsolutne) i lokalne (relativne) ekstremne vrednosti funkcije. Počećemo sa definicijama svake od njih.

Definicija 7.1. *Funkcija $y = f(x)$, definisana na nekom intervalu $I = (a, b)$ ima*

1. lokalni minimum $f(c)$ *u tački* $c \in I$ *akko postoji okolina* $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ *tačke* c *takva da je* $f(x) > f(c)$ *za sve vrednosti* $x \in (c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon)$*;*
2. lokalni maksimum $f(c)$ *u tački* $c \in I$ *akko postoji okolina* $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ *tačke* c *takva da je* $f(x) < f(c)$ *za sve vrednosti* $x \in (c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon)$*;*
3. globalni minimum $f(c)$ *u tački* $c \in I$ *akko je* $f(x) \geq f(c)$ *za sve vrednosti* $x \in I$*;*
4. globalni maksimum $f(c)$ *u tački* $c \in I$ *akko je* $f(x) \leq f(c)$ *za sve vrednosti* $x \in I$*;*

Ove četiri vrste ekstremnih vrednosti su, za prikazanu funkciju na intervalu $I = [a, e]$ ilustrovane na Slici 25.



Slika 25: Različite vrste ekstremnih vrednosti funkcije na intervalu $I = [a, e]$.

Jasno je da lokalni ekstrem funkcija može imati samo u unutrašnjoj tački posmatranog intervala, a da globalni ekstrem može biti postignut ili kao neki od lokalnih ekstrema, ili u rubnoj tački posmatranog (zatvorenog) intervala.

Primer 7.8. *Za funkciju $f(x) = x^2$ ispitati postojanje lokalnih i globalnih ekstrema, ako*

$$a) \quad x \in [-1, 2]\,; \qquad b) \quad x \in [2, 3]\,; \qquad c) \quad x \in [1, \infty)\,; \qquad d) \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Rešenje: Jasno je da interval na kom posmatramo funkciju igra veoma važnu ulogu pri određivanju ekstremnih vrednosti. U ovom primeru

a) funkcija postiže lokalni i globalni minimum na posmatranom intervalu u tački $x = 0$, globalni maksimum u tački $x = 2$, a lokalni maksimum nema na posmatranom intervalu;

b) funkcija ne postiže lokalne ekstremne vrednosti na posmatranom intervalu, globalni minimum postiže u tački $x = 2$, a globalni maksimum u tački $x = 3$;

c) funkcija ne postiže lokalne ekstremne vrednosti na posmatranom intervalu, niti ima globalni maksimum, a globalni minimum postiže u tački $x = 1$;

d) funkcija postiže lokalni i globalni minimum na posmatranom intervalu u tački $x = 0$, a ni lokalni ni globalni maksimum nema na posmatranom intervalu.

Dalje ćemo definisati dve klase tačaka, važne kada ispitujemo ekstremne vrednosti funkcije:

Definicija 7.2. *Pretpostavimo da je funkcija $y = f(x)$ neprekidna u nekoj tački c.*

- *Tačka c je* stacionarna tačka *funkcije f ako je $f'(c) = 0$.*
- *Tačka c je* kritična tačka *funkcije f ako je c stacionarna tačka ili ako $f'(c)$ ne postoji.*

Dalje formulišemo uslove za postojanje lokalnih ekstrema funkcije u nekoj tački.

Teorema 7.6. *(Potreban uslov za postojanje lokalnog ekstrema) Pretpostavimo da je funkcija $y = f(x)$ neprekidna u tački c. Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u tački c, onda je c kritična tačka funkcije.*

Dokaz: Pretpostavimo da funkcija f postiže lokalni maksimum u tački c. To znači da je $f(c) > f(x)$ za sve x iz neke okoline tačke c.

Ako $f'(c)$ ne postoji, onda je c kritična tačka i teorema je dokazana.

Ako $f'(c)$ postoji, to znači da postoji $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Ovo, opet, znači da su odgovarajuće leva i desna granična vrednost jednake:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Uočimo:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

jer je $f(c+h) - f(c) < 0$ i $h > 0$, a granična vrednost negativne funkcije (odnosno posmatranog količnika) ne može biti pozitivna.

Istovremeno je

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

jer je $f(c+h) - f(c) < 0$ i $h < 0$, a granična vrednost pozitivne funkcije (odnosno posmatranog količnika) ne može biti negativna.

Kako ove dve jednostrane granične vrednosti moraju biti jednake, to je moguće jedino ako su obe jednake nuli, odnosno, ukoliko je $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = 0$.

Dakle, ukoliko je funkcija neprekidna u ekstremnoj tački, ta ekstremna tačka mora biti kritična tačka. Međutim, navedeni uslov je samo potreban, ali ne i dovoljan, a to znači da obrnuto ne mora da važi: nije svaka kritična tačka obavezno i ekstremna. Primer je, recimo, funkcija $f(x) = x^3$, koja u kritičnoj (stacionarnoj) tački $x = 0$ nema ekstremnu vrednost.

Odavde zaključujemo da ćemo ekstremne tačke naći među kritičnim tačkama, ali da nam treba još neki kriterijum (dovoljan uslov) da bismo odredili koje kritične tačke su ekstremne, a koje nisu. Formulisaćemo dva takva uslova.

Teorema 7.7. *(Dovoljan uslov za postojanje lokalnog ekstrema) Ako je c kritična tačka funkcije f i ako $f'(x)$ menja znak u okolini tačke c, onda je c tačka lokalnog ekstrema. Pri tome*

- *ako je $f' < 0$ za $x \in (c-\varepsilon, c)$ i $f' > 0$ za $x \in (c, c+\varepsilon)$, onda je c tačka lokalnog minimuma funkcije f;*
- *ako je $f' > 0$ za $x \in (c-\varepsilon, c)$ i $f' < 0$ za $x \in (c, c+\varepsilon)$, onda je c tačka lokalnog maksimuma funkcije f.*

Ovu teoremu nećemo formalno dokazivati, već ćemo samo uočiti da je intuitivno jasno da promena znaka izvoda funkcije ukazuje da funkcija u okolini tačke c menja tok (prelazi iz rasta u opadanje, ili obrnuto). To, opet, znači da c ispunjava uslov definicije lokalnog ekstrema. Uočimo da se Teorema 7.7 može primeniti na sve kritične tačke.

Teorema 7.8. *(Dovoljan uslov za postojanje lokalnog ekstrema) Pretpostavimo da je c stacionarna tačka funkcije f i da postoji $f''(x)$ (na nekom intervalu I koji sadrži tačku c). Ukoliko je $f''(c) \neq 0$, tačka c je tačka lokalnog ekstrema. Preciznije:*

- *ako je $f''(c) < 0$, onda je c tačka lokalnog maksimuma;*
- *ako je $f''(c) > 0$, onda je c tačka lokalnog minimuma.*

Dokaz: Ako je c stacionarna tačka, to znači da je $f'(c) = 0$. Ako na intervalu I postoji $f''(x)$, onda postoji i $f''(c)$. Pretpostavimo da je $f''(c) > 0$ (analogno bismo dokazali i tvrđenje u drugom slučaju). Ova vrednost je, po definiciji,

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - 0}{h} > 0 .$$

To znači da

za $h < 0$ mora biti $f'(c+h) < 0$, dok za $h > 0$ mora biti $f'(c+h) > 0$.

Prethodno znači da izvodna funkcija menja znak (a funkcija prelazi iz opadanja u rast) u okolini tačke c. Ovo je, opet, pokazatelj da je c tačka lokalnog minimuma.

Uočimo da se Teorema 7.8 može primeniti (samo) na stacionarne tačke.

Primer 7.9. *Ispitati ekstremne vrednosti funkcija*

$$a)\quad y = x^2 , \qquad b)\quad y = |x| , \qquad c)\quad y = x^3 .$$

Rešenje:

a) Funkcija ima stacionarnu tačku $c = 0$ i definisan drugi izvod u njoj, $f''(c) = 2 \neq 0$. Zaključujemo da je za $c = 0$ postignut lokalni minimum funkcije.

b) Izvodna funkcija funkcije $y = |x|$ je $y'(x) = \begin{cases} -1, & \text{za} \quad x < 0 \\ 1, & \text{za} \quad x > 0 \end{cases}$. Kako za $x = 0$ ni prvi ni drugi izvod funkcije $y = |x|$ nisu definisani, funkcija ima kritičnu, ali ne stacionarnu tačku $c = 0$. Kako izvodna funkcija menja znak u okolini $c = 0$, ova tačka je, na osnovu Teoreme 7.7, lokalni minimum (špic). Uočimo da u ovom primeru nismo mogli koristiti dovoljan uslov iz Teoreme 7.8.

c) Funkcija ima stacionarnu tačku u $c = 0$, u kojoj postoji drugi izvod funkcije, ali je $f''(c) = 0$. I u ovom slučaju moramo posmatrati promenu znaka funkcije $f' = 3x^2$, jer uslovi za primenu Teoreme 7.8 nisu ispunjeni. Uočavamo da je znak izvoda stalan ($y'(x) > 0$ za sve vrednosti $x \neq 0$) pa, na osnovu Teoreme 7.7, stacionarna tačka nije ekstremna.

Svi do sad navedeni uslovi u ovom odeljku odnose se na određivanje *lokalnih* ekstrema funkcije. Ostaje da kažemo nešto i o traženju globalnih ekstrema.

- Ograničavajući ispitivanja na neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu, obezbeđujemo da su globalni ekstremi uvek dostignuti na tom intervalu (Teorema 4(a)), odnosno da ćemo naći ono što tražimo.
- Globalni ekstremi mogu biti postignuti ili kao neki od lokalnih ekstrema, ili u rubnim tačkama posmatranog intervala.
- S obzirom da su globalni ekstremi najmanja, odnosno najveća vrednost neke funkcije na nekom intervalu, dovoljno je među vrednostima koje funkcija postiže u lokalnim ekstremnim tačkama i na krajevima posmatranog intervala odabrati najveću, odnosno najmanju. To će biti globalni maksimum i globalni minimum.

Prethodnim je opisan postupak za određivanje globalnih ekstrema. Uočimo da on u sebi implicitno sadrži i korake kojima se određuju lokalni ekstremi posmatrane funkcije.

Primer 7.10. *Odrediti globalne ekstremne vrednosti funkcije* $f(x) = 3x(x+4)^{\frac{2}{3}}$ *na intervalu* $[-5,-1]$.

Rešenje: Funkcija je neprekidna na posmatranom zatvorenom intervalu, pa svakako distiže svoj globalni minimum i globalni maksimum.

Prvi korak je diferenciranje funkcije i određivanje kritičnih tačaka, kao mogućih tačaka lokalnih ekstrema. Kako je $f'(x) = \dfrac{5x+12}{(x+4)^{\frac{1}{3}}}$, dobijamo da su kritične tačke funkcije

$$x=-4 \qquad \text{jer} \quad y'(-4) \text{ ne postoji}$$
$$x=-\frac{12}{5}, \qquad \text{jer je} \quad y'\left(-\frac{12}{5}\right)=0.$$

Izračunavajući vrednosti funkcije u ovim tačkama, kao i na krajevima posmatranog intervala, dobijamo:

$$y(-4)=0, \qquad y\left(-\frac{12}{5}\right)=-9.849, \qquad y(-5)=-15, \qquad y(-1)=-6.241\ .$$

Zaključujemo da funkcija postiže globalni maksimum u tački $x=-4$, a globalni minimum u tački $x=-5$.

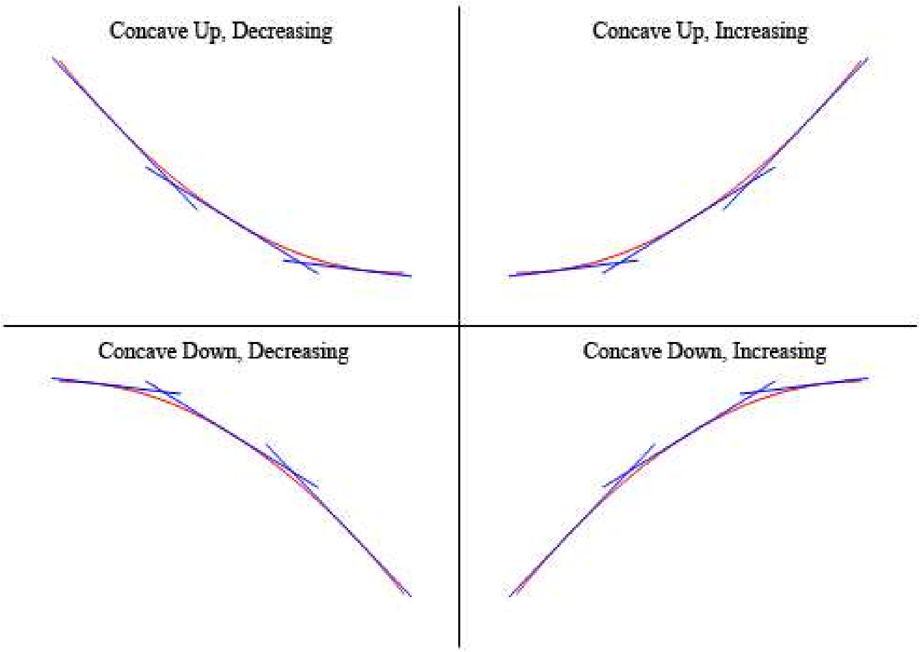
7.6 Ispitivanje zakrivljenosti funkcije i njenih prevojnih tačaka

Na osnovu prvog izvoda funkcije možemo utvrditi da li funkcija raste ili opada na nekom intervalu. Ako u razmatranja uključimo i drugi izvod funkcije, dobićemo informaciju o zakrivljenosti funkcije, odnosno o tome da li ona "ubrzano" ili "usporeno" raste ili opada, ili možda to radi nekom konstantnom brzinom. (Uočimo ovde da drugi izvod funkcije brzine zaista interpretiramo kao ubrzanje pri kretanju.)

Termini koji se koriste u opisivanju i definisanju zakrivljenosti su brojni: konveksna, konkavna, konveksna ili konkavna nagore i nadole, ili odozgo i odozdo, a tome možemo dodati i opise "otvara se nadole" ili "otvara se nagore", "udubljena" i "ispupčena", a omiljeni su i termini "smeje se" i "tužna je". Naravno, biće neophodno da se dogovorimo oko nekih definicija, pre nego što nastavimo.

Definicija 7.3. *Funkcija* $f(x)$ *je konveksna na intervalu* (a,b) *akko su njene vrednosti veće od vrednosti njene linearne aproksimacije u svakoj tački tog intervala. Drugim rečima, grafik konveksne funkcije je iznad svake svoje tangente.*

Definicija 7.4. *Funkcija* $f(x)$ *je konkavna na intervalu* (a,b) *akko su njene vrednosti manje od vrednosti njene linearne aproksimacije u svakoj tački tog intervala. Drugim rečima, grafik konkavne funkcije je ispod svake svoje tangente.*



Slika 26: Različiti oblici zakrivljenosti funkcije. Gore: Konveksna (levo: opadajuća; desno: rastuća). Dole: Konkavna (levo: opadajuća; desno: rastuća).

Ilustracija je data na Slici 26. Uočavamo da na intervalima konveksnosti i konkavnosti funkcija može i da raste, i da opada.

Pretpostavimo da smo funkciju $y = f(x)$ aproksimirali tangentom - njenom linearnom aproksimacijom. Ukoliko je funkcija konveksna, ona odstupa od svoje tangente "kriveći" se naviše. Ako bismo aproksimaciju poboljšali dodajući sledeći - kvadratni član - Tejlorovog aproksimativnog polinoma, on bi morao da bude pozitivan (da poveća vrednosti koje daje linearna aproksimacija), da bi se aproksimacija približila funkciji. Iz ovoga intuitivno zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 7.9. *Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima na intervalu (a, b) drugi izvod $f''(x)$. Tada važi:*

$$\text{ako je} \quad f''(x) > 0 \qquad \text{za} \quad x \in (a, b) \qquad \Rightarrow \quad f \;\; \text{je konveksna;}$$

$$\text{ako je} \quad f''(x) < 0 \qquad \text{za} \quad x \in (a, b) \qquad \Rightarrow \quad f \;\; \text{je konkavna.}$$

Uočimo da, slično kao kod ispitivanja monotonosti, i ovde obrnuto tvrđenje ne važi, jer iz pretpostavke o konveksnosti možemo zaključiti da je drugi izvod funkcije pozitivan ili jednak nuli (analogno za pretpostavku o konkavnosti).

Definicija 7.5. *Tačka c je* prevojna *tačka funkcije f ukoliko postoji okolina tačke c takva da je*

$$f \text{ konveksna za } x \in (c - \varepsilon, c) \text{ i } f \text{ konkavna za } x \in (c, c + \varepsilon)$$

ili

$$f \text{ konkavna za } x \in (c - \varepsilon, c) \text{ i } f \text{ konveksna za } x \in (c, c + \varepsilon)$$

Pri određivanju prevojnih tačaka funkcije koristimo sledeće uslove, koje navodimo bez dokaza:

Teorema 7.10. *(Potreban uslov za prevojnu tačku) Ako je c prevojna tačka funkcije f i ako postoji $f''(c)$, onda je $f''(c) = 0$.*

Dakle, moguće prevojne tačke su tačke u kojima je drugi izvod jednak nuli. Da bismo utvrdili koji od "kandidata" za prevojne tačke zaista jesu tačke u kojima funkcija menja konveksnost, koristimo sledeći uslov:

Teorema 7.11. *(Dovoljan uslov za prevojnu tačku) Ako postoji $f''(x)$, i ako $f''(x)$ menja znak u okolini tačke c, onda je c prevojna tačka funkcije f.*

Primer 7.11. *Odrediti ekstremne i prevojne tačke, kao i intervale rasta, opadanja, konkavnosti i konveksnosti, za funkciju $f(x) = 3x(x+4)^{\frac{2}{3}}$, posmatranu u Primeru 7.10.*

Rešenje:

Konačno, određivanje globalnih ekstremnih vrednosti funkcije, uz poštovanje nekih unapred datih uslova ili bez njih, u praksi se izuzetno često zahteva pri rešavanju nekog realnog problema. Ovaj postupak se naziva još i *optimizacija*, a podrazumeva, u opštem slučaju, definisanje odgovarajuće funkcije koja opisuje problem, kao prvi (u opštem slučaju ni malo trivijalan korak), a zatim i određivanje njene ekstremne vrednosti. Navešćemo samo jedan ilustrativan primer:

Primer 7.12. *Želimo da napravimo zatvorenu kutiju sa osnovom u obliku kvadrata, od $10m^2$ materijala. Ukoliko nameravamo da potrošimo sav materijal, odrediti maksimalnu zapreminu koju kutija može da ima.*

Rešenje: Zapremina kutije čije su ivice a, b, c, koju treba da maksimizujemo (odredimo uslove - dimenzije - pod kojima postiže maksimalnu vrednost) izražena je funkcijom $V = abc$. Uzimajući u obzir da je osnova kutije kvadrat, tj, da je $a = b$, dobijamo

$$V = a^2c\ .$$

Uslov pod kojim vršimo optimizaciju (maksimizaciju) je da površina kutije bude jednaka površini (ploče od) datog materijala, odnosno, da je

$$2ab + 2ac + 2bc = 2a^2 + 4ac = 10\ .$$

Uslov koristimo da eliminišemo jednu od promenljivih koje figurišu u funkciji koju optimizujemo, jer se (bar u ovom trenutku) bavimo funkcijama jedne promenljive. Kako je $c = \dfrac{5-a^2}{2a}$, funkcija dobija oblik

$$V(a) = \frac{1}{2}(5a - a^3)$$

a njeni izvodi su

$$V'(a) = \frac{1}{2}(5 - 3a^2), \qquad \text{i} \qquad V''(a) = -3a^2\ .$$

Stacionarne tačke dobijamo iz uslova $V'(a) = 0$, uočavajući da ne postoje vrednosti a za koje V' nije definisano. Takođe, uzimajući u obzir fizički smisao promenljive a (dužina stranice kutije) zanemarujemo negativne vrednosti stacionarih tačaka. Pozitivno rešenje posmatrane kvadratne jednačine $\frac{1}{2}(5-3a^2) = 0$ je

$$a = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1.291\ .$$

Ostaje još da proverimo da li je ova ekstremna tačka zaista tačka maksimuma funkcije zapremine (ne bi bilo dobro da, umesto da maksimizujemo funkciju, mi odredimo njenu minimalnu vrednost!). Ovo lako utvrđujemo na osnovu znaka $V''(1.291) = -3 \cdot 1.291 < 0$. Na osnovu Teoreme 7.8 zaključujemo da je u stacionarnoj tački $a = 1.291$ postignut maksimum funkcije, odnosno, da će kutija napravljena od $10m^2$ materijala, kvadratne osnove i sa poklopcem, biti maksimalne zapremine ako joj ivica osnove bude jednaka 1.291m.

Uočavajući da je za $a = 1.291$ i $c = \dfrac{5-a^2}{2a} = 1.291$, zaključujemo da traženi uslov ispunjava kutija koja je oblika kocke.

8 Neodređeni integral

U prethodnom odeljku, posvećenom izvodu funkcije, bavili smo se određivanjem funkcije prvog izvoda, f', odgovarajućeg datoj funkciji f. Takođe smo se uverili, posmatrajući mnogobrojne primene prvog izvoda funkcije, u opšti značaj ovog pojma. Nije neočekivano što ćemo mu posvetiti još pažnje, ovog puta rešavajući obrnut problem: u ovom delu kursa pokazaćemo kako se može odrediti funkcija čija nam je izvodna funkcija poznata. Ovakav postupak se često naziva *anti-diferenciranje.* U sledećem delu kursa pokazaćemo veliki značaj anti-diferenciranja (određivanja funkcije na osnovu njenog prvog izvoda) u izračunavanju određenog integrala, a samim tim i čitavog niza značajnih fizičkih veličina.

8.1 Primitivna funkcija i neodređeni integral

Polazeći od funkcije $y(x) = x^2 + 3x - 1$, lako izračunavamo, na jedinstven način, njenu izvodnu funkciju $y'(x) = 2x + 3$. Za ovo koristimo osobine diferenciranja, kao i Tablicu izvoda 1. Sada postavljamo pitanje da li, znajući da je za neku funkciju F odgovarajuća izvodna funkcija $f(x) = 2x + 3$, možemo "rekonstruisati" funkciju F. Preciznije rečeno, naš cilj je da odredimo tzv. *primitivnu funkciju* F date funkcije $f(x) = 2x + 3$.

Definicija 8.1. *Neka je f funkcija definisana na nekom intervalu realne ose. Funkcija F, koja je diferencijabilna na tom intervalu, naziva se* primitivnom funkcijom funkcije f *ako je na tom intervalu zadovoljeno $F'(x) = f(x)$.*

Lako uočavamo da je, recimo, i za funkciju $y(x) = x^2 + 3x + 1$ izvodna funkcija takođe $y' = 2x + 3$. Tačnije, ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije f, što znači da je $F'(x) = f(x)$, tada je i

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \quad C \in R,$$

pa zaključujemo da sve funkcije oblika $F(x) + C$ predstavljaju primitivnu funkciju iste funkcije $f(x)$, odnosno da primitivna funkcija za datu funkciju nije jednoznačno određena. Ipak, kako je za dve primitivne funkcije F_1 i F_2 funkcije f na istom intervalu zadovoljeno

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0,$$

jer je $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, sledi da je

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

tj. da se dve primitivne funkcije iste funkcije mogu razlikovati samo za konstantu. Dakle, polazeći od jedne primitivne funkcije date funkcije, sve ostale možemo odrediti dodavanjem konstante.

Definicija 8.2. *Skup svih primitivnih funkcija funkcije f na nekom intervalu naziva se* neodređeni integral *funkcije f na tom intervalu. Funkcija f naziva se* podintegralna funkcija*, a postupak određivanja* *neodređenog integrala* integracija *ili* anti-diferenciranje. *Ako je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f, onda je*

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in R\},$$

što jednostavnije zapisujemo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta koju nazivamo integracionom konstantom.

Za svaku funkciju postoji primitivna funkcija (neodređeni integral) na intervalu na kom je ona neprekidna. U nastavku ćemo navesti načine i "alate" koje imamo na raspolaganju kada želimo da izračunamo neodređeni integral. Koristićemo neke osobine neodređenih integrala, tablicu integrala i dve osnovne metode integracije. Navešćemo i niz korisnih sugestija za rešavanje nekih karakterističnih integrala, u zavisnosti od tipa podintegralne funkcije.

Međutim, činjenica je da prilikom anti-diferenciranja moramo značajno da se oslanjamo na "kreativnost" i da rešavamo integrale "od slučaja od slučaja", što nije bio slučaj kod diferenciranja. Sigurno će postojati funkcije za čije anti-diferenciranje nećemo imati dobru ideju, i nećemo znati da rešimo problem (što ne može da nam se desi kada izračunavamo izvod funkcije). Postoje, međutim, i funkcije čiji se neodređeni integrali ne mogu izraziti preko elementarnih funkcija u konačnom obliku, pa ni ne treba pokušavati računati ih metodama koje ćemo opisati u tekstu koji sledi (možemo reći da se ti integrali ne mogu rešiti). Takvi slučajevi su relativno malobrojni, a neki od njih su, na primer, integrali

$$\int e^{-x^2}\,dx\ ,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx\ ,\ \int \frac{dx}{\ln x}\ ,\ \int \cos x^2\,dx\ ,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

8.2 Osobine neodređenog integrala

Osnovne osobine neodređenog integrala, koje ćemo koristiti za njihovo izračunavanje, su:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x);$
2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\ ,\ \ a \in R;$
5. $\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\ dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx.$

Osobina 1. sledi iz jednakosti $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, određivanjem izvoda i korišćenjem uslova

$$F'(x) = f(x).$$

Osobina 2. je direktna posledica Osobine 1.
Osobina 3. je zadovoljena jer je

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Osobina 4. dokazuje se određivanjem izvoda leve i desne strane jednakosti, pri čemu se dobijaju jednaki izrazi.
Osobina 5. dokazuje se kao Osobina 4.

Veoma je važno uočiti da se među osobinama integrala (možemo ih nazvati i pravilima integraljenja) nalaze pravila za integral funkcije pomnožene konstantom, kao i za integral zbira, odnosno razlike funkcija. Međutim, ne postoje pravila za integraciju (anti-diferenciranje) proizvoda, niti količnika funkcija, kao ni pravilo za "integral složene funkcije". Ovo je veoma važna razlika u odnosu na postupak diferenciranja.

8.3 Tablica integrala

Na osnovu tablice izvoda, ili neposrednom proverom, dobija se tablica integrala. Lako je uočiti da se u tablici integrala ne nalaze integrali svih elementarnih funkcija, kao što je bio slučaj sa tablicom izvoda; umesto toga, u tablici integrala navedene su funkcije koje su izvodi elementarnih funkcija. Dakle, sadržaj ove tablice se u suštini, ne razlikuje od tablice izvoda!

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$

3. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C, \qquad x \neq k\pi, \quad k \in Z;$

7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C;$

8. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0, \quad a \neq 1;$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0;$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad |x| < a, \quad a > 0;$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \qquad a \in R, \quad a \neq 0;$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C, \qquad x \neq \pm a, \quad a \neq 0.$

Još jednom naglašavamo da je diferenciranje jednostavno jer imamo na raspolaganju izvodne funkcije svih elementarnih funkcija (sadržane u tablici izvoda), a uz to i pravila za diferenciranje zbira, razlike, proizvoda i količnika funkcija, kao i za izvod složene funkcije. To, praktično, znači da imamo na raspolaganju jasno pravilo za diferenciranje svih funkcija, jer sve nastaju primenom navedenih operacija i/ili kompozicije, polazeći od elementarnih funkcija. Kada je reč o anti-diferenciranju (određivanju neodređenog integrala), stvari su značajno složenije upravo zato što nemamo na raspolaganju pravila za integraciju proizvoda i količnika, ni složene funkcije, a ni integrale svih elementarnih funkcija. Zbog toga će nam trebati mnogo više ideja i pojedinačnih preporuka za rešavanje integrala.

Neke integrale je, ipak, relativno lako izračunati, i to samo na osnovu do sad navedenog - tablice i osobina integrala, uz pogodnu transformaciju podintegralne funkcije. Sledeći primer ilustruje jedan takav integral.

Primer 8.1. *Izračunati* $\int \left((1 - \frac{1}{x^2}) \cdot \sqrt{x\sqrt{x}} + \frac{2\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx.$

Rešenje: Za $x \neq 0$ i $x \neq k \cdot \pi, \ k \in Z$ je

$$\begin{aligned}
\int \left((1 - \frac{1}{x^2}) \cdot \sqrt{x\sqrt{x}} + \frac{2\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx &= \int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx - \int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx + \int \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \\
&= \int x^{\frac{3}{4}}\, dx - \int x^{-\frac{5}{4}}\, dx + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= \frac{4}{7}\, x\sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 2\mathrm{ctg}\, x - 2\mathrm{tg}\, x + C.
\end{aligned}$$

8.4 Integracija pomoću smene

Integrale koji se ne nalaze u tablici potrebno je, pri rešavanju, svesti na tablične. Za to je, u nekim slučajevima, dovoljna pogodna transformacija podintegralne funkcije i primena osnovnih pravila integracije (osobina integrala), ali u najvećem broju slučajeva neophodno je primeniti i jedan od dva osnovna *metoda integracije* - metod smene promenljivih i metod parcijalne integracije.

Postupak integracije pomoću smene opisuje sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza:

Teorema 8.1. *Neka je $\phi(t)$ funkcija koja na nekom intervalu realne ose ima neprekidan prvi izvod i neka je na tom intervalu $\phi'(t) \neq 0$. Tada, ako je $x = \phi(t)$, na posmatranom intervalu važi*

$$\int f(x)\, dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt.$$

Pretpostavka da je $\phi'(t)$ neprekidna funkcija, različita od nule, obezbeđuje da je $\phi'(t)$ stalnog znaka, odnosno da je $\phi(t)$ monotona. To, opet znači da postoji funkcija inverzna funkciji $\phi(t)$, odnosno da se može izraziti $t = \phi^{-1}(x)$. Ovo omogućava jednoznačno uvođenje, ali i "vraćanje" smene pri rešavanju integrala.

Navešćemo tri primera kojima ilustrujemo postupak uvođenja smene pri rešavanju neodređenog integrala.

Primer 8.2. *Odrediti* $\int tg\, x\, dx.$

Rešenje: U nekim slučajevima, a ovo je jedan od njih, pogodnije je smenu izraziti u obliku $t = \psi(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{tg}\, x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \cos x &=& t \\ -\sin x\, dx &=& dt \end{array} \right\} \\
&= -\int \frac{dt}{t} \ = \ -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C, \qquad \text{za } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \ k \in Z.
\end{aligned}$$

Primer 8.3. *Izračunati* $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx.$

Rešenje: Uvođenjem smene
$$e^x = t, \quad e^x\, dx = dt,$$
dobijamo da je
$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx &= \int \frac{t}{t+1}\, dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}\, dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1}\\ &= t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C.\end{aligned}$$

Primer 8.4. *Odrediti* $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

Rešenje: Ovaj integral se može rešiti na nekoliko načina. Jedan od dobrih načina je uvođenje smene koja možda nije sasvim očigledan izbor, ali je veoma pogodna za ovaj integral:
$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx &= \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\sin t\\ dx &=& a\cos t\; dt\end{array}\right\} \quad a^2 \int \cos^2 t\; dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\; dt \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2t &=& m\\ 2\;dt &=& dm\end{array}\right\}\\ &= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int \cos m\; dm = \frac{a^2}{2}\, t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C\\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C, \qquad |x| \le a,\end{aligned}$$
gde je uzeto u obzir da je
$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$
i
$$\sin 2t = 2\sin t\; \cos t = 2\sin t\,\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

8.5 Parcijalna integracija

Parcijalna integracija je drugi osnovni metod za svođenje netabličnih integrala na tablične. Način njegove primene opisan je sledećom teoremom:

Teorema 8.2. *Neka su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne na intervalu (a,b). Tada na posmatranom intervalu važi formula za parcijalnu integraciju*
$$\int u(x)\cdot v'(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\, dx. \tag{8}$$

Dokaz: S obzirom da je
$$(u(x)\cdot v(x))' = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x),$$
i
$$\int (u(x)\cdot v(x))'\, dx = u(x)\cdot v(x) + C,$$
važi
$$\begin{aligned}\int (u(x)\cdot v(x))'\, dx &= \int (u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x))\, dx\\ &= \int u(x)\cdot v'(x)\, dx + \int u'(x)\cdot v(x)\, dx\\ &= u(x)\cdot v(x)\;.\end{aligned}$$

Tada je

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

(Integraciona konstanta sadržana je u neodređenom integralu sa desne strane jednakosti, pa nije navedena eksplicitno.)

Kako je $v'(x)\, dx = dv$ i $u'(x)\, dx = du$, formula (8) se često zapisuje u kraćem obliku

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Sledećim primerom ilustrujemo primenu formule za parcijalnu integraciju:

Primer 8.5. *Odrediti* $\displaystyle\int \ln x\, dx.$

Rešenje: Za $x > 0$ je

$$\begin{aligned} \int \ln x\, dx &= \left\{ \begin{array}{lcl} u = \ln x & , & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & , & v = x \end{array} \right\} \\ &= x \cdot \ln x - \int dx \;=\; x \cdot (\ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

Očigledno, primena metoda parcijalne integracije podrazumeva da se, umesto datog integrala, reše druga dva ($v = \int dv$ i $\int v \cdot du$). U izboru načina dekompozicije date podintegralne funkcije (na funkcije $u(x)$ i $dv(x)$) rukovodimo se time da novi zadatak bude jednostavniji od polaznog.

Među integralima koji se rešavaju parcijalnom integracijom su i integrali oblika

1. $\displaystyle\int Q_m(x)\, \sin \beta x\, dx$ ili $\displaystyle\int P_n(x)\, \cos \beta x\, dx$;
2. $\displaystyle\int P_n(x)\, e^{\alpha x}\, dx$;
3. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\, \sin \beta x\, dx$ ili $\displaystyle\int e^{\alpha x}\, \cos \beta x\, dx$.

U slučajevima 1. i 2., gde je jedan faktor podintegralne funkcije polinom, uzima se da je taj polinom funkcija u i uvek se radi onoliko uzastopnih parcijalnih integracija koliki je stepen polinoma. U slučaju 3. svejedno je koja će funkcija biti uzeta za u, a koja kao deo dv, u parcijalnoj integraciji. Kod rešavanja ovih integrala uvek se rade dve uzastopne parcijalne integracije.

Primer 8.6. *Izračunati* $\displaystyle\int (x+1)\, \cos 2x\, dx.$

Rešenje: Polinom koji se pojavljuje kao deo podintegralne funkcije je prvog stepena, pa je dovoljna jedna parcijalna integracija za rešavanje ovog integrala.

$$\begin{aligned} \int (x+1)\, \cos 2x\, dx & \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u = x+1 & , & dv = \cos 2x\, dx \\ du = dx & , & v = \frac{1}{2}\, \sin 2x \end{array} \right\} \\ &= \frac{x+1}{2}\, \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx \\ &= \frac{x+1}{2}\, \sin 2x + \frac{1}{4}\, \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Primer 8.7. *Izračunati* $\displaystyle\int e^{2x}\ \sin 3x\, dx.$

Rešenje: Kod ovog tipa integrala je svejedno kako ćemo izabrati funkcije u i dv. U svakom slučaju očekujemo dve parcijalne integracije.

$$\begin{aligned}
I = \int e^{2x}\ \sin 3x\, dx \qquad & \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x} & ,\quad dv = \sin 3x\, dx \\ du = 2\, e^{2x}\, dx & ,\quad v = -\frac{1}{3}\ \cos 3x \end{array} \right\} \\
= \ & -\frac{1}{3}\ e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x}\ \cos 3x\, dx \\
& \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x} & ,\quad dv = \cos 3x\, dx \\ du = 2 \cdot e^{2x}\, dx & ,\quad v = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x \end{array} \right\} \\
= \ & \frac{1}{3}\ e^{2x}\ (\frac{2}{3}\ \sin 3x - \cos 3x) - \frac{4}{9} \int e^{2x}\ \sin 3x dx.
\end{aligned}$$

Odatle je

$$\frac{13}{9}\ I = \frac{1}{3}\ e^{2x}\ \left(\frac{2}{3}\ \sin 3x - \cos 3x\right),$$

odnosno

$$I = \frac{1}{13}\ e^{2x}\ \ (2\ \sin 3x - 3\ \cos 3x) + C.$$

8.6 Integracija racionalnih funkcija

Integral racionalne funkcije se uvek može izraziti u konačnom obliku preko elementarnih funkcija (drugim rečima, uvek se može rešiti). Štaviše, rešavanje integrala algebarskih i transcendentnih funkcija najčešće se odgovarajućim smenama svodi na integraciju racionalnih funkcija. To znači i da je veoma važno da naučimo da integralimo racionalne funkcije.

Racionalna funkcija je količnik dva polinoma. Ukoliko je stepen polinoma u brojiocu manji od stepena polinoma u imeniocu, reč je o *pravoj racionalnoj funkciji.* Ako to nije slučaj, (neprava) racionalna funkcija se može predstaviti u obliku zbira polinoma i prave racionalne funkcije. Prava racionalna funkcija se, dalje, može predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka. Pri integraciji polinoma javljaju se samo tablični integrali, tako da se problem integracije racionalne funkcije svodi na integraciju parcijalnih razlomaka, tj. razlomaka oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad \text{za} \quad p^2 - 4q < 0,$$

gde su A, B, a, p i q realni brojevi, a k je prirodan broj.

Dakle, izračunavanje integrala oblika $\displaystyle\int R(x)\, dx$, gde je $R(x)$ racionalna funkcija, se u opštem slučaju svodi na izračunavanje jednog ili više integrala sledećih oblika:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\, dx, \qquad x \neq a,$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\, dx, \qquad k \geq 2, \qquad x \neq a,$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 4q - p^2 > 0,$

4. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad 4q - p^2 > 0,$

Pokazaćemo na odgovarajućim primerima kako se rešavaju ovi integrali.

Primer 8.8. *Izračunati*

a) $\displaystyle\int \frac{5}{x-3}\,dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{7}{(2x-1)^3}\,dx$.

Rešenje: Ova dva tipa integrala izračunavaju se korišćenjem smene

$$t = x - a \quad , \quad dt = dx,$$

kojom se svode na tablične. Tako dobijamo:

a)

$$\int \frac{5}{x-3}\,dx = 5\int \frac{dt}{t} = 5\ln|t| + C = 5\ln|x-3| + C.$$

Koristili smo preporučenu smenu $x - 3 = t$.

b)

$$\int \frac{7}{(2x-1)^3}\,dx \;=\; 7\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} \;=\; \frac{7}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} \;=\; -\frac{7}{4(2x-1)^2} + C.$$

U ovom slučaju je, sasvim intuitivno, pogodna smena $2x - 1 = t$, nakon čega treba obratiti pažnju da je $2dx = dt$, odnosno $dx = \dfrac{1}{2}dt$.

Navešćemo, dalje, tri karakteristična primera kojim se ilustruje treći gore navedeni tip integrala:

Primer 8.9. *Izračunati*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$;

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x+1}\,dx$.

Rešenje: Za treći tip integrala parcijalnih razlomaka, kom pripadaju sva tri navedena primera, karakteristično je da se u imeniocu nalazi kvadratni trinom koji nema realnih nula (dakle, koji ne možemo faktorisati nad skupom realnih brojeva), a da je uz to taj kvadratni trinom stepenovan na prvi stepen.

a) U ovom slučaju, kada je brojilac racionalne podintegralne funkcije jednak jedinici, kvadratni trinom se svodi na tzv. kanonički oblik - predstavlja se kao zbir potpunog kvadrata binoma i neke konstante:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

a zatim se binom zamenjuje novom promenljivom:

$$x + \frac{1}{2} = t, \qquad dx = dt.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Koristili smo tablični integral $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$, za $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) U ovom, veoma zgodnom, slučaju uočavamo da je polinom-brojilac izvod kvadratnog trinoma (polinoma)-imenioca. To znači da ćemo integral lako rešiti uvođenjem smene

$$x^2 + x + 1 = t\,, \qquad (2x+1)dx = dt.$$

Važi da je

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+x+1| + C.$$

c) Ovaj slučaj je najopštiji, a ideja je da ga svedemo na zbir slučajeva koje smo uspešno rešili u zadacima pod (a) i (b). Cilj nam je da linearni polinom u brojiocu prikažemo kao zbir linearnog polinoma koji je izvod trinoma u imeniocu, i konstante. Tako dobijamo dva integrala od kojih je jedan oblika kao pod (a), a drugi oblika kao pod (b).

U ovom zadatku je izvod trinoma u imeniocu jednak $(x^2+x+1)' = 2x+1$, pa se može napisati da je

$$x + 5 = \frac{1}{2}(2x+10) = \frac{1}{2}(2x+1+9) = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{9}{2}\,,$$

a onda je

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{9}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.\end{aligned}$$

Četvrti gore navedeni tip integrala parcijalnih razlomaka se rešava tako što se integral $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ pogodnim postupkom svodi na integral oblika $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$, a rešavanje ovog integrala se zatim svodi na rešavanje integrala $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}$. Ponavljanjem istog postupka (i snižavanjem eksponenta k kvardratnog trinoma u imeniocu) dolazi se do integrala u kom je $k=1$, a koji smo opisali u prethodnom primeru pod (a).

Ovaj postupak ilustrovaćemo primerom u kom je $k=2$. Postupak za veće vrednosti k se ni u čemu suštinski ne razlikuje, jedino je duži, zbog ponavljanja koraka.

Primer 8.10. *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

Rešenje: I u ovom slučaju svodimo kvadratni trinom na kanoničku formu, a zatim i uvodimo smenu za dobijeni binom. Dakle, ovde ćemo (opet) koristiti da je

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \quad \text{a zatim} \quad x + \frac{1}{2} = t, \qquad dx = dt.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} &= \int \frac{dx}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \int \frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})^2} = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{3}{4}}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt\\ &= \frac{4}{3}\int \frac{t^2+\frac{3}{4}-t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{t^2+\frac{3}{4}}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt - \frac{4}{3}\int \frac{t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt\\ &= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\int \frac{t\cdot t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt\,.\end{aligned}$$

Prvi od ova dva integrala je tablični, a drugi možemo rešiti primenjujući parcijalnu integraciju, uzimajući da je

$$u = t \quad , \quad dv = \frac{t}{(t^2 + \frac{3}{4})^2}\, dt,$$

odakle je

$$\begin{aligned}
du &= dt, \\
v &= \frac{1}{2} \int 2\, t\, (t^2 + \frac{3}{4})^{-2}\, dt = \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} t^2 + \frac{3}{4} &=& s \\ 2t\, dt &=& ds \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int s^{-2} ds \; = \; \frac{-1}{2s} \\
&= \frac{-1}{2(t^2 + \frac{3}{4})} \; .
\end{aligned}$$

Sada je

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + \frac{3}{4})^2}\, dt \; = \; -\frac{t}{2(t^2 + \frac{3}{4})} \; + \; \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} \; .$$

Konačno,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \; &= \; \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{4}{3} \left(\frac{-t}{2(t^2 + \frac{3}{4})} \; + \; \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} \right) \\
&= \; \frac{4}{3}\, \frac{t}{2(t^2 + \frac{3}{4})} \; + \; \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \; \frac{2}{3}\, \frac{x + \frac{1}{2}}{(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Sledećim primerom ilustrujemo ceo postupak rešavanja integrala racionalne funkcije.

Primer 8.11. *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2\, (x^2 + 1)}\, dx.$

Rešenje: Da bismo izračunali integral

$$\int \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2\, (x^2 + 1)}\, dx,$$

predstavimo, prvo, podintegralnu (nepravu racionalnu) funkciju u obliku zbira polinoma i prave racionalne funkcije:

$$\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2\, (x^2 + 1)} = x + \frac{1}{x^2\, (x^2 + 1)}.$$

Rastavimo, dalje, pravu racionalnu funkciju na zbir parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{x^2\, (x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Množenjem prethodne jednakosti sa $x^2\, (x^2 + 1)$, dobijamo

$$1 = (A + C)\, x^3 + (B + D)\, x^2 + A \cdot x + B,$$

odakle, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x, sledi sistem jednačina

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B+D &= 0 \\ A &= 0 \\ B &= 1, \end{aligned}$$

čijim rešavanjem i uvrštavanjem dobijenih vrednosti za A, B, C i D dobijamo da je

$$\frac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Do istog rezultata može se doći i brže, ako uočimo da je

$$\frac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2\,(x^2+1)} = \frac{1+x^2}{x^2\,(x^2+1)} - \frac{x^2}{x^2\,(x^2+1)}.$$

Tada je za $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+x^3+1}{x^2\,(x^2+1)}\,dx &= \int \left(x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

8.7 Integrali nekih iracionalnih funkcija

Za integraciju iracionalnih funkcija ne postoji jedno univerzalno pravilo, kao što je slučaj kod integrala racionalnih funkcija. Preporuka za rešavanje ovakvih funkcija daje se u formi pogodnih smena za pojedine tipove podintegralnih funkcija. Mi ćemo ovde ilustrovati samo neke slučajeve.

1. **Integral oblika** $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena po x.

   Za rešavanje ovog integrala može se primeniti formula

   $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

   gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom po x stepena $(n-1)$ čije koeficijente treba odrediti, a $\lambda \in R$ neodređena konstanta.

   Da bismo odredili koeficijente polinoma Q_{n-1}, kao i nepoznatu konstantu λ, izračunaćemo izvod leve i desne strane u prethodnoj jednakosti. Time dobijamo

   $$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\,\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{(2ax+b)\,Q_{n-1}(x)}{2\,\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

   Množenjem jednakosti sa $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dalje je

   $$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\,(ax^2+bx+c) + (ax+\frac{b}{2})\,Q_{n-1}(x) + \lambda.$$

   Sa obe strane znaka jednakosti su polinomi po x stepena n; iz uslova njihove jednakosti sledi jednakost koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x. Rešavanjem sistema od $n+1$ linearnih jednačina sa $n+1$ nepoznatih dobijamo nepoznate koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$, kao i konstantu λ.

Primer 8.12. *Izračunati* $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

Rešenje: Integral $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ se može rešiti prethodno opisanom metodom, jer je:

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

a dalje je

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (Ax+B)\,\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Izjednačavanjem izvoda leve i desne strane prethodne jednakosti, dobijamo

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\,\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(Ax+B)\,(2x+1)}{2\cdot\sqrt{x^2+x+1}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

odnosno

$$2x^2+2x+2 = 2A\cdot(x^2+x+1) + (Ax+B)\cdot(2x+1) + 2\lambda,$$

odakle se, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x, dobija sistem

$$4A = 2, \quad 3A+2B = 2, \quad 2A+B+2\lambda = 2,$$

čije je rešenje

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \frac{3}{8}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \frac{1}{4}\,(2x+1)\,\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\
&= \frac{1}{4}\,(2x+1)\,\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} \\
&= \frac{1}{4}\,(2x+1)\,\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\,\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}| + C.
\end{aligned}$$

2. **Integral oblika** $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx\ ,\quad ad-bc\neq 0,\quad r_1,\ldots,r_k\in\mathbb{Q}.$

Ako sa p označimo najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata $r_1, r_2, \cdots, r_k$, uvođenjem smene

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

polazni integral se svodi na integral racionalne funkcije po t.

Primer 8.13. *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+1-\sqrt{x+1}}\,dx.$

Rešenje: Za $x > -1$ je

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+1-\sqrt{x+1}}\,dx &= \left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{x+1} &=& t \\ x+1 &=& t^2 \\ dx &=& 2t\,dt \end{array}\right\} \\
&= 2\int \frac{t\cdot(t+2)}{t^2-t}\,dt \;=\; 2\int \frac{t+2}{t-1}\,dt \\
&= 2\int \frac{t-1+3}{t-1}\,dt \;=\; 2\int dt \;+\; 6\int \frac{dt}{t-1} \\
&= 2\,\sqrt{x+1} + 6\,\ln|\sqrt{x+1}-1| + C.
\end{aligned}$$

Primer 8.14. *Izračunati* $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\, dx.$

Rešenje: U ovom slučaju, smena je, za $x \in (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$,

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = t \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2t^2+1}{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{6tdt}{(1-t^2)^2}\ .$$

Sada je

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\, dx = 6 \int t \cdot \frac{tdt}{(1-t^2)^2}\ ,$$

a ovaj integral se može rešiti parcijalnom integracijom, uzimajući da je $u = t$ i da je $dv = \dfrac{tdt}{(1-t^2)^2}$.
Tada je $du = dt$ i $v = \displaystyle\int \frac{tdt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{2(1-t^2)}$, pa je

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\, dx = \frac{3t}{1-t^2} - 3 \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{3t}{1-t^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} + C$$

za $\quad t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

8.8 Integrali trigonometrijskih funkcija

Obratićemo pažnju samo na jednu manju grupu integrala trigonometrijskih funkcija.

Ovakav integral, u kom je podintegralna funkcija racionalna funkcija koja zavisi od $\sin x$ i $\cos x$, može se *opštom trigonometrijskom smenom*

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad (2k-1) \cdot \pi < x < (2k+1) \cdot \pi, \quad k \in Z$$

svesti na integral racionalne funkcije po t. Kako je tada

$$\begin{aligned} x &= 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx &= \frac{2\, dt}{1+t^2}, \\ \sin x &= \frac{2\, t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{aligned}$$

uvođenjem ove smene dobijamo da je

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2\, t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2\, dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\, dt,$$

gde je $R_1(t)$ racionalna funkcija po t.

Prethodne formule veze mogu se izvesti koristeći da je :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2}\ \cos \frac{x}{2} = 2\, \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\ \cos^2 \frac{x}{2} = 2\ t\ \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right) = \cos^2 \frac{x}{2}\,(1+t^2) \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}\,,$$

i konačno

$$\sin x = 2t\,\frac{1}{1+t^2}\ .$$

Kako je

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\ \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1-t^2}\,,$$

navedene veze su dokazane.

Primer 8.15. *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Rešenje: Ovaj integral se može rešiti uvođenjem opšte trigonometrijske smene:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} \quad = \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} & = & t \\ dx & = & \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \cos x & = & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\}$$

$$= \quad 2\int \frac{dt}{3+t^2} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} + C \quad = \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

8.8.1 Specijalni slučajevi integrala oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

S obzirom da se uvođenjem opšte trigonometrijske smene često dobijaju glomazne podintegralne racionalne funkcije, preporučljivo je izabrati drugačiji način rešavanja, kada za to postoji mogućnost. Navešćemo specijalne slučajeve integrala navedenog oblika koji se, zahvaljujući određenim uslovima koje zadovoljavaju, mogu lakše rešiti uvođenjem nekih drugih smena.

1. **Integral oblika** $\int R(\sin x)\ \cos x\ dx$ se smenom $t = \sin x$, $dt = \cos x\ dx$ svodi na integral racionalne funkcije po t.

   Primer 8.16. *Izračunati* $\displaystyle\int ctg\ x\ dx.$

   Rešenje: S obzirom da je

   $$\int \mathrm{ctg}\ x\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx\ ,$$

   ovaj integral se može rešiti uvođenjem smene

   $$t = \sin x\ , \quad dt = \cos x\ dx\ .$$

   Imamo

   $$\int \mathrm{ctg}\ x\ dx \ = \ \int \frac{dt}{t} \ = \ \ln|t| + C \ = \ \ln|\sin x| + C\ .$$

2. **Integral oblika** $\int R(\cos x)\sin x\ \ dx$ se smenom $t = \cos x$, $dt = -\sin x\ \ dx$ svodi na integral racionalne funkcije po t.

Primer 8.17. *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx.$

Rešenje: Integral

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx$$

možemo rešiti smenom

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x\; dx.$$

Tako dobijamo da je

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx \;=\; -\int \frac{dt}{(1-t)^2} \;=\; -\frac{1}{1-t} + C \;=\; \frac{1}{\cos x - 1} + C.$$

3. **Integral oblika** $\displaystyle\int R(\text{tg } x)\, dx$ se smenom $t = \text{tg } x \quad (x = \text{arctg } t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2})$ svodi na integral racionalne funkcije po t.

Primer 8.18. *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{1 + tg\ x}{\sin 2x}\, dx.$

Primer: Za rešavanje integrala

$$\int \frac{1+\text{tg } x}{\sin 2x}\, dx$$

primenićemo smenu

$$t = \text{tg } x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Tada je, za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\text{tg } x}{\sin 2x}\, dx &= \int \frac{1+\text{tg } x}{2\,\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1+t}{t}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\ \ln|t| + \frac{1}{2}\ t + C \\
&= \ln\sqrt{\text{tg } x} + \frac{1}{2}\ \text{tg } x + C.
\end{aligned}$$

Korišćeno je da je $\sin 2x = 2\ \sin x\ \cos x\, \dfrac{\cos x}{\cos x} = 2\, \dfrac{\sin x}{\cos x}\ \cos^2 x.$

9 Određeni integral

Pojam određenog integrala je veoma značajan u okviru Matematičke analize, a s obzirom da se dovodi u vezu sa velikim brojem geometrijskih svojstava objekata i da se koristi pri definisanju velikog broja fizičkih veličina, njegov značaj je utoliko veći. Naš osnovni cilj je da razumemo osnovnu ideju koja se ovde pojavljuje - kako da (pod odgovarajućim uslovima) saberemo beskonačno mnogo sabiraka koji predstavljaju vrednosti neprekidne funkcije na nekom intervalu.

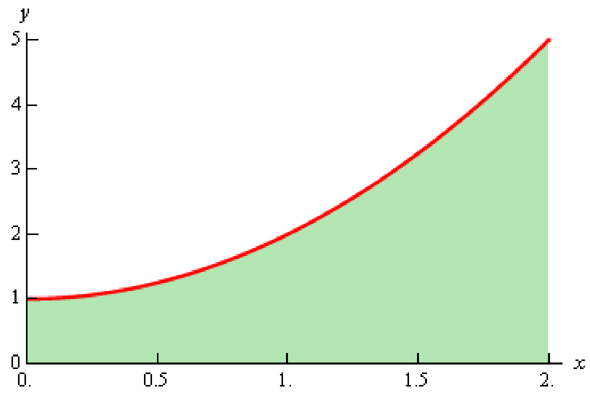
Veoma je značajno i to što ćemo objasniti i vezu između određenog i neodređenog integrala funkcije - dva sasvim različita pojma koja povezuje Fundamentalna teorema integralnog računa, poznata Njutn-Lajbnicova formula.

Napominjemo i da ćemo, u okviru kursa iz Matematičke analize 2, definisati nekoliko različitih uopštenja određenog integrala, za koje ćemo takođe navesti veliki broj primena. U tom smislu, dobro razumevanje određenog integrala je od izuzetnog značaja.

9.1 Aproksimiranje površine - korak ka geometrijskoj interpretaciji određenog integrala

Problem izračunavanja površine oblasti koja je ograničena nekim opštim krivama obezbeđuje primer za intuitivno razumevanje određenog integrala, oslanjajući se na njegovu geometrijsku interpretaciju. Dakle, slično kao što smo pojam izvoda definisali polazeći od problema određivanja tangente na krivu, odnosno nagiba funkcije, ovde koristimo ideju o načinu izračunavanja površine ispod date krive, na nekom posmatranom intervalu, da bismo uveli pojam određenog integrala.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^2 + 1$ na intervalu $[0, 2]$. Želimo da odredimo površinu oblasti koja se, na posmatranom intervalu, nalazi između x-ose i grafika ove funkcije. Površina koju određujemo prikazana je na Slici 27.



Slika 27: Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ na intervalu $[0, 2]$. Označena je površina koju želimo da odredimo.

U ovom trenutku ne znamo kako da izračunamo traženu površinu. Znamo da računamo površine nekih mnogouglova, kruga i njegovih delova, ali površina koju tražimo ograničena je sa jedne strane (proizvoljnom) krivom, što je vrsta problema za koju (još) ne znamo odgovarajuće formule. Za početak, zadovoljićemo se aproksimacijom.

Prvo što bismo mogli da uradimo je da izračunamo vrednosti funkcije u nekim karakterističnim tačkama. Uočavamo da je $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ i $f(2) = 5$. Mogli bismo da zaključimo da je tražena površina približno jednaka površini pravougaonika čije su stranice širina intervala, $2 - 0 = 2$ i $f(2) = 5$, ali je jasno da je ova aproksimacija, $P \approx 2 \cdot 5 = 10$, prilično loša. Nije mnogo bolja ni ona za koju bismo koristili pravougaonik sa stranicama 2 i $f(0) = 1$, prema kojoj je $P \approx 2 \cdot 1 = 2$. Prva aproksimacija je dala preveliku vrednost, a druga premalu. Dalje, mogli bismo da pokušamo sa vrednostima 2 i $f(1) = 2$, gde bismo za aproksimaciju koristili pravougaonik koji je jednim delom veći (opisan, nadskup), a jednim delom manji (upisan, podskup) od tražene oblasti. Ta aproksimacija bi bila $P \approx 2 \cdot 2 = 4$, i čini nam se da je do sada najbolja.

Uočimo da smo nepoznatu površinu *aproksimirali* površinom pravougaonika, koju znamo da izračunamo. Ovo nam se čini kao jako dobra ideja, pa nameravamo da je i dalje koristimo, ali ćemo pokušati da to uradimo na neki bolji način.

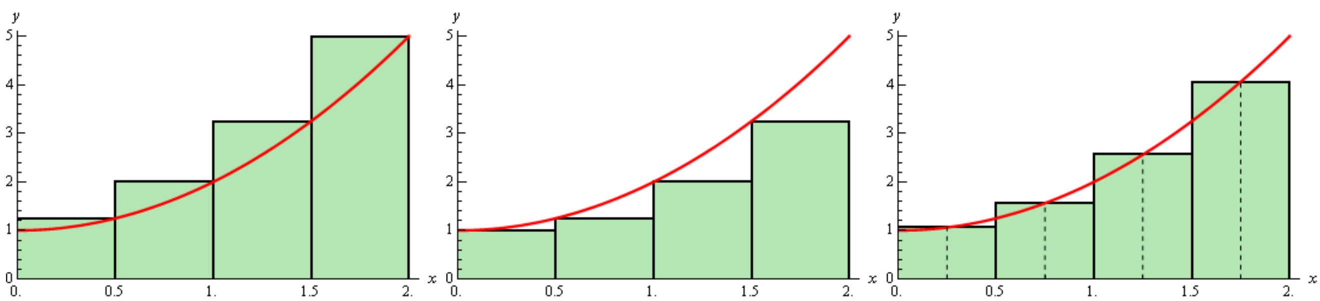
Ukoliko bismo želeli da dalje poboljšamo tačnost aproksimacije (smanjimo grešku), mogli bismo možda da nastavimo da tražimo tačku iz intervala [0,2] u kojoj nam se čini da je vrednost funkcije još bolji izbor za stranicu pravougaonika koji koristimo pri aproksimaciji. Međutim, jasno je da to nije baš dobra ideja. Prvo, ne znamo uvek pouzdano koja vrednost daje bolju, a koja lošiju aproksimaciju, a drugo - u ovom trenutku uopšte ne znamo da li takva tačka, u kojoj bi vrednost funkcije bila *idealna* stranica pravougaonika (tj. odgovarala bi pravougaoniku površine jednake traženoj), uopšte postoji. Intuitivno naslućujemo da je odgovor potvrdan, i da postoji pravougaonik jednake površine kao što je i tražena površina ispod krive, i čije su stranice dužina intervala (2) i vrednost funkcije u dobro odabranoj tački iz intervala. Ipak, tek kasnije ćemo formulisati teoremu koja ovo i garantuje.

Dakle, za poboljšanje preciznosti moramo da uradimo nešto drugo.

Ideja je da podelimo posmatranu oblast na delove, deleći interval $[0, 2]$, i da sa svakim od delova ponovimo postupak opisan za ceo polazni interval. Recimo da odredimo četiri jednaka podintervala polaznog intervala [0,2], i da sad posmatramo intervale

$$[0, 0.5], \qquad [0.5, 1], \qquad [1, 1.5], \qquad [1.5, 2].$$

Situacija koju imamo prikazana je na Slici 28, u zavisnosti od toga u kojim tačkama koristimo vrednost funkcije za stranicu aproksimirajućeg pravougaonika.



Slika 28: Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ na intervalu $[0, 2]$. Aproksimacija površine ispod krive pomoću četiri pravougaonika.

Približnu vrednost tražene površine, u svakom od prikazanih slučajeva, izračunavamo kao zbir površina pravougaonika:

$$\begin{aligned}
P_g^4 &= \frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\cdot f(1)+\frac{1}{2}\cdot f(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}\cdot f(2)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4}+\frac{1}{2}\cdot 5 = 5.75\\
P_d^4 &= \frac{1}{2}\cdot f(0)+\frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\cdot f(1)+\frac{1}{2}\cdot f(\frac{3}{2})\\
&= \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4} = 3.75\\
P_s^4 &= \frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\cdot f(\frac{3}{4})+\frac{1}{2}\cdot f(\frac{5}{4})+\frac{1}{2}\cdot f(\frac{7}{4})\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{41}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{65}{16} = 4.625.
\end{aligned}$$

P_g^4 označava sumu površina ("gornjih") 4 pravougaonika koji sadrže datu oblast, i gde su vrednosti funkcije koje određuju stranicu aproksimirajućeg pravougaonika računate uvek u tački podintervala u kojoj je funkcija maksimalna (u ovom slučaju to je uvek desna granica podintervala). P_d^4, analogno, označava sumu površina ("donjih") 4 pravougaonika, a korišćene vrednosti funkcija su minimalne na svakom podintervalu (računate su u levoj granici svakog podintervala). P_s^4 odgovara sumi površina "srednjih" pravougaonika, gde se vrednosti funkcije izračunavaju u središnjoj tački svakog od 4 podintervala.

Dolazimo do nekoliko zaključaka:

- Postoji značajno manja razlika između dobijenih aproksimacija za različite izbore tačaka u kojima računamo f, nego za situaciju kada nismo delili interval na podintervale (sada su to vrednosti $P_d^4 = 3.75$ i $P_g^4 = 5.75$ kao najmanja i najveća aproksimacija, a u prethodnom slučaju su to bile vrednosti $P_d^1 = 2$ i $P_g^1 = 10$).

- Na osnovu prikazanih slika, vidimo da je vrednost P_g^4 veća od tražene površine, a da je P_d^4 manja od tražene površine. Za vrednost P_s^4 ne možemo tvrditi ni jedno ni drugo, ali je intuitivno ova vrednost najbolja aproksimacija. Ovo je neposredna posledica činjenice da su vrednosti funkcije u prvom slučaju veće od svih iz odgovarajućeg podintervala nad kojim se koriste za određivanje pravougaonika, u drugom su manje od svih, a u trećem su negde između najmanje i najveće na intervalu.

- Jasno je da nismo morali koristiti ni vrednosti funkcije u desnoj, ni vrednosti funkcije u levoj granici podintervala, kao ni vrednosti u sredini intervala; mogli smo izabrati proizvoljnu tačku iz svakog od podintervala i izračunati vrednost funkcije u njoj, a zatim i površinu odgovarajućeg pravougaonika.

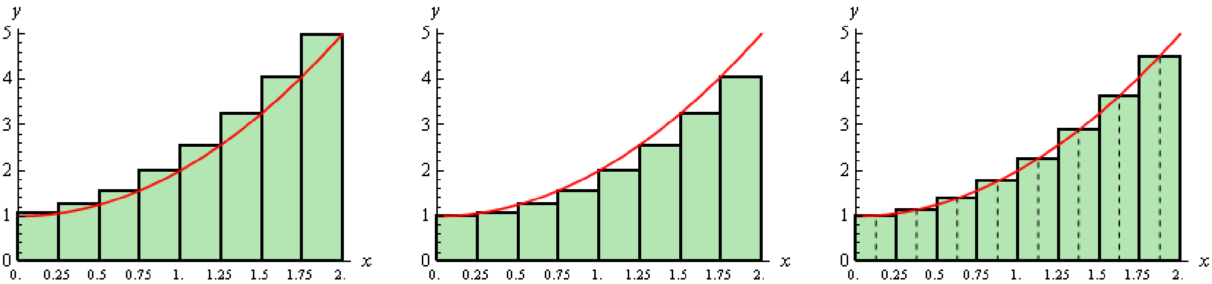
- Koristili smo jednake podintervale, ali je prilično jasno da nisu morali biti takvi; deobne tačke smo mogli i proizvoljno izabrati.

I konačno, jasno je i da ćemo, ponavljajući postupak i dalje deleći interval na sitnije podintervale, dobiti još bolju aproksimaciju tražene površine. Za slučaj sa osam podintervala, odgovarajuće tri situacije su prikazane na Slici 29.

Izračunavajući zbir površina pravougaonika u svakom od tri slučaja prikazana na Slici 29 na isti način kao malopre, dobijamo:

$$P_g^8 = 5.1875, \qquad P_d^8 = 4.1875, \qquad P_s^8 = 4.65625\ .$$

Dakle, međusobna odstupanja dobijenih aproksimacija su još manja, pa očekujemo i da je tačnost aproksimacije veća (opet znamo da je tačna vrednost tražene površine sigurno između vrednosti $P_d^8 = 4.1875$ i $P_g^8 = 5.1875$, jer sadrži prvu, a sadržana je u drugoj). Jasno nam je da daljom podelom intervala i povećanjem broja aproksimirajućih pravougaonika (koji, opet, postaju sve uži), možemo dalje



Slika 29: Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ na intervalu $[0, 2]$. Aproksimacija površine ispod krive pomoću osam pravougaonika.

povećati tačnost aproksimacije. Praktično, sve se svodi na sabiranje dovoljno mnogo sabiraka - površina pravougaonika koji sve bolje aproksimiraju traženu površinu na podintervalima. Problem koji, ipak, sve vreme postoji je - svaki pravougaonik uvek odstupa od tačne površine, jer on na podintervalu na kom ga posmatramo stvarnu funkciju koja se neprekidno menja zamenjuje konstantnom funkcijom na tom podintervalu. Ideja koja se ovde već nekako pomalja je: ukoliko bismo formirali beskonačno mnogo sabiraka, koji bi odgovarali pravougaonicima beskonačno male stranice (beskonačno uskim), po svemu sudeći bismo dobili tačnu vrednost površine!

Ovu odličnu ideju ćemo u narednom delu fomalizovati, i time ćemo definisati pojam određenog integrala funkcije.

Radi poređenja, navešćemo i da je tačna vrednost tražene površine $P = \dfrac{14}{3} = 4.\dot{6}$. Uskoro ćemo znati i da je izračunamo.

9.2 Definicija određenog integrala. Geometrijska interpretacija.

Uopštićemo postupak kojim smo aproksimirali površinu između grafika funkcije $y = f(x)$ i x-ose, na nekom intervalu $[a, b]$ koji je deo domena posmatrane funkcije.

Posmatrajmo funkciju $y = f(x)$, definisanu i ograničenu na zatvorenom intervalu $[a, b]$ realne ose. Podelimo interval $[a, b]$ na n delova skupom tačaka D, gde je

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\},$$

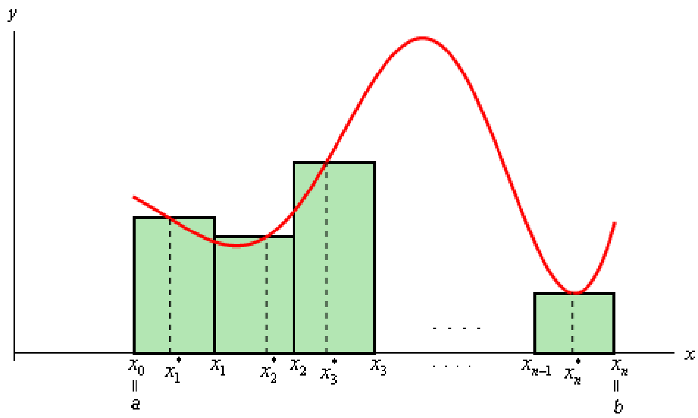
$$\begin{aligned} x_{i-1} &< x_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \triangle x_i &= x_i - x_{i-1} \,. \end{aligned}$$

U intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberimo proizvoljnu tačku x_i^* i odredimo vrednost funkcije $f(x_i^*)$ u svakoj od ovako izabranih tačaka. Ovim smo odredili stranice odgovarajućih n aproksimirajućih pravougaonika; one su jednake $\triangle x_i$ i $f(x_i^*)$. Ilustracija je prikazana na Slici 30.

Površina između grafika funkcije $y = f(x)$ i x-ose na intervalu $[a, b]$ može se aproksimirati zbirom površina pravougaonika:

$$I(D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \triangle x_i \,.$$

$I(D)$ se naziva *integralna ili Rimanova suma* za funkciju $f(x)$ u intervalu $[a, b]$. Rimanova suma zavisi od izbora i broja deobnih tačaka intervala, odnosno od skupa D, kao i od izbora tačaka x_i^*. U ovo smo se



Slika 30: Aproksimacija površine ispod grafika funkcije i iznad x-ose, na intervalu $[a, b]$, pomoću n pravougaonika.

uverili posmatrajući primer iz prethodnog odeljka, kada smo različito birali skup D, i tačke x_i^*, i dobijali različite vrednosti (P_d^4, P_g^4, P_s^4, P_d^8, P_g^8, P_s^8) kao aproksimacije tražene površine.

Kao što smo već najavili, zanima nas situacija kad se broj elemenata skupa D (odnosno broj podintervala, a samim tim i pravougaonika), neograničeno poveća, i to tako da se širina svakog podintervala (pravougaonika) neograničeno smanjuje. O njoj govori sledeća definicija - *definicija određenog integrala*:

Definicija 9.1. *Ako postoji granična vrednost sume $I(D)$ kada maksimalno $\triangle x_i$ teži nuli, nezavisna od podele D i načina izbora tačke x_i^* iz intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ ima* određeni integral*, tj. da je* integrabilna u Rimanovom smislu*, i pišemo*

$$\lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \triangle x_i = \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

Vrednost a naziva se donja, a b gornja granica integracije.

Uočavamo da su i naziv i oznaka upravo definisanog pojma, pojma određenog integrala, veoma slični sa ranije uvedenim pojmom neodređenog integrala. Ipak, sasvim je jasno da sličnost tu i prestaje. Dok je neodređeni integral *skup (svih primitivnih) funkcija* podintegralne funkcije, određeni integral je *broj - granična vrednost niza integralnih suma podintegralne funkcije.* Ova dva pojma će, međutim, biti dovedena u vezu jednim od najznačajnijih rezultata Matematičke analize.

Na osnovu svega do sad izloženog, možemo formulisati i zaključak o *geometrijskoj interpretaciji* određenog integrala:
Određeni integral *nenegativne* funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ geometrijski predstavlja *meru površine* između grafika funkcije i x-ose na posmatranom intervalu.

Ostaje još jedno interesantno pitanje: pod kojim uslovima granična vrednost niza integralnih suma date funkcije postoji. Drugim rečima, pitanje je može li se formulisati neki uslov koji obezbeđuje da je data funkcija integrabilna na posmatranom intervalu. U vezi sa tim, bez dokaza navodimo sledeću teoremu:

Teorema 9.1. *Ograničena funkcija, sa konačno mnogo tačaka prekida nad zatvorenim intervalom, je integrabilna nad tim intervalom.*

Uočimo da su ovim definisani i uslov koji interval integracije $[a, b]$ treba da ispuni (da bude zatvoren, a to znači i konačan), kao i uslovi koje podintegralna funkcija treba da ispuni (da je ograničena i sa konačno mnogo tačaka prekida), da bismo mogli definisati (Rimanov) integral. Uskoro ćemo se pozabaviti i pitanjem može li se Rimanov integral uopštiti i na slučajeve (funkcije i/ili intervale) kada neki od navedenih uslova nije ispunjen.

9.3 Osobine određenog integrala

Na osnovu definicije određenog integrala, možemo izvesti zaključke o nekim njegovim osobinama. Navodimo ih bez dokaza, a za njihovo razumevanje i intuitivno potvrđivanje često se možemo osloniti na geometrijsku interpretaciju integrala.

Osobine određenog integrala su:

1. Ako su $y = f(x)$ i $y = g(x)$ integrabilne funkcije na $[a, b]$, a A i B konstante, tada je
$$\int_a^b (A \cdot f(x) \pm B \cdot g(x))\, dx = A \int_a^b f(x)\, dx \pm B \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

2. Ako je $y = f(x)$ integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$, tada je
$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx\ .$$

3. Za proizvoljnu funkciju $y = f(x)$ zadovoljeno je
$$\int_a^a f(x)\, dx = 0\ .$$

4. Ako je $y = f(x)$ integrabilna funkcija nad intervalima $[a, b]$, $[a, c]$ i $[b, c]$, tada je
$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \ \int_a^c f(x)\, dx \ + \ \int_c^b f(x)\, dx\ .$$

5. Ako je $y = f(x)$ integrabilna funkcija nad intervalom $[a, b]$, a m i M infimum, odnosno supremum te funkcije nad $[a, b]$, tada je
$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M \cdot (b - a)\ .$$

6. Ako je $y = f(x)$ nenegativna, (odnosno nepozitivna) funkcija nad intervalom $[a, b]$, onda je
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0 \qquad \text{(odnosno} \quad \int_a^b f(x)\, dx \leq 0)\ .$$

7. Ako su $y = f(x)$ i $y = g(x)$ integrabilne funkcije nad $[a, b]$ i ako je $f(x) \leq g(x)$ nad istim intervalom, tada je i
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \; .$$

8. Ako je $y = f(x)$ integrabilna funkcija nad intervalom $[a, b]$, onda je
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \; .$$

Napomene u vezi sa navedenim osobinama:

1. Prva osobina je osobina linearnosti određenog integrala. Posledica je činjenice da je integral definisan kao granična vrednost zbira, a i limes i zbir su linearne operacije.

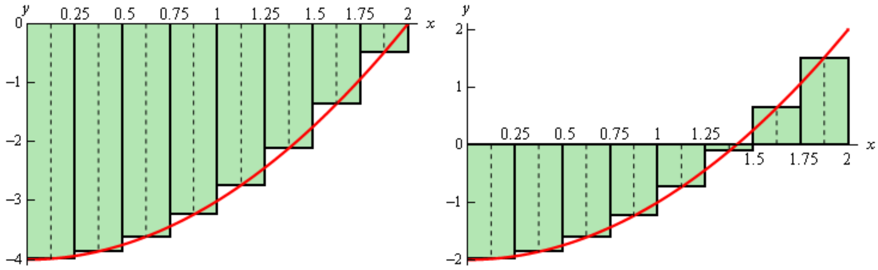
2. Druga osobina nam sugeriše da redosled granica integracije određuje smer kretanja duž intervala $[a, b]$. Činjenica je da "donja" i "gornja" granica nisu definisane na osnovu veličine (tj. donja granica može biti veća od gornje), ali da je znak priraštaja promenljive x ($\triangle x$) određen uvek u skladu sa kretanjem *od donje ka gornjoj* granici (intervala) integracije. Dakle, kretanje sa leva na desno implicira da je $\triangle x > 0$, a sa desna na levo da je $\triangle x < 0$. Promena redosleda granica integracije uzrokuje promenu znaka priraštaja $\triangle x$, a samim tim i promenu znaka integrala.

3. S obzirom da je u navedenom slučaju površina između krive i x-ose na posmatranom intervalu dužine 0 jednaka nuli, jasno je i da je integral jednak nuli.

4. U ovom slučaju opet se možemo osloniti na geometrijsku interpretaciju: površina između krive i x-ose na nekom intervalu može se "razložiti" na dve (ili više) površine nad disjunktnim podintervalima tog intervala. Slično možemo rezonovati i ako o integralu razmišljamo kao o sumi (koju predstavimo kao dve "pod-sume").

5. Ova osobina nije ništa drugo nego formalni zapis onoga što smo prikazali u Odeljku 9.1, u prvoj iteraciji aproksimacije površine: površina ispod krive nije manja od površine pravougaonika nad posmatranim intervalom, visine jednake minimumu funkcije, i nije veća od površine pravougaonika nad posmatranim intervalom, visine jednake maksimumu funkcije. Podsetimo se da je infimum funkcije najveće donje ograničenje funkcije na intervalu, a supremum je namanje gornje ograničenje funkcije na tom intervalu. Ukoliko je funkcija neprekidna, a interval zatvoren, infimum je jednak minimumu, a supremum maksimumu funkcije na tom intervalu.

6. Ova osobina ukazuje da je određeni integral negativne funkcije - negativan (ili 0). To je jasno na osnovu definicije, jer je svaki sabirak u Rimanovoj integralnoj sumi negativan, pa takva mora biti i granična vrednost (preciznije, ona ne može biti pozitivna). Ovim ističemo i da smo geometrijsku interpretaciju određenog integrala (kao meru površine ispod krive) vezali za nenegativnu funkciju. Sada je jasno da integral negativne funkcije ne odgovara meri površine, jer ova fizička veličina ne može biti negativna. Ilustracija koja potvrđuje da se i u ovom slučaju, uz malo pažnje, površina između krive i x-ose može računati primenom određenog integrala prikazana je na Slici 31. Ovim pitanjem ćemo se još baviti u nastavku.



Slika 31: Aproksimacija površine između grafika funkcije i x-ose, u slučaju kada je funkcija na posmatranom intervalu negativna (levo) i u slučaju kada funkcija na posmatranom intervalu menja znak (desno).

7. Ova osobina tvrdi da je površina ispod grafika veće funkcije veća nego površina ispod grafika manje funkcije, na posmatranom intervalu, što je, svakako, sasvim intuitivno.
8. Ako o integralu razmišljamo kao o zbiru, onda ova osobina tvrdi ono što već odavno znamo: apsolutna vrednost zbira ne može biti veća od zbira apsolutnih vrednosti.

Navešćemo još i sledeće dve činjenice, koje trivijalno slede iz svega prethodnog, ali je dobro naglasiti ih:

- Za funkciju $f(x) = c$ za $x \in [a, b]$ (konstantna funkcija) je

$$\int_a^b c\, dx = c \cdot (b - a)\ .$$

- Ako je f integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt\ .$$

Prva činjenica je posledica Osobine 5. Druga činjenica nas podseća da je promenljiva pod integralom "nevidljiva" van njega, odnosno da je možemo menjati kako god želimo, ne utičući na vrednost integrala, sve dok ne menjamo funkciju, i granice integracije.

9.3.1 Teorema o srednjoj vrednosti integrala

Navešćemo još jednu posledicu Osobine 5, koja je iskazana sledećom poznatom teoremom:

Teorema 9.2. (Teorema o srednjoj vrednosti integrala) *Neka je $y = f(x)$ integrabilna funkcija nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, a m, odnosno M, njen infimum, odnosno supremum nad intervalom $[a, b]$. Tada postoji broj μ, $m \leq \mu \leq M$, takav da je*

$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \ \mu \cdot (b - a)\ .$$

Da bi bila integrabilna, funkcija ne mora biti neprekidna. Međutim, ako jeste neprekidna, ona na zatvorenom intervalu uzima sve vrednosti između svog infimuma i supremuma, uključujući i njih. Tada postoji tačka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) = \mu$, sa osobinama iz Teoreme o srednjoj vrednosti. To znači da tada važi tvrđenje:

Teorema 9.3. *Ako je $y = f(x)$ neprekidna funkcija nad intervalom $[a, b]$, tada postoji broj c, $a < c < b$, takav da je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)\;.$$

Dakle, ovim je potvrđeno da na intervalu $[a, b]$ postoji tačka c u kojoj vrednost funkcije $f(c)$ predstavlja "idealnu" visinu aproksimativnog pravougaonika, o čemu smo već nešto nagovestili u Odeljku 9.1. Vraćajući se još jednom na zadatak određivanja površine prikazane na Slici 27 (Odeljak 9.1), i koristeći činjenicu da je $\int_0^2 (x^2+1)dx = \frac{14}{3}$ (što još uvek nismo sami izračunali, ali uskoro ćemo!), Teoremu o srednjoj vrednosti možemo ilustrativno primeniti tako što ćemo odrediti navedenu tačku $c \in (0, 2)$ sa osobinom da je

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = f(c) \cdot (2 - 0)\;, \qquad \text{gde je} \quad f(c) = c^2 + 1\;.$$

Iz navedenog zaključujemo da je

$$f(c) = c^2 + 1 = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{6} \qquad \Rightarrow \qquad c^2 = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.1547\;.$$

Dakle, pravougaonik sa stranicama 2 i $f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{14}{6}$ ima površinu jednaku površini ispod krive $y = f(x) = x^2 + 1$.

9.4 Izračunavanje određenog integrala

Pitanje koje se prirodno postavlja je kako se određeni integral izračunava. Sada kada imamo definiciju, pokušaćemo da je iskoristimo da bismo odredili tačnu vrednost površine koju smo posmatrali i aproksimirali u Odeljku 9.1, odnosno koja je prikazana na Slici 27.

Primer 9.1. *Izračunati* $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$.

Rešenje: Izračunaćemo integral koristeći definiciju. U ovom trenutku ne znamo ni jedan drugi način kako bismo to mogli uraditi. Dakle, formiraćemo niz integralnih suma, i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Podelimo ineral $[0, 2]$ na n jednakih delova (znamo da podela ne mora biti na jednake delove, ali ovakav izbor će nam u ovom slučaju pojednostaviti rad). Skup deobnih tačaka je tada

$$D = \{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \frac{2i}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)}{n}, 2\}\;.$$

Dakle, svaka deobna tačka x_i je oblika $x_i = \frac{2i}{n}$, a dužina jednog podintervala je $\triangle x_i = \frac{2}{n}$. Opredelimo se da tačke x_i^*, u kojima izračunavamo vrednosti funkcije, budu upravo deobne tačke. Vrednosti funkcije u deobnim tačkama su:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = f(\frac{2i}{n}) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = \frac{4i^2}{n^2} + 1\;.$$

Odgovarajuća integralna suma je

$$I(D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \triangle x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} + 1\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^2}{n^3}+\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\\
&= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1\\
&= \frac{8}{n^3}\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{2}{n}\cdot(1+1+\ldots+1)\\
&= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2}{n}\cdot n\\
&= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}+2\\
&= \frac{14n^2+12n+4}{3n^2}\,.
\end{aligned}
$$

Tada je određeni integral jednak graničnoj vrednosti ove integralne sume, kada $\triangle x_i \to 0$, što u posmatranom slučaju (zbog $\triangle x_i = \frac{2}{n}$) odgovara situaciji da $n \to \infty$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 (x^2+1)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\triangle x_i\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{14n^2+12n+4}{3n^2}=\frac{14}{3}.
\end{aligned}
$$

Napominjemo da smo koristili poznati identitet - formulu za zbir kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$
1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad .
$$

Ovim smo izračunali tačnu vrednost površine koji smo približno određivali u Odeljku 9.1. Ne može se reći da je posao lak, pogotovo imajući na umu da je ovde reč o veoma jednostavnoj funkciji! Veoma bi nam odgovaralo da postoji neki jednostavniji način da se izračuna određeni integral. O tome govori sledeća, izuzetno značajna, teorema.

9.4.1 Njutn-Lajbnicova formula - Fundamentalna teorema integralnog računa

Teorema 9.4. *Ako je $y=f(x)$ integrabilna funkcija nad intervalom $[a,b]$, i ako $y=f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad $[a,b]$, tj. ako je*

$$
\int f(x)\,dx \;=\; F(x)+C\,,\quad (F'(x)=f(x))\,,
$$

tada je

$$
\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a)\,. \tag{9}
$$

Formulom (9) data je veza između neodređenog i određenog integrala. Poznata je pod imenom **Njutn-Lajbnicova formula** i predstavlja jedan od fundamentalnih rezultata integralnog računa, jer omogućava izračunavanje određenog integrala bez određivanja granične vrednosti integralne sume.

Dokaz: Posmatrajmo diferencijabilnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$ i podelimo interval $[a,b]$ na podintervale podelom D,

$$D = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\} .$$

Primenjujući Lagranžovu teoremu (teoremu o srednjoj vrednosti), na funkciju $F(x)$ na svakom podintervalu, dobijamo da postoje tačke $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, takve da važi:

$$\begin{array}{lllll} F(x_1) - F(a) & = & F'(x_1^*) \cdot (x_1 - a) & = & f(x_1^*) \cdot \triangle x_1 \ , \\ F(x_2) - F(x_1) & = & F'(x_2^*) \cdot (x_2 - x_1) & = & f(x_2^*) \cdot \triangle x_2 \ , \\ & & \vdots & & \\ F(x_i) - F(x_{i-1}) & = & F'(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}) & = & f(x_i^*) \cdot \triangle x_i \ , \\ & & \vdots & & \\ F(b) - F(x_{n-1}) & = & F'(x_n^*) \cdot (b - x_{n-1}) & = & f(x_n^*) \cdot \triangle x_n \ . \end{array}$$

Zbir prethodnih jednačina daje

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \triangle x_i \ .$$

Leva strana ove jednakosti je konstantna za ma koju podelu intervala $[a,b]$, pa imamo (posmatrajući granični proces) da je

$$F(b) - F(a) = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x_i = \int_a^b f(x)\, dx \ ,$$

čime je tvrđenje Teoreme dokazano.

Napomenimo još i da je uobičajeno da se koristi oznaka

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \ .$$

Postoji i "drugi deo" Fundamentalne teoreme integralnog računa. Slobodno interpretirano, ovo tvrđenje se bavi mogućnošću da se određeni integral, koji je po prirodi stvari konstanta za datu funkciju na datom intervalu, ipak posmatra kao funkcija. Konkretnije, dopuštajući da jedna od granica integracije bude promenljiva, možemo posmatrati određeni integral kao funkciju te granice. U vezi sa ovim, formulišemo (bez dokaza) tvrđenje kojim se opisuje kako se ovako definisana funkcija diferencira:

Teorema 9.5. *Neka je $y = f(u)$ neprekidna funkcija za $u \in [a,b]$, a $F(x) = \int_a^x f(u)\, du$, $a \le x \le b$. Tada je*

$$F'(x) = f(x).$$

Uočimo da je funkcijom $F(x)$ definisana površina između krive f i x-ose, na intervalu $[a,x]$ koji je promenljive dužine. (Pretpostavili smo, za ovu interpretaciju, da je $f \ge 0$ na posmatranom intervalu.) Tako je, recimo, funkcijom

$$F(x) = \int_1^x f(u)du = \frac{u^2}{2}\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

data površina oblasti između x-ose i prave $f(u) = u$ na intervalu $[1,x]$ koji je promenljive dužine. Ta površina, razume se, zavisi od toga kolika je granica intervala integracije. Kako je posmatrana oblast trapez sa osnovicama 1 i x, i sa visinom $x-1$, lako je proveriti da dobijena vrednost integrala zaista izražava površinu ovog trapeza, u zavisnosti od x.

Uočimo, takođe, da je ovako definisana funkcija F primitivna funkcija funkcije f. Dakle, Njutn-Lajbnicova formula govori o tome kako se može izračunati određeni integral funkcije f ako se zna njen neodređeni integral (primitivna funkcija), a Teorema 9.5 govori o tome kako se može, korišćenjem određenog integrala funkcije f odrediti primitivna funkcija (neodređeni integral) funkcije f. Time je uspostavljena "obostrana veza" između neodređenog i određenog integrala funkcije f.

Primer 9.2. *Odrediti izvod funkcije:*

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt;$

b) $\displaystyle\int_{x^2}^1 \frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt.$

Rešenje: Navedene funkcije su definisane korišćenjem određenog integrala sa promenljivom granicom. Izvode ovih funkcija odredićemo koristeći Teoremu 9.5.

a) U ovom slučaju direktno primenjujemo teoremu i dobijamo da je

$$\left(\int_1^x \frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt\right)' = \frac{x^4+1}{x^2+1}\,.$$

Uočavamo da konstantna granica integracije nema nikakav uticaj na rezultat.

b) U ovom slučaju ne možemo direktno da primenimo Teoremu 9.5, i to iz dva razloga: (1) sada je gornja granica integracije konstantna i (2) promenljiva granica integracije je funkcija od x, a ne x. Prvi problem rešavamo koristeći Osobinu 2. Drugi problem zahteva primenu formule za izvod složene funkcije. Ova formula u navedenom slučaju vodi do sledećeg:

$$\left(\int_a^{g(x)} f(u)\,du\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)\,.$$

U konkretnom primeru sada dobijamo da je

$$\left(\int_{x^2}^1 \frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt\right)' = \left(-\int_1^{x^2} \frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt\right)' = -\frac{(x^2)^4+1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x = -\frac{x^8+1}{x^4+1}\cdot 2x\,.$$

9.4.2 Metod smene kod određenog integrala

Nakon što je Njutn-Lajbnicovom formulom uspostavljena veza između određenog i neodređenog integrala, postalo je jasno da se određeni integral ne mora računati po definiciji, već se može odrediti korišćenjem primitivne funkcije (neodređenog integrala) date podintegralne funkcije. To, praktično, znači da nema nikakvih novih pravila za izračunavanje određenih integrala. Ipak, moguće je, čisto "tehnički", formulisati kako se koriste metode integracije (metoda smene i metoda parcijalne integracije), u vezi sa određenim integralom (odnosno, kako se ponašamo sa granicama integracije kada primenjujemo navedene metode).

Teorema 9.6. (Metoda smene) *Neka je dat* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$*, gde je* $y=f(x)$ *neprekidna funkcija nad intervalom* $[a,b]$*. Uvedimo novu promenljivu prema formuli* $x=\phi(t)$*. Ako su zadovoljeni uslovi*

1. $\phi(\alpha) = a\ ,\quad \phi(\beta) = b\ ,$

2. $\phi(t)$ *i* $\phi'(t)$ *su neprekidne funkcije nad intervalom* $[\alpha, \beta]$,

3. $f(\phi(t))$ *je definisana i neprekidna nad intervalom* $[\alpha, \beta]$,

onda je

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt\ .$$

Primer 9.3. *Izračunati:*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{9}} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

Rešenje: Uočimo da je u sva četiri zadatka podintegralna funkcija nepromenjena. U prvom primeru treba izračunati neodređeni integral date funkcije, a u preostalim se traže određeni integrali na različitim intervalima.

a) Ovaj neodređeni integral možemo rešiti uvođenjem smene $\sqrt{x} = t$, odakle je $x = t^2$ i $dx = 2tdt$. Tada je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = 2\int \frac{tdt}{t-1} = 2\int \frac{t-1+1}{t-1}dt = 2\int dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = 2t + 2\ln|t-1| + C = 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1| + C\ .$$

Ovde je veoma korisno napomenuti da kod neodređenih integrala često ne navodimo uslove pod kojima rešenje koje smo dobili ima smisla; tako najčešće podrazumevamo da smo se svi dobro razumeli i da integral funkcije uvek računamo samo za vrednosti iz domena podintegralne funkcije. To znači da u navedenom primeru podrazumevamo da je $x \geq 0$ i $x \neq 1$, jer u protivnom podintegralna funkcija nije definisana. Činjenica da uslove definisanosti često ne navodimo ponekad vodi ka tome da ove uslove potpuno previdimo. Kod rešavanja neodređenog integrala uvek se lako "krijemo" iza tumačenja da dobijeno rešenje važi "na odgovarajućem intervalu". Kao što ćemo se uveriti, ovako "elegantan izlaz" nemamo u slučaju kada rešavamo određeni integral.

b) Na osnovu Njutn-Lajbnicove formule, dovoljno je da izračunamo vrednost $F(9) - F(4)$ za funkciju $F(x) = 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1| + C$, koju smo odredili u primeru (a) kao primitivnu funkciju date podintegralne funkcije. Tada je

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = \left(2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1|\right)\Big|_4^9 = 2(3 + \ln 2 - 2 - \ln 1) = 2(1 + \ln 2).$$

Uočimo da je sada jasno definisano koje vrednosti uzima promenljiva: $x \in [4, 9]$. Na ovom intervalu podintegralna funkcija je definisana, pa nema prepreka za rešavanje integrala.

Ukoliko obratimo pažnju na Teoremu 9.6, uočavamo da je postupak uvođenja smene opisan tako da uključuje i zamenu granica integracije, pa nove granice odgovaraju intervalu kom pripada nova promenljiva. Ovim je, ujedno, omogućeno i da se rešavanje polaznog integrala "prevede" na rešavanje novog integrala, pri čemu se određuje primitivna funkcija novog integrala, i u nju uvrštavaju granice u kojima se kreće novouvedena promenljiva. Dobijeno rešenje je, ujedno, i rešenje polaznog problema. Naglašavamo da ovo znači da nije potrebno primitivnu funkciju izraziti u funkciji polazne promenljive (niti uvrštavati polazne granice integracije u nju); promenom granica gubi se potreba za tzv. "vraćanjem smene".

Ovo znači da smo posmatrani primer mogli rešavati na sledeći način: uvođenjem smene $\sqrt{x}=t$, odakle je $dx=2tdt$, dobijamo i da za $x=4$ važi da je $t=2$, kao i da za $x=9$ važi da je $t=3$. Tada je

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = 2\int_2^3 \frac{tdt}{t-1} = 2t\Big|_2^3 + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 = 2(1+\ln 2)\ .$$

Uočimo da smo mogli da koristimo, recimo, i smenu $\sqrt{x}=-t$, odakle je takođe $dx=2tdt$, ali dobijamo da za $x=4$ važi da je $t=-2$, kao i da za $x=9$ važi da je $t=-3$. Tada je

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = 2\int_{-2}^{-3} \frac{tdt}{-t-1} = -2\int_{-2}^{-3} \frac{tdt}{t+1} = 2\int_{-3}^{-2} dt - 2\int_{-3}^{-2} \frac{dt}{t+1} = 2t\Big|_{-3}^{-2} - 2\ln|t+1|\Big|_{-3}^{-2} = 2(1+\ln 2)\ .$$

Naravno, u svim slučajevima rezultat je isti.

c) Ovaj primer se od prethodnog formalno razlikuje samo po granicama integracije, ali suštinski, razlika je daleko veća. Problem nastupa zbog toga što podintegralna funkcija nije definisana na celom intervalu integracije, pa ovaj integral ne postoji. Kao što smo već naveli, podintegralna funkcija je definisana za vrednosti $x \geq 0$ i $x \neq 1$. Ukoliko ne bismo unapred obratili pažnju na ovaj uslov definisanosti, nego bismo pokušali da, recimo, koristimo primitivnu funkciju koju smo izračunali u delu (a), naišli bismo na (upozoravajući) problem kada bismo pokušali da odredimo vrednost primitivne funkcije u negativnoj granici integracije. Srećom, nakon toga bi bilo neizbežno da donesemo ispravan zaključak da se integral ne može izračunati.

d) U ovom primeru ne postoje nikakve prepreke da izračunamo vrednost primitivne funkcije u granicama integracije i da, primenom Njutn-Lajbnicove formule, dođemo do vrednosti koju bismo možda mogli smatrati vrednošću datog integrala. Problem sa ovakvim zaključkom je u tome što podintegralna funkcija nije definisana u tački $x=1$ koja pripada intervalu integracije i što u okolini te tačke nije ograničena (nije teško uočiti da je $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = -\infty$ i da je $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = \infty$.) Ovo znači da data funkcija na posmatranom intervalu nije integrabilna, odnosno da (Rimanov) integral ove funkcije ne postoji. Veoma je važno primetiti da se do ovog zaključka dolazi samo ukoliko se obrati pažnja na uslove postojanja integrala, odnosno osobine podintegralne funkcije na intervalu integracije; sve dok se posmatraju samo granice integracije i vrednost primitivne funkcije u njima, lako se može napraviti ozbiljna greška i dodeliti vrednost integralu koji ne postoji.

O tome može li se, eventualno, na neki drugi način rešiti posmatrani integral biće uskoro rečeno više.

9.4.3 Metod parcijalne integracije kod određenog integrala

Teorema 9.7. (Metoda parcijalne integracije) *Neka su $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ i $v'(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom $[a,b]$. Tada je*

$$\int_a^b u(x)\cdot dv(x) \ = \ u(x)\cdot v(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot du(x)\ .$$

Primer 9.4. *Izračunati* $\int_1^2 \ln x \, dx$.

Rešenje: Kao što je navedeno u prethodnoj Teoremi, rešavanje određenog integrala metodom parcijalne integracije se u potpunosti svodi na primenu Njutn-Lajbnicove formule, odnosno evaluaciju primitivne funkcije u krajnjim tačkama intervala integracije. Tako je, za $u = \ln x$ i $dv = dx$,

$$\int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - \ln 1 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

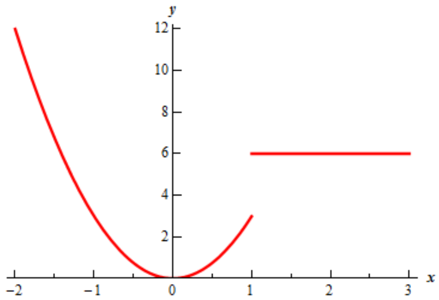
Navodimo još nekoliko ilustrativnih primera koji se odnose na izračunavanje određenog integrala:

Primer 9.5. *Za funkciju* $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1 \\ 6, & x > 1 \end{cases}$ *izračunati*

a) $\int_{10}^{22} f(x) \, dx$;

b) $\int_{-2}^{3} f(x) \, dx$.

Rešenje: S obzirom da je $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 3$, a da je $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 6 \neq 3$, data funkcija ima prekid (skok) u tački $x = 1$. Njen grafik prikazan je na Slici 32:



Slika 32: Grafik funkcije posmatrane u Primeru 9.5.

Teorema 9.1 tvrdi da integral ove funkcije postoji na svakom zatvorenom intervalu, s obzirom da je ona na svakom takvom intervalu ograničena i ima najviše jednu tačku prekida (Teorema 9.1 dozvoljava konačno mnogo tačaka prekida).

a) Integral posmatrane funkcije na intervalu $[10, 22]$ svodi se na

$$\int_{10}^{22} f(x) \, dx = \int_{10}^{22} 6 \, dx = 6 \int_{10}^{22} dx = 6x\Big|_{10}^{22} = 6 \cdot (22 - 10) = 72.$$

b) Posmatrana funkcija na intervalu integracije $[-2, 3]$ ima prekid. Ukoliko zadatak shvatimo kao izračunavanje površine između krive i x-ose, na intervalu od $x = -2$ do $x = 3$, jasno je da se posmatrana površina, a samim tim i integral, mogu posmatrati kao zbir dva sabirka (dve površine, odnosno dva integrala):

$$\int_{-2}^{3} f(x) \, dx = \int_{-2}^{1} 3x^2 \, dx + \int_{1}^{3} 6 \, dx = x^3\Big|_{-2}^{1} + 6x\Big|_{1}^{3} = 1 - (-8) + 6 \cdot (3 - 1) = 21.$$

Primer 9.6. *Izračunati* $\int_0^3 |3x-5|\,dx.$

Rešenje: S obzirom da je podintegralna funkcija $f(x) = |3x-5| = \begin{cases} 3x-5, & x \geq \frac{5}{3} \\ -(3x-5), & x < \frac{5}{3} \end{cases}$, a da interval integracije sadrži tačku $x = \dfrac{5}{3}$ u kojoj se pravilo preslikavanja menja, dati integral ćemo izračunati rastavljajući ga na dva (sasvim jednostavna) integrala (sabirka):

$$\int_0^3 |3x-5|\,dx = -\int_0^{\frac{5}{3}} (3x-5)\,dx + \int_{\frac{5}{3}}^3 (3x-5)\,dx = \frac{41}{6}.$$

Uočimo još i da je posmatrana funkcija neprekidna.

Primer 9.7. *Izračunati*

a) $\int_{-2}^{2} (x^2 + \cos x)\,dx$*;*

b) $\int_{-5}^{5} (x^5 + \sin x)\,dx.$

Rešenje: Cilj ovog primera je da skrene pažnju na integraciju parnih, odnosno neparnih funkcija na intervalima simetričnim u odnosu na nulu. Koristimo da je za *parnu* funkciju f (odnosno, onu koja zadovoljava uslov $f(-x) = f(x)$) na simetričnom intervalu zadovoljeno

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\ ,$$

a da je za *neparnu* funkciju f (odnosno, onu koja zadovoljava uslov $f(-x) = -f(x)$) na simetričnom intervalu zadovoljeno

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\ .$$

a) Za podintegralnu funkciju $f(x) = x^2 + \cos x$ važi da je $f(-x) = f(x)$ (funkcija je parna). Kako je interval integracije simetričan u odnosu na koordinatni početak (nulu), važi da je

$$\int_{-2}^{2} (x^2 + \cos x)\,dx = 2\int_0^2 (x^2 + \cos x)\,dx\ = 2\left(\frac{x^3}{3} + \sin x\right)\Big|_0^2 = 2\frac{2^3}{3} + 2\sin 2.$$

b) Za podintegralnu funkciju $f(x) = x^5 + \sin x$ važi da je $f(-x) = -f(x)$ (funkcija je neparna). Kako je interval integracije simetričan u odnosu na koordinatni početak (nulu), važi da je

$$\int_{-5}^{5} (x^5 + \sin x)\,dx = 0.$$

10 Nesvojstveni integral

Određeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, u smislu Rimana, definisali smo (Definicija 9.1) kao graničnu vrednost integralne sume

$$\lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \triangle x_i \; = \; \int_a^b f(x)\, dx,$$

ako ta granična vrednost postoji i ne zavisi od izbora deobnih tačaka koje odrej uju intervale $[x_{i-1}, x_i]$ (pri čemu je $x_0 = a$ i $x_n = b$), kao ni od izbora tačke x_i^* iz svakog od tih intervala.

Teoremom 9.1 definisani su uslovi pod kojima navedena granična vrednost, a time i određeni integral, postoji. Uslovi se odnose na interval integracije (koji treba da bude zatvoren, a samim tim konačan), i na podintegralnu funkciju (koja treba da bude ograničena na intervalu integracije, i da na njemu ima najviše konačno mnogo tačaka prekida). Nećemo često nailaziti na funkcije koje imaju beskonačno mnogo tačaka prekida nad nekim intervalom; praktično, podrazumevaćemo ispunjenje uslova o konačno mnogo tačaka prekida. Činjenica je, međutim, da mnoge funkcije sa kojima se srećemo nisu ograničene na nekom konačnom intervalu, kao i da su mnoge funkcije definisane na beskonačnim intervalima. Nije neočekivano pitanje da li je moguće uopštiti definiciju određenog integrala tako da se ona odnosi i na situacije kada je uslov ograničenosti - bilo funkcije, bilo intervala integracije, bilo i jednog i drugog - narušen.

Odgovor na ovo pitanje je potvrdan i vodi do pojma *nesvojstvenog integrala.*

10.1 Nesvojstveni integral prve vrste - beskonačan interval integracije

U slučaju kada jedna ili obe granice integracije nisu konačni brojevi, odnosno ako $a \to -\infty$, ili $b \to \infty$, ili važi istovremeno i jedno i drugo, dolazimo do pojma *nesvojstvenog integrala prve vrste.* Po definiciji je

$$\int_a^\infty f(x)\, dx \; = \; \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

pod uslovom da je $f(x)$ neprekidna funkcija za $a \leq x < \infty$.

Ako je $\displaystyle\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$ konačan broj, kažemo da $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konvergira*, a ako ta granična vrednost ne postoji, ili nije konačna, kažemo da $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ *divergira.*

Slično, važi da je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x)\, dx \; &= \; \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx, \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx \; &= \; \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Primer 10.1. *Izračunati vrednost nesvojstvenog integrala:*

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx.$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$

Rešenje: Nesvojstvene integrale prve vrste lako je prepoznati po karakterističnoj beskonačnoj granici integracije. Izračunavamo ih po definiciji:

a) Funkcija $f(x) = e^{-x}$ je na posmatranom intervalu $[0, \infty)$ definisana i važi da je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Znamo da Rimanov integral geometrijski odgovara površini između grafika podintegralne funkcije i x-ose na posmatranom intervalu integracije, a ovde se, praktično, suočavamo sa istim pitanjem - kolika je površina koju određuju kriva $f(x) = e^{-x}$ i x-osa, za $x \in [0, \infty)$. Prva reakcija nam je, verovatno, da na beskonačnom intervalu možemo imati samo beskonačno veliku površinu. Međutim, činjenica da posmatrana funkcija teži nuli kada x neograničeno raste navodi na zaključak da je doprinos ukupnoj površini sve manji, i eventualno zanemarljiv, kada se x dovoljno poveća. Time dolazimo da zaključka da za neke funkcije, koje se dovoljno, i dovoljno brzo, približavaju nuli na beskonačnom intervalu integracije, *mera* posmatrane površine - a samim tim i integral - može da bude konačna (iako je sama površina neograničena). U ovom slučaju je:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) = -\lim_{b\to\infty} e^{-b} + e^0 = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} + 1 = 1$$

pa zaključujemo da navedeni nesvojstveni integral konvergira.

b) Ukoliko za podintegralnu funkciju ne važi da joj je granična vrednost jednaka nuli kada se x kreće ka neograničeno dalekom kraju intervala integracije, sasvim je izvesno da nesvojstveni integral neće konvergirati (biti konačan, odnosno postojati). Ukoliko podintegralna funkcija teži nuli za neograničeno x, *postoji mogućnost* da nesvojstveni integral konvergira. Kako i u ovom primeru važi da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2} = 0$, ima smisla dalje ispitivati konvergenciju navedenog integrala. Tako je

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

pa zaključujemo da dati integral konvergira.

Primer 10.2. *Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, *u zavisnosti od realnog parametra* α.

Rešenje: Kako se za vrednosti $\alpha = 1$ i $\alpha \neq 1$ dati integral svodi na različite tablične integrale, ova dva slučaja posmatramo zasebno.

Za $\alpha \neq 1$ je

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\cdot(b^{-\alpha+1}-1),$$

a za $\alpha = 1$ važi da je $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b$.

Dalje, prema definiciji je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha},$$

a

$$\lim_{b\to\infty} b^{-\alpha+1} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}.$$

Takođe je i $\lim\limits_{b\to\infty}\ln b = \infty$, pa konačno zaključujemo da za

$$\begin{array}{llcll} \alpha > 1 & \text{integral} & \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & \text{konvergira,} \\ \alpha < 1 & \text{integral} & \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \infty & \text{divergira,} \\ \alpha = 1 & \text{integral} & \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty & \text{divergira.} \end{array}$$

Ukoliko smo u mogućnosti da izračunamo nesvojstveni integral, jasno je da na osnovu izračunate vrednosti imamo odgovor na pitanje o konvergenciji tog integrala. Takav je slučaj sa integralima iz prethodna dva primera. Činjenica je, međutim, da često nije od značaja izračunati vrednost nesvojstvenog integrala, već je potrebno samo utvrditi da li on konvergira ili divergira. Sa druge strane, često nije sasvim jednostavno izračunati nesvojstveni integral, što znači da bi u situacijama kada je dovoljno utvrditi da li integral konvergira ili ne, a nije potrebno odrediti njegovu vrednost, bilo zgodno imati na raspolaganju neke druge načine, osim konkretnog izračunavanja, za dobijanje odgovora na ovo pitanje. Takvi uslovi postoje, i uglavnom o njima govorimo kao o *kriterijumima konvergencije nesvojstvenog integrala.* Naredna teorema formuliše jedan takav uslov, koji navodimo bez dokaza.

Teorema 10.1. *Ako funkcije f i g zadovoljavaju uslov da je $0 \le f(x) \le g(x)$ za svako $x \ge a$. Tada*

1. *iz konvergencije integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$ sledi konvergencija integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ i važi da je $\int_a^\infty f(x)\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx$;*
2. *iz divergencije integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sledi divergencija integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$.*

Primer 10.3. *Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\cdot(1+e^x)}$.*

Rešenje: Ovaj zadatak rešićemo primenom Teoreme 10.1. Za to nam je potrebno da odredimo funkciju koja je na posmatranom intervalu $[1,\infty)$ veća od date podintegralne funkcije, a za čiji nesvojstveni integral znamo, ili možemo lako da utvrdimo, da konvergira. Naravno, ovakvu funkciju možemo naći samo ako dati (posmatrani) integral konvergira. Ukoliko on divergira, to ćemo potvrditi pronalazeći funkciju koja je od date podintegralne funkcije manja, a za njen nesvojstveni integral znamo da divergira.

Nije teško zaključiti da za primenu navedene teoreme treba da imamo (1) dobru intuiciju o tome da li posmatrani integral konvergira ili divergira; (2) pogodnu funkciju o kojoj znamo kako joj se ponaša integral, a uz to ispunjava uslov da je veća, odnosno manja, od date funkcije na posmatranom intervalu. Ovo nije uvek jednostavno. Često se, međutim, dešava, da tražena funkcija može biti neka od funkcija oblika $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$. O ponašanju njenog integrala, u zavisnosti od vrednosti α dobili smo odgovore u prethodnom primeru.

Dakle, u slučaju koji posmatramo je

$$0<\frac{1}{x^2\cdot(1+e^x)}<\frac{1}{x^2}.$$

Na osnovu prethodnog primera sledi da $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergira (s obzirom da je $\alpha=2>1$). Tada, koristeći Teoremu 10.1, zaključujemo da i polazni integral konvergira.

10.2 Nesvojstveni integral druge vrste - neograničena funkcija na intervalu integracije

Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ naziva se *nesvojstveni integral druge vrste* ako na intervalu integracije $[a,b]$ podintegralna funkcija $f(x)$ ima prekid druge vrste, odnosno ukoliko granična vrednost funkcije u tački prekida nije konačna.

Pretpostavimo da je tačka u kojoj funkcija ima beskonačnu graničnu vrednost jedna od krajnjih tačaka intervala integracije.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b)$, i ako je $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$, (odnosno $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$), definišemo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\ ,$$

a ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $(a,b]$, i ako je $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, (odnosno $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$), uvodimo definiciju

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\ .$$

Nije teško uočiti da, ako funkcija $f(x)$ ima prekid druge vrste u tački $x = c$, pri čemu je $c \in [a,b]$, problem možemo svesti na već opisane, jer možemo napisati da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx\ .$$

Ako su granične vrednosti, koje se pojavljuju u prethodnim definicijama, konačni brojevi, kažemo da odgovarajući nesvojstveni integrali druge vrste konvergiraju, a ako te granične vrednosti ne postoje, ili nisu konačni brojevi, kažemo da nesvojstveni integrali divergiraju.

Primer 10.4. *Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, *za* $\alpha > 0$.

Rešenje: Uočimo, prvo, da nesvojstveni integral druge vrste možemo primetiti samo ako se potrudimo. To znači da ovakav integral na prvi pogled ni po čemu ne izgleda drugačije od "običnog" (Rimanovog) integrala; problem možemo otkriti samo ako proverimo definisanost (neprekidnost) i ograničenost podintegralne funkcije na intervalu integracije. Sa druge strane, nesvojstveni integral prve vrste je lako prepoznatljiv po beskonačnoj granici integracije.

U konkretnom primeru koji ovde rešavamo uočavamo da za $\alpha \le 0$ podintegralna funkcija nema prekida, i ograničena je na posmatranom intervalu $[0,1]$, pa integral u tom slučaju nije nesvojstven, i može se izračunati kao i svaki Rimanov integral.

Ukoliko je $\alpha > 0$, problem se javlja u tački $x = 0$ (leva granica intervala integracije), s obzirom da za podintegralnu funkciju važi da je u toj tački nedefinisana i da je $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^\alpha} = \infty$.

Dalje je za $\alpha \ne 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\alpha+1}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases}\ .
\end{aligned}$$

Takođe,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = \infty\ .$$

Zaključujemo da za

$$\alpha > 1 \quad \text{integral} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \;=\; \infty \qquad \text{divergira,}$$

$$\begin{array}{llcll} \alpha = 1 & \text{integral} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} & = & \infty & \text{divergira,} \\ \alpha < 1 & \text{integral} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} & = & \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{konvergira.} \end{array}$$

Primer 10.5. *Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Rešenje: Podintegralna funkcija je parna, a interval integracije simetričan u odnosu na koordinatni početak. Koristeći ovu osobinu i prethodni primer, zaključujemo da integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = 2 \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

divergira, s obzirom da je u ovom slučaju $\alpha = 2 > 1$.

Uočimo da se direktnom primenom Njutn-Lajbnicove formule dobija

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{-1}^{1} = -2,$$

što, naravno, nije tačno.

Za ispitivanje konvergencije nesvojstvenih integrala druge vrste takođe se mogu koristiti odgovarajuće teoreme upoređivanja. Navešćemo samo jednu od njih, i to bez dokaza.

Teorema 10.2. *Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju prekid druge vrste u tački $x = b$ i ako za $x \in [a, b)$ važi da je $0 \le f(x) \le g(x)$, tada*

1. *iz konvergencije nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ sledi konvergencija nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int_a^b f(x) dx$;*
2. *iz divergencije nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ sledi divergencija nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$.*

Odgovarajuća teorema može se formulisati i u slučaju kada funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju prekid u tački $x = a$.

Primer 10.6. *Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2 \cdot x^2}$.

Rešenje: Za $x \in (0, 1]$ je zadovoljeno

$$0 \ge \sqrt[3]{x} + 2 \cdot x^2 > \sqrt[3]{x}\ ,$$

i odatle

$$0 \le \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2 \cdot x^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ .$$

Takođe znamo, na osnovu Primera 10.4, da nesvojstveni integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ konvergira, jer je $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, pa Teorema 10.2 implicira konvergenciju datog integrala.

Napomenimo još da se kombinacijom nesvojstvenih integrala prve i druge vrste dobijaju *nesvojstveni integrali treće vrste.* Kod takvih integrala jedna ili obe granice integracije nisu konačni brojevi, a podintegralna funkcija ima konačno mnogo prekida druge vrste na intervalu integracije. Imajući u vidu da se nesvojstveni integral treće vrste uvek može prikazati u obliku zbira nesvojstvenih integrala prve i druge vrste, u ispitivanju konvergencije nesvojstvenog integrala treće vrste mogu se primeniti sve teoreme o konvergenciji nesvojstvenih integrala prve, odnosno druge, vrste. Zbog toga nije neophodno posebno se baviti teorijom u vezi sa ovom grupom nesvojstvenih integrala.

11 Primena određenog integrala

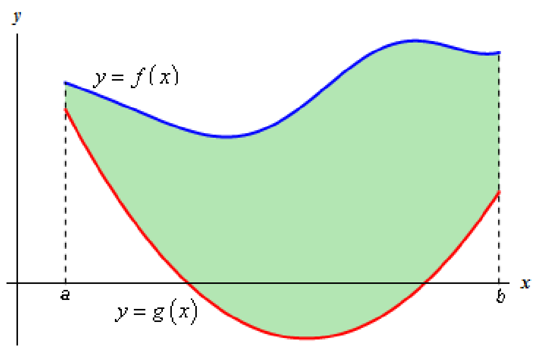
Određeni integral se može primeniti za izračunavanje različitih fizičkih veličina, kao i geometrijskih i drugih svojstava realnih objekata. Definicija određenog integrala obezbeđuje izračunavanje zbira beskonačno mnogo sabiraka koji odgovaraju vrednostima neprekidne funkcije na nekom intervalu. Uočićemo da se ova osnovna ideja "uklapa" u mnogo realnih situacija. U okviru Matematičke analize 2 ovu ideju ćemo na nekoliko načina uopštiti, i tako joj dati još širu primenu i još veći značaj.

U ovom odeljku opisaćemo samo tri osnovne primene određenog integrala: na izračunavanje površine ravnih likova, zapremine rotacionog tela i dužine luka krive u ravni. Nakon razumevanja osnovne ideje neće biti teško po potrebi primeniti je i u mnogim drugim situacijama.

11.1 Izračunavanje površine ravnog lika

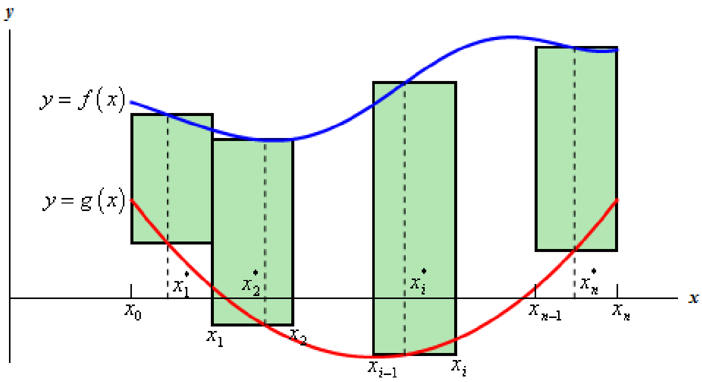
Već na samom početku priče o određenom integralu smo objasnili njegovu geometrijsku interpretaciju i time naveli i prvu primenu određenog integrala: za funkciju $y = f(x)$ za koju važi da je $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$ je površina između grafika funkcije f i x-ose, na intervalu $[a, b]$ jednaka vrednosti $\int_a^b f(x)dx$. Sada ćemo ovo tvrđenje uopštiti tako da možemo da izračunamo površinu oblasti u ravni koja se, na nekom intervalu, nalazi između dve krive (a ne obavezno između pozitivne krive i x-ose).

Posmatrajmo funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$ takve da je za $x \in [a, b]$ zadovoljeno $f(x) \geq g(x)$. Grafici ovih funkcija na posmatranom intervalu određuju zatvorenu oblast čiju površinu želimo da odredimo. Jedna takva oblast je prikazana na Slici 33.



Slika 33: Oblast određena graficima funkcija f i g na intervalu $[a, b]$ na kom je $f(x) \geq g(x)$. Želimo da odredimo površinu osenčene oblasti.

Da bismo odredili površinu označene oblasti između krivih, postupićemo kao i kada smo definisali određeni integral. Aproksimiraćemo površinu zbirom površina pravougaonika; interval $[a, b]$ ćemo podeliti na n delova (u ovom slučaju opredelićemo se da budu jednaki, mada to nije obavezno), a zatim ćemo u svakom podintervalu proizvoljno odrediti tačku $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Ovo je pikazano na Slici 34.



Slika 34: Oblast određena graficima funkcija f i g na intervalu $[a, b]$ na kom je $f(x) \geq g(x)$. Površina oblasti je aproksimirana površinom aproksimirajućih pravougaonika.

Sada je

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

što odgovara širini svakog od pravougaonika, dok je visina pravougaonika određena u tački x_i^* i jednaka je

$$f(x_i^*) - g(x_i^*).$$

Površina svakog od n pravougaonika je tada

$$(f(x_i^*) - g(x_i^*)) \cdot \triangle x_i$$

dok je aproksimacija površine oblasti između krivih

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \cdot \triangle x_i.$$

Posmatrajući graničnu vrednost izraza koji prepoznajemo kao integralnu sumu, kada širina intervala $\triangle x_i \to 0$ (odnosno, u ovom slučaju, kada $n \to \infty$), dobijamo

$$P = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \cdot \triangle x_i$$

a na osnovu definicije određenog integrala znamo da je ovim definisan određeni integral funkcije $f(x) - g(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Dakle, tražena površina P se može izračunati kao

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \; . \tag{10}$$

Nekoliko važnih napomena u vezi sa prethodnim rezultatom:

- Ukoliko je funkcija $g(x) = 0$ za $x \in [a, b]$, onda je oblast između krivih praktično oblast između krive f i x-ose, a formula (10) se svodi na već poznatu formulu $P = \int_a^b f(x)dx$. Ovim smo potvrdili da rezultat (10) predstavlja uopštenje geometrijske interpretacije određenog integrala.

- Ukoliko je $f(x) = 0$ za $x \in [a, b]$, onda je, jasno, $g(x) \leq 0$, odnosno, posmatrana oblast je ispod x-ose. Ovakva situacija je već pominjana u Odeljku 9.3 (Osobina 6, i u vezi sa njom Slika 31). Sada je jasno da se, korišćenjem formule (10), odgovarajuća površina izračunava kao $P = -\int_a^b g(x)dx$.

- Ukoliko za krive f i g na intervalu $[a, b]$ važi da je za neko $c \in [a, b]$ zadovoljeno da je $f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a, c]$ i da je $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [c, b]$, onda je površinu između ovih krivih na intervalu $[a, b]$ moguće izračunati kao

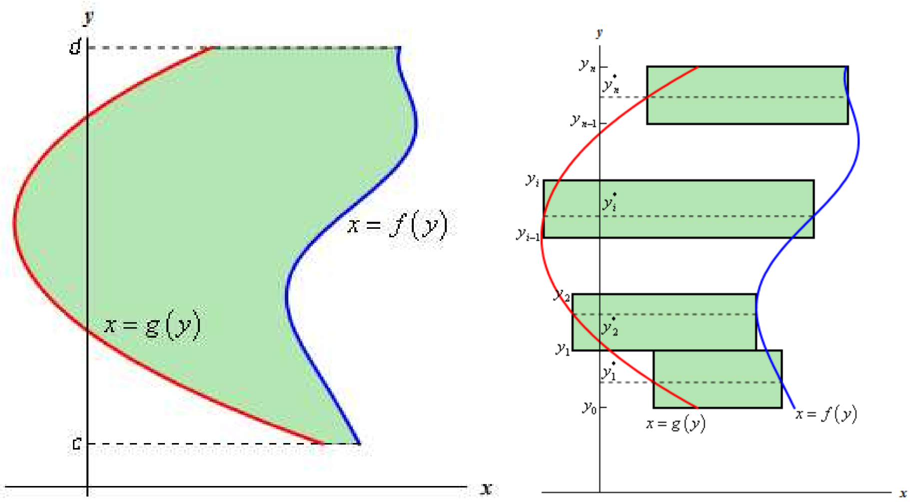
$$P = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

  Specijalno, površina između krive f i x-ose na intervalu $[a, b]$ na kom funkcija f menja znak, tj. za koju važi da je $f(x) < 0$ za $x \in [a, c]$ i $f(x) > 0$ za $x \in [c, b]$ (vidi Sliku 31, desno) se može izračunati kao

$$P = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

- Ukoliko se oblast čiju površinu želimo da izračunamo nalazi između krivih $x = f(y)$ i $x = g(y)$, pri čemu je na posmatranom intervalu $[c, d]$ zadovoljeno da je $f(y) \geq g(y)$, kao što je prikazano na Slici 35 (levo), onda se, potpuno analognim rezonovanjem (ilustrovanim na Slici 35 (desno)) kao pri izvođenju formule (10) dolazi do rezultata da je

$$P = \int_c^d (f(y) - g(y))dy\,.$$



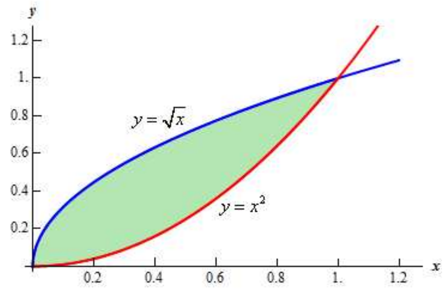
Slika 35: Oblast određena graficima funkcija f i g na intervalu $[c, d]$ na kom je $f(y) \geq g(y)$. Želimo da odredimo površinu osenčene oblasti (levo). Površinu aproksimiramo zbirom površina pravougaonika (desno).

- U opštem slučaju, oblast je uvek moguće posmatrati kao uniju dve ili više oblasti koje su, na nekim (pod)intervalima ograničene dvema krivama, od kojih je jedna kriva manja od druge na celom podintervalu. Nekad je dekompozicija pogodnija na oblasti ograničene "gornjom i donjom" krivom, a nekad je pogodnije posmatrati "levu i desnu" krivu.

U nastavku ćemo dati nekoliko ilustrativnih primera.

Primer 11.1. *Odrediti površinu određenu graficima krivih* $y(x) = x^2$ *i* $y(x) = \sqrt{x}$.

Rešenje: Oblast čiju površinu treba da odredimo prikazana je na Slici 36.



Slika 36: Oblast određena graficima funkcija $y(x) = x^2$ i $y(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 1]$.

Vidimo da je oblast ograničena odozgo krivom $y(x) = \sqrt{x}$, a odozdo krivom $y(x) = x^2$, na intervalu koji je određen tačkama preseka ovih krivih. Tačke preseka određujemo iz uslova

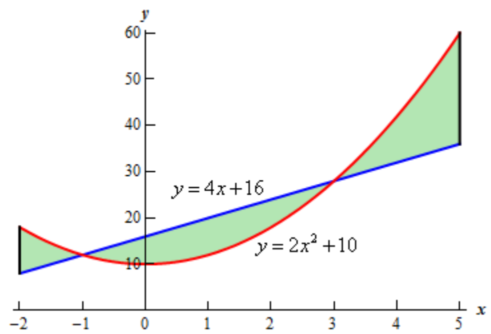
$$\sqrt{x} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x - x^4 = x(1 - x^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad (y_1 = 0), \qquad x_2 = 1 \quad (y_2 = 1)\,.$$

Konačno, tražena površina je

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}\,.$$

Primer 11.2. *Odrediti površinu određenu graficima krivih* $y(x) = 2x^2 + 10$, $y(x) = 4x + 16$, $x = -2$ *i* $x = 5$.

Rešenje: Grafički prikaz oblasti čiju površinu treba da odredimo je uvek od velike pomoći i dobro je da od njega počnemo kad god smo u mogućnosti. S obzirom na to da su krive koje ograničavaju oblast u ovom pimeru tri prave i jedna parabola, nije teško nacrtati oblast. Prikazali smo je na Slici 37.



Slika 37: Oblast određena graficima funkcija $y(x) = 2x^2 + 10$, $y(x) = 4x + 16$, $x = -2$ i $x = 5$.

Sa slike uočavamo da posmatrana oblast ne ispunjava uslov da je na posmatranom intervalu ispod jedne, a iznad druge krive, čiju razliku onda integralimo. U ovom slučaju moramo podeliti posmatranu oblast na tri dela da bismo postigli da navedeni uslov bude ispunjen na svakom od tri podintervala polaznog intervala. Podintervale ćemo odrediti na osnovu tačaka preseka krivih:

$$2x^2 + 10 = 4x + 16 \quad \Rightarrow \quad 2(x + 1)(x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3\,.$$

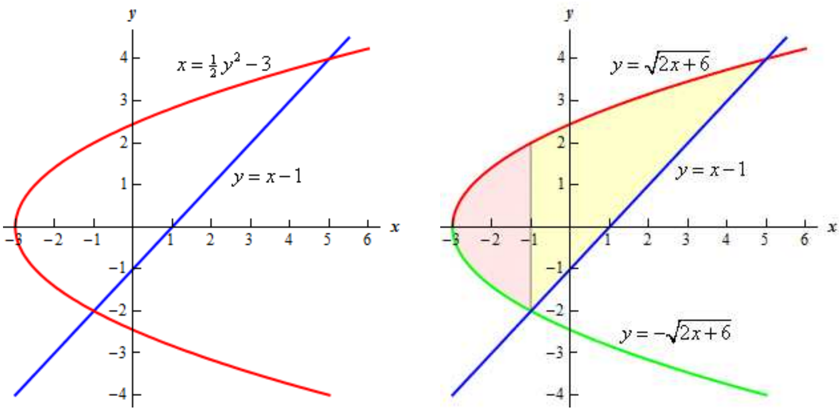
Podintervali integracije su, dakle $[-2,-1]$, $[-1,3]$, i $[3,5]$, a tražena površina se može izračunati kao:

$$\int_{-2}^{-1}(2x^2+10-(4x+16))dx+\int_{-1}^{3}(4x+16-(2x^2+10))dx+\int_{3}^{5}(2x^2+10-(4x+16))dx=\frac{142}{3}\,.$$

Primer 11.3. *Odrediti površinu određenu graficima krivih* $x(y)=\frac{1}{2}y^2-3$, *i* $y(x)=x-1$.

Rešenje: Uočavamo da je prva funkcija kvadratna funkcija po y, pa je njen grafik parabola sa horizontalnom osom simetrije. Presek sa y osom, kao i koordinate temena ove parabole određujemo na osnovu poznatih formula, u kojima je ulogu nezavisne promenljive x preuzela promenljiva y. Tako dobijamo da parabola ima teme u tački $(x,y)=(-3,0)$, a da y-osu seče u tačkama $y_1=\sqrt{6}$ i $y_2=-\sqrt{6}$.

Na Slici 38 (levo) su prikazani grafici datih funkcija i oblast koju ograničavaju.



Slika 38: Oblast određena graficima funkcija $x(y)=\frac{1}{2}y^2-3$, i $y(x)=x-1$ (levo). Ista oblast podeljena na dva dela pravom $x=-1$ (desno).

Posmatrana oblast nema osobinu da je na nekom intervalu x-ose cela ispod jedne, a iznad neke druge krive. Kao i u prethodnom primeru, oblast moramo podeliti na (bar) dve podoblasti. Uočavamo da podelom koja je prikazana na Slici 38 (desno) postižemo željenu situaciju. Tačke preseka datih krivih, a samim tim i tačan položaj vertikalne prave kojom smo izvršili podelu oblasti, dobijamo na osnovu:

$$\frac{1}{2}y^2-3=y+1 \quad\Rightarrow\quad (y-4)(y+2)=0 \quad y_1=4,\ (x_1=5), \qquad y_2=-2,\ (x_2=-1)\,.$$

Dakle, pravom $x=-1$ posmatrana oblast je podeljena na dve podoblasti. Prva se nalazi između krivih $y=\sqrt{2x+6}$ i $y=-\sqrt{2x+6}$, a druga između krivih $y=\sqrt{2x+6}$ i $y=x-1$. Ukupna površina date oblasti je sada

$$P=\int_{-3}^{-1}\left(\sqrt{2x+6}-(-\sqrt{2x+6})\right)dx+\int_{-1}^{5}(\sqrt{2x+6}-(x-1))dx=18.$$

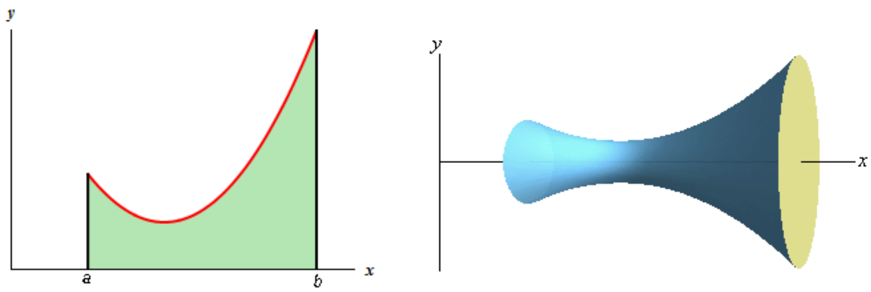
Ipak, ovaj zadatak smo mogli rešiti i jednostavnije, uočavajući da, iako polazna oblast nije ograničena jednom krivom odozgo i jednom krivom odozdo na čitavom posmatranom intervalu, ona je ograničena jednom krivom s leva, i jednom krivom sa desna, na čitavom posmatranom intervalu; u ovom slučaju to je interval $[-2,4]$ na y-osi. To znači da je traženu površinu moguće izračunati i kao:

$$P=\int_{-2}^{4}\left((y+1)-(\frac{1}{2}y^2-3)\right)dy=18.$$

S obzirom da u ovom slučaju nije bilo potrebno deliti oblast, i da je bio dovoljan jedan (jednostavan) integral za izračunavanje njene površine, ovaj postupak je jednostavniji i kraći.

11.2 Izračunavanje zapremine rotacionog tela

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $y = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$. Obrtanjem oko x-ose, kriva $y = f(x)$ opisuje površ koja sa ravnima $x = a$ i $x = b$ ograničava telo zapremine V. Ovo telo naziva se rotaciono telo, a osim rotacijom oko x-ose može nastati rotacijom krive oko y-ose, ili oko bilo koje horizontalne ili vertikalne prave, ili prave u opštem položaju. Naš cilj u okviru ovog odeljka je da izračunamo zapreminu nastalog tela, pri čemu ćemo se ograničiti na tela nastala rotacijom oko jedne od koordinatnih osa. Situacija je ilustrovana na Slici 39.



Slika 39: Grafik funkcije $y = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ rotira oko x-ose (levo). Pri tome nastaje (rotaciono) telo zapremine V (desno).

Postupak za izračunavanje zapremine tela izvodimo prateći istu ideju koju smo koristili i za izvođenje formule za izračunavanje površine. Prvi korak nam je da podelimo interval $[a, b]$ na podintervale tačkama

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

na n delova. Dužina svakog podintervala je $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, a ove dužine mogu, a ne moraju, biti jednake.

U svakoj tački x_i posmatrajmo ravan normalnu na x osu. Svaka od ravni seče posmatrano telo. Zapremina celog tela jednaka je zbiru zapremina delova tog tela koji se formiraju između uzastopnih ravni. Ako u svakom podintervalu intervala $[a, b]$ uočimo proizvoljnu tačku $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, onda se zapreminu svakog od (pod)tela formiranih između ravni $x = x_i$ može aproksimirati zapreminom valjka čija je osnova $B_i = B(x_i^*)$ krug sa poluprečnikom $f(x_i^*)$, a visina valjka je $\triangle x_i$:

$$V_i = (\text{“površina baze puta visina”}) = B(x_i^*) \cdot \triangle x_i.$$

Zbir ovih zapremina

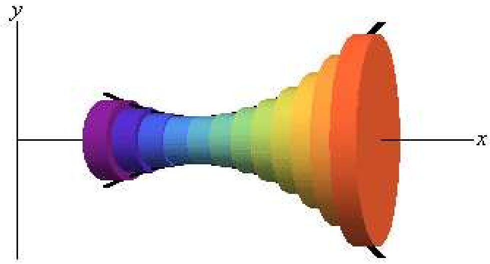
$$\sum_{i=1}^{n} B(x_i^*) \cdot \triangle x_i$$

predstavlja aproksimaciju polazne zapremine V. Ovo je ilustrovano na Slici 40.

Smanjenjem dužine podintervala, odnosno visine svakog valjka, aproksimacija zapremine postaje sve bolja, odnosno odstupanje definisanog zbira od prave vrednosti zapremine postaje sve manje. Granična vrednost sume, pri proizvoljnom izboru tačaka x_i^* i proizvoljnoj podeli intervala $[a, b]$, kada $\max \triangle x_i \to 0$ jednaka je zapremini V posmatranog tela:

$$V = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} B(x_i^*) \cdot \triangle x_i \;=\; \int_a^b B(x)\, dx\ .$$

Podintegralna funkcija $B(x)$ (za koju je prethodnim postupkom bila definisana integralna suma) je funkcija koja u svakoj tački $x \in [a, b]$ daje površinu osnove aproksimativnog valjka (odnosno površinu



Slika 40: Zapremina rotacionog tela aproksimirana zbirom zapremina odgovarajućih valjaka.

preseka tela sa ravni koja je u toj tački normalna na x-osu). Kako je posmatrano telo nastalo rotacijom krive $y = f(x)$, i svaka osnova uočenih valjaka je krug poluprečnika $f(x)$, jasno je da je

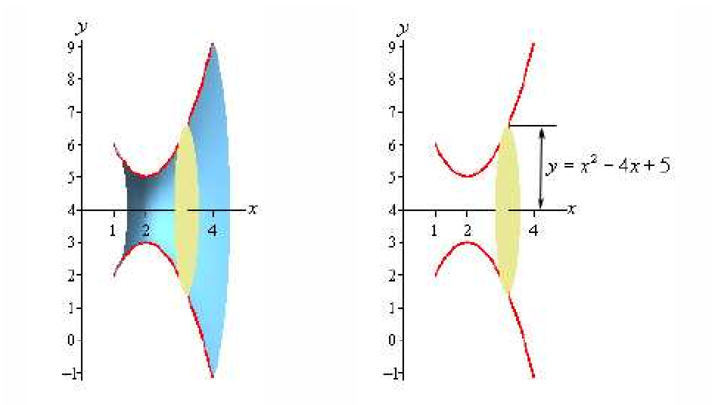
$$B(x) = (\text{“ } \pi \text{ puta kvadrat poluprečnika kruga za posmatrano } x\text{”}) = \pi f^2(x) ,$$

i da je konačno

$$V = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*))^2 \cdot \triangle x_i \; = \; \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \, . \tag{11}$$

Primer 11.4. *Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom parabole $y = x^2 - 4x + 5$ oko x ose, između ravni $x = 1$ i $x = 4$.*

Rešenje: Zapremina koju treba da izračunamo prikazana je na Slici 41.



Slika 41: Zapremina tela nastalog rotacijom parabole $y = x^2 - 4x + 5$ oko x ose, između ravni $x = 1$ i $x = 4$.

U ovom slučaju poluprečnik osnove valjka kojim se (po delovima) aproksimira zapremina je jednak vrednosti funkcije $y = x^2 - 4x + 5$, a sama površine osnove je

$$B(x) = \pi(x^2 - 4x + 5)^2 = \pi(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25) \, .$$

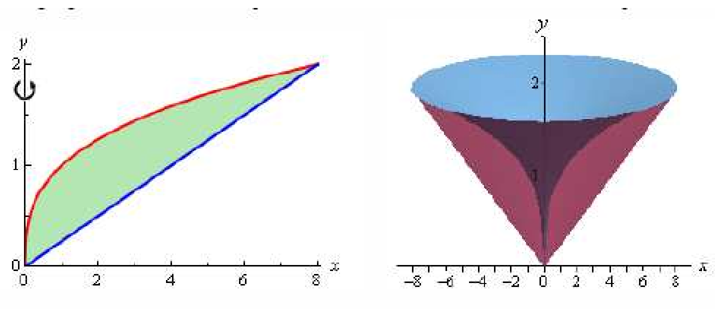
Tada je, na osnovu formule (11),

$$V = \pi \int_1^4 y^2(x) dx = \pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25) dx = \frac{78\pi}{5} \, .$$

Sledećim primerom ćemo ilustrovati mogućnost da izračunamo zapreminu tela nastalog rotacijom krive oko y-ose, kao i mogućnost da odredimo zapreminu tela koje je (delom) "šuplje" - ovakvo telo možemo opisati kao razliku dva "puna" tela.

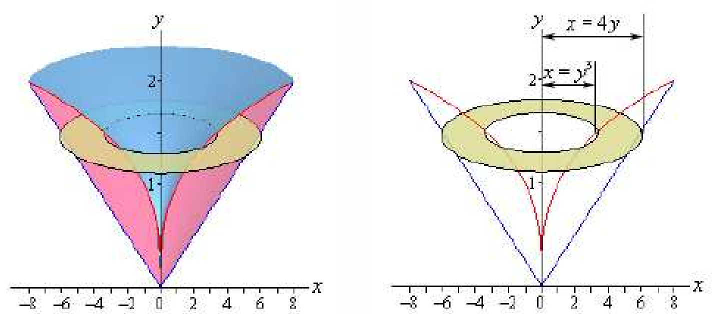
Primer 11.5. *Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko y-ose oblasti određene krivama $y = \sqrt[3]{x}$ i $y = \dfrac{x}{4}$ u prvom kvadrantu.*

Rešenje: Oblast čijom rotacijom oko y-ose nastaje posmatrano telo grafički je prikazana na Slici 42. Na istoj slici je skicirano i samo telo.



Slika 42: Oblast određena krivama $y = \sqrt[3]{x}$ i $y = \dfrac{x}{4}$ u prvom kvadrantu (levo). Telo nastalo rotacijom ove oblasti (desno).

Ukoliko primenimo istu ideju kao i do sada, uočavamo da je sada prirodno da telo "sečemo" ravnima koje su normalne na y-osu. Takođe, u preseku sa ovim ravnima dobijaju se kružni prsteni, jer je telo "šuplje". U stvari, zapremina ovog tela se može izračunati kao razlika dva tela: onog koje nastaje rotacijom "spoljašnje" krive, i onog koje nastaje rotacijom "unutrašnje" krive; ovo poslednje je upravo šupljina čiju zapreminu treba oduzeti. Situacija je ilustrovana na Slici 43.



Slika 43: Presek posmatranog tela sa ravni koja je normalna na y-osu. U preseku se dobija kružni prsten (levo). Poluprečnici osnova "spoljašnjeg" tela i šupljine određeni su vrednostima funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ i $y = \dfrac{x}{4}$ (desno).

Biće nam potrebne funkcije oblika $x = x(y)$, s obzirom da posmatramo rotaciju oko y-ose. Za date krive, to su

$$x = f_1(y) = y^3 \quad \text{i} \quad x = f_2(y) = 4y\ .$$

Presečne tačke ovih krivih su:

$$y^3 = 4y \quad \Rightarrow \quad y(y^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = -2\ ,$$

pri čemu $y_3 = -2$ nije u prvom kvadrantu u kom je oblast koju posmatramo. Uočavamo da je spoljašnja površ koja određuje telo nastala rotacijom krive $x = f_2(y) = 4y$, a unutrašnja (površ koja određuje šupljinu) je nastala rotacijom krive $x = f_1(y) = y^3$.

Zapremina koju računamo je sada

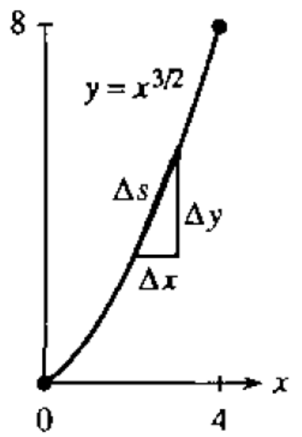
$$V = \pi \int_0^2 (f_2(y))^2 dy - \pi \int_0^2 (f_1(y))^2 dy = \pi \int_0^2 \left((4y)^2 - (y^3)^2\right) dy = \pi \int_0^2 \left(16y^2 - y^6\right) dy = \frac{512\pi}{21} .$$

11.3 Izračunavanje dužine luka (ravne) krive

Postupak za izračunavanje dužine luka (ravne, glatke) krive u ravni zasniva se na ideji da se, ako luk krive podelimo na dovoljno male delove, svaki taj deo luka može aproksimirati segmentom prave, a dužina takvog segmenta se lako može izračunati. Ukoliko podelu luka na delove pravimo tako da posmatrani segmenti budu sve manji, aproksimacija dužine luka zbirom dužina duži će biti sve bolja, odnosno greška će biti sve manja. U graničnom slučaju, limes ovog zbira kada dužina svakog (i najdužeg) segmenta teži nuli, daće tačnu vrednost dužine luka posmatrane krive.

Već u ovom trenutku je jasno da se ovaj postupak ne razlikuje od postupka za izračunavanje površine oblasti u ravni, ili zapremine rotacionog tela, odnosno od definicije određenog integrala; tačnije, jedina razlika je u tome šta sabiramo (tj. za koju funkciju formiramo integralne sume). Sve ostalo jasno ukazuje da ćemo i u ovom slučaju za izračunavanje posmatrane veličine (dužine luka krive) primeniti određeni integral odgovarajuće funkcije.

Ilustracija aproksimacije dela luka krive pomoću duži prikazana je na Slici 44. Posmatran je grafik funkcije $y = f(x)$ (u ovom konkretnom slučaju $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$) na intervalu $[a, b]$ (u ovom konkretnom slučaju $[0, 4]$) i ilustrovana je ideja da se segment luka krive $\triangle s$, koji je određen tačkama (x, y) i $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ približno izračuna (korišćenjem Pitagorine teoreme) kao $\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$. Mada krivolinijski segment nije uvek toliko "prav" kao što je slučaj sa prikazanom funkcijom, ukoliko su vrednosti $\triangle x$ i $\triangle y$ dovoljno male (odnosno, deo luka dovoljno kratak), aproksimacija je dovoljno dobra.



Slika 44: Segment $\triangle s$ luka krive $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ može se aproksimirati segmentom prave linije.

Opisanu ideju ćemo u nastavku malo preciznije formulisati.

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $y = f(x)$ i pretpostavimo da je njen prvi izvod, $f'(x)$, neprekidna funkcija nad intervalom $[a, b]$ (za takvu krivu kažemo da je *glatka*). Podelimo luk krive $y = f(x)$, između tačaka $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$, tačkama

$$A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B .$$

Tačke M_i pripadaju luku posmatrane krive i formiraju izlomljenu (mnogougaonu) liniju čija dužina aproksimira dužinu luka krive $\hat{AB}$. Koordinate tačaka M_i su $(x_i, f(x_i))$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka je $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ i $\triangle y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Tada je

$$\begin{aligned} M_{i-1}M_i &= \triangle s_i \\ &= \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}\right)^2} \cdot \triangle x_i \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \triangle x_i \,. \end{aligned}$$

Kako su, po pretpostavci, funkcije $f(x)$ i $f'(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, sledi da su one neprekidne nad svakim intervalom $[x_{i-1}, x_i]$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada, prema Teoremi o srednjoj vrednosti (Lagranžova teorema), postoji tačka x_i^*, takva da je $x_{i-1} < x_i^* < x_i$, za koju važi da je

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x_i^*) \,,$$

pa je

$$\triangle s_i = \sqrt{1 + f'^2(x_i^*)} \cdot \triangle x_i \,.$$

Dužina luka $\hat{AB}$ krive definiše se kao granična vrednost dužina upisane izlomljene linije $M_0M_1M_2 \ldots M_n$, kada $\max \triangle s_i$ teži nuli. Ako se sa s obeleži dužina luka, tada je

$$s = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \triangle s_i = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_i^*)} \cdot \triangle x_i \,. \tag{12}$$

Zbir $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_i^*)} \cdot \triangle x_i$ je integralna suma neprekidne funkcije $\sqrt{1 + f'^2(x)}$. a posmatrana granična vrednost uvek postoji, nezavisna od izbora tačke x_i^* i načina podele tačkama $M_0, M_1, \ldots, M_n$. To znači da se može pisati

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \,. \tag{13}$$

Primer 11.6. *Izračunati dužinu luka krive $y = x^{\frac{3}{2}}$, od tačke $A(0, 0)$ do tačke $B(4, 8)$.*

Rešenje: Ovo je pitanje koje je ilustrovano na Slici 44. Koristeći formulu (13) dobijamo:

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{9x + 4}\, dx \,.$$

Uvodeći smenu

$$\sqrt{9x + 4} = t, \quad \Rightarrow \quad 9x + 4 = t^2, \quad 9\, dx = 2t\, dt \quad ,$$

dobijamo

$$s = \frac{1}{9} \cdot \int_2^{\sqrt{40}} t^2\, dt = \frac{t^3}{27} \Big|_2^{\sqrt{40}} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 9.07 \,.$$

Primer 11.7. *Izračunati dužinu luka jedinične centralne kružnice.*

Rešenje: Jednačina krive koju posmatramo je

$$x^2 + y^2 = 1 ,$$

što odgovara dvema funkcijama u eksplicitnom obliku:

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{i} \qquad y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} .$$

Grafici ovih funkcija su, redom, gornja i donja jedinična centralna polukružnica. Dužinu svakog od lukova u opštem slučaju računamo nezavisno (posebno), ali u ovom slučaju koristimo simetriju, odnosno činjenicu da su dužina donje i gornje polukružnice jednake. Možemo uočiti i da je dužina polukružnice jednaka dvostrukoj dužini četvrtine kružnice u prvom kvadrantu (za koju $x \in [0, 1]$). S obzirom da je

$$y' = (f_1(x))' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

dobijamo da je

$$s = 4\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\, dx \;=\; 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 4 \arcsin x \Big|_0^1 = 2\pi .$$

Ovo je, naravno, rezultat koji smo očekivali. Treba uočiti, međutim, da situacija kada treba da izračunamo deo luka zatvorene krive dovodi (često) do potrebe da rastavljamo problem na dva dela, jer luk nije grafik funkcije (već više funkcija). Ovo ponekad komplikuje rešavanje. Mogućnost da problem izbegnemo pruža korišćenje parametarskih jednačina krive, i odgovarajuće formule za dužinu luka.

Ukoliko je kriva zadata u parametarskom obliku,

$$x = x(t) , \qquad y = y(t) , \qquad \text{za} \quad t \in [t_0, t_1],$$

gde su x'_t i y'_t neprekidne funkcije, i $x'_t > 0$, za $t \in [t_0, t_1]$, dužina luka te krive između tačaka $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$, koje se dobijaju za vrednosti parametra $t = t_0$, odnosno $t = t_1$ može se izračunati polazeći od formule (13).

Kako je $y'(x) = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ i uz to $dx = x'_t(t)dt$, uvrštavanjem u formulu (13) dobijamo

$$s \;=\; \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\left(\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}\right)^2} \cdot x'_t(t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_t(t))^2}\, dt . \tag{14}$$

Primer 11.8. *Koristeći parametarske jednačine, izračunati dužinu luka jedinične centralne kružnice.*

Rešenje: Parametarske jednačine jedinične centralne kružnice su

$$x(t) = \cos t , \qquad y(t) = \sin t , \qquad t \in [0, 2\pi] .$$

Iako ovakav zapis omogućava da integralimo po čitavoj dužini luka (zatvorene) krive, bez potrebe da delimo kružnicu na donju i gornju polukružnicu, i ovde možemo koristiti osobinu simetrije. To znači da možemo posmatrati četvrtinu kružnice u prvom kvadrantu, što odgovara promeni parametra t duž intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Konačno, koristeći formulu (14), dobijamo da je

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_t(t))^2}\, dt \;=\; 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi .$$

12 Funkcije više promenljivih

Sva pitanja kojima smo se do sada bavili u vezi sa funkcijama odnosila su se na funkcije $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, odnosno funkcije koje, na osnovu nekog zadatog pravila preslikavanja $y = f(x)$ jednom realnom broju pridružuju neki drugi realan broj. Ovakve funkcije se zovu *skalarne funkcije jedne (realne) promenjive.*

Preslikavanja možemo posmatrati i u slučajevima kada je broj nezavisnih promenljivih (ulaznih veličina) veći od jedan, a takođe i kada je broj zavisnih promenljivih (izlaznih veličina) veći od jedan. U najopštijem slučaju, dakle, možemo posmatrati funkcije oblika

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \, , \qquad m, n \in \mathbb{N} \, .$$

Kada je $m = 1$, govorimo o *skalarnim funkcijama*, a kada je $m > 1$ govorimo o *vektorskim funkcijama.* Vektorskim funkcijama ćemo se malo više baviti u okviru kursa Matematičke analize 2, a sada ćemo ostati u domenu skalarnih funkcija. Međutim, umesto da posmatramo situaciju kada je $n = 1$, što odgovara funkcijama jedne promenljive, dozvolićemo vrednosti $n > 1$ i uvesti pojam funkcija više promenljivih. Dakle, posmatraćemo preslikavanja

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \, ,$$

za koja će pravilo preslikavanja biti oblika

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, , \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, , \quad y \in \mathbb{R}.$$

U vezi sa ovakvim funkcijama interesantna su ista pitanja kao i kada je reč o funkcijama jedne promenljive: pitanje domena, graničnih vrednosti, neprekidnosti, izvoda, integrala. Uočićemo da, uopštavanjem pojmova, neki od njih postaju značajno složeniji, kao što je, recimo, slučaj sa pojmom granične vrednosti funkcija više promenljivih. Takođe, uopštavanja se ponekad mogu vršiti na različite načine, pa uopštavanjem jednog pojma definisanog za funkcije jedne promenljive možemo dobiti niz različitih pojmova koji se odnose na funkcije više promenljivih. Primer je pojam određenog integrala, koji ćemo uopštiti na nekoliko različitih načina u okviru kursa Matematičke analize 2.

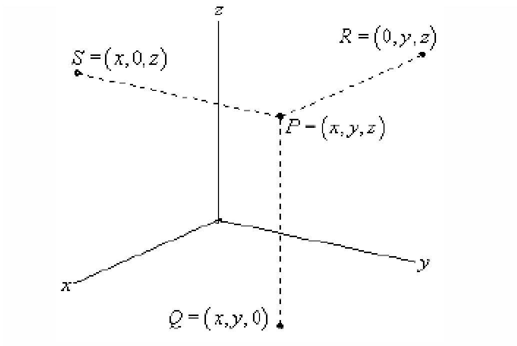
Uverićemo se, takođe, da često ne postoji suštinska razlika među funkcijama i odgovarajućim definisanim pojmovima u zavisnosti od toga koliko je n, ukoliko je veće od 1. Drugim rečima, esencijalni korak pri uopštavanjima pravimo prelazeći sa funkcija jedne promenljive na funkcije dve promenljive; dalje povećavanje broja promenljivih često ne donosi ništa novo. S obzirom na poslednje navedeno zapažanje, u nastavku ćemo se najviše baviti funkcijama dve i, u izuzetnim slučajevima, tri promenljive (dakle posmatraćemo slučajeve kada je $n = 2$ i kada je $n = 3$). Dodatni motiv za ovo ograničenje je i to što se funkcije sa više od dve promenljive ne mogu grafički predstaviti. Interpretacija funkcija tri promenljive je često takva da se uzima da je jedna od nezavisnih promeljivih vreme, pa se prati promena nekih funkcionalnih zavisnosti (fizičkih veličina i sl.) u 3D prostoru tokom nekog vremenskog intervala.

U okviru velikog broja tema koje se odnose na funkcije više promenljivih odabraćemo samo jedan mali broj kojim ćemo se ovde pozabaviti. Nakon navođenja nekih osnovnih pojmova o trodimenzionalnom (euklidskom) prostoru, i nekih osnovnih primera funkcija više promeljnivih, uvešćemo pojam parcijalnih izvoda i totalnog diferencijala funkcija više promenljivih. Nakon toga ćemo naučiti još samo kako da odredimo lokalne ekstremne vrednosti ovih funkcija. Značajan broj preostalih tema ćemo detaljnije proučiti u okviru Matematičke analize 2.

12.1 Osnovni pojmovi - 3D prostor, neke osnovne funkcije dve promenljive

Grafik funkcije $y = f(x)$ je skup tačaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koje zadovoljavaju dato pravilo preslikavanja. To znači da smo grafik funkcije jedne promenljive predstavljali u dvodimenzionalnom (pravouglom, Dekartovom) koordinatnom sistemu. Ovaj sistem određen je dvema uzajamno ortogonalnim koordinatnim osama.

Grafik funkcije $z = f(x, y)$ je, analogno, skup tačaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju dato pravilo preslikavanja. Grafik funkcije dve nezavisne realne promenljive naziva se površ i prikazuje se u trodimenzionalnom (3D) pravouglom koordinatnom sistemu. Ovakav koordinatni sistem, sa tri uzajamno ortogonalne koordinatne ose, prikazan je na Slici 45.



Slika 45:

Tačka $P(x, y, z)$ je proizvoljna tačka 3D prostora, a x, y, z su njene koordinate i odgovaraju, redom, projekcijama tačke P na koordinatne ose x, y i z. Takođe, tačke Q, S, i R su, redom, projekcije tačke P na koordinatne ravni xy, xz i yz. Uočimo da sve tačke xy-ravni imaju koordinate oblika $(x, y, 0)$, da sve tačke xz-ravni imaju koordinate oblika $(x, 0, z)$, i da sve tačke yz-ravni imaju koordinate oblika $(0, y, z)$. Karakteristika tačaka x-ose je da su oblika $(x, 0, 0)$, tačke y-ose su oblika $(0, y, 0)$, a tačke z-ose su oblika $(0, 0, z)$. Koordinatni početak se uobičajeno obeležava sa $O(0, 0, 0)$.

Rastojanje između tačaka $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ računa se pomoću formule

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Prikazaćemo grafički neke skupove tačaka. Naglašavamo da nismo u mogućnosti da predstavimo prostor $\mathbb{R}^n$ za $n > 3$, pa će se, u skladu sa tim, i naši naredni primeri odnositi na jedno-, dvo- i trodimenzionalne prostore.

Primer 12.1. *Prikazati grafički skup tačaka koji zadovoljava uslov $x = 3$, u $\mathbb{R}$, u $\mathbb{R}^2$ i u $\mathbb{R}^3$.*

Rešenje: Kao što ćemo se upravo uveriti, grafički prikazi skupova tačaka koji zadovoljavaju navedeni uslov $x = 3$ se značajno razlikuju u zavisnosti od toga u kom prosturu ih posmatramo.

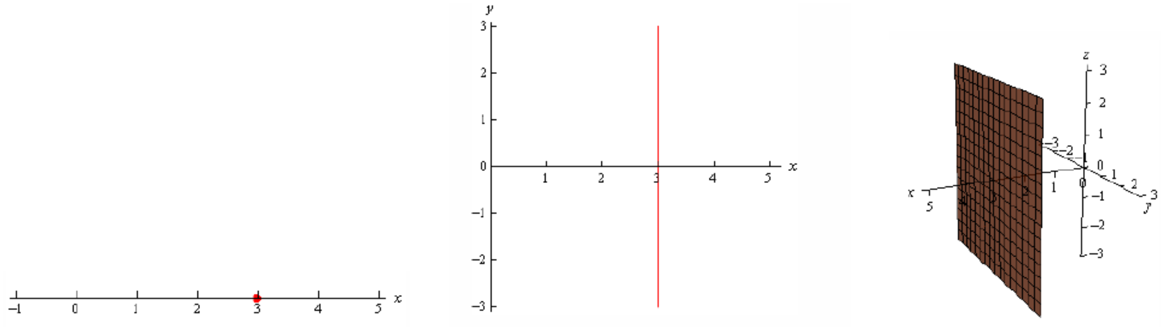
U $\mathbb{R}$ traženi skup sadrži samo jednu tačku, kao što je prikazano na Slici 46(levo).

U prostoru $\mathbb{R}^2$ traženi skup tačaka ima koordinate oblika $(3, y)$ i obrazuje pravu normalnu na x-osu, kao što je prikazano na Slici 46(sredina).

Konačno, u prostoru $\mathbb{R}^3$ datom jednačinom je određena ravan paralelna sa yz-ravni, kao što je prikazano na Slici 46(desno). Ove tačke imaju koordinate oblika $(3, y, z)$, odnosno proizvoljnu vrednost druge i treće koordinate. Na taj način opisuju prikazanu ravan.

Primer 12.2. *Prikazati grafički skup tačaka koji zadovoljava uslov $x^2 + y^2 = 4$, u $\mathbb{R}^2$ i u $\mathbb{R}^3$.*

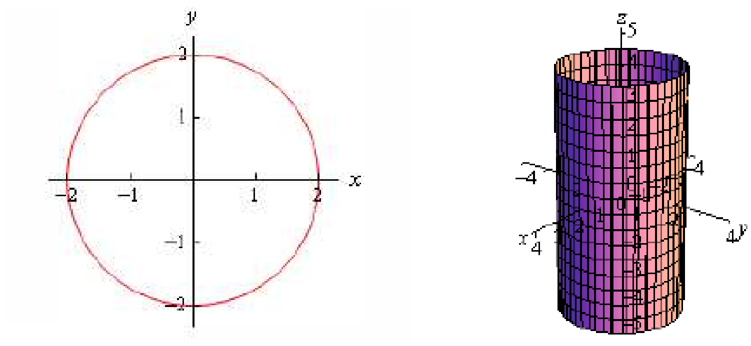
Rešenje: Ovim primerom samo još jednom naglašavamo ono što smo prikazali prethodnim primerom. Ovde ujedno možemo uočiti i da traženi skup tačaka, definisan uslovom koji uključuje dve promenljive, ne možemo prikazati u $\mathbb{R}$.



Slika 46: Skup tačaka koji zadovoljava jednačinu $x = 3$ u $\mathbb{R}$ (levo); u $\mathbb{R}^2$ (sredina); u $\mathbb{R}^3$ (desno).

Skup koji u $\mathbb{R}^2$ zadovoljava uslov $x^2 + y^2 = 4$ predstavlja centralnu kružnicu poluprečnika 2. Ovo je prikazano na Slici 47(levo).

Za tačke prostora $\mathbb{R}^3$ koje ispunjavaju navedeni uslov karakteristično je da njihova z-koordinata može imati proizvoljnu vrednost (nikakva ograničenja nisu postavljena). To dovodi do zaključka da tražene tačke pripadaju površi koja u preseku sa (svim) ravnima normalnim na z-osu generiše koncentrične kružnice poluprečnika 2. Ovaj "stek" kružnica formira cilindričnu površ prikazanu na Slici 47(desno).



Slika 47: Skup tačaka koji zadovoljava jednačinu $x^2 + y^2 = 4$ u $\mathbb{R}^2$ (levo); u $\mathbb{R}^3$ (desno).

Napomenimo još i da iz prethodnog ne treba zaključiti da u prostoru $\mathbb{R}^3$ ne možemo definisati kružnicu (ili neku drugu krivu), već samo površi. Na primer, skup tačaka koji u $\mathbb{R}^3$ zadovoljava uslove $x^2 + y^2 = 4$ i $z = 5$ je kružnica sa centrom na z-osi (u tački $(0, 0, 5)$), poluprečnika 2.

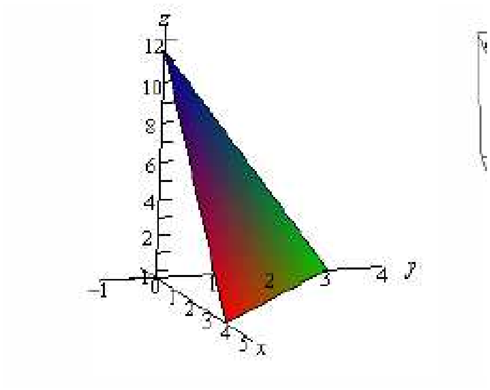
U nastavku ćemo navesti jednačine nekih površi koje se veoma često pojavljuju u praksi i sa kojima ćemo se često sretati. Prikazaćemo ih grafički. Naglašavamo da je crtanje grafika funkcija dve promenljive daleko složeniji postupak nego onaj koji koristimo za crtanje grafika funkcija jedne promenljive (a uz to grafike funkcija sa više od dve promenljive uopšte ne možemo da predstavimo). Zbog toga praktično nikad nećemo ni pokušavati da grafički predstavimo neku opštu funkciju dve promenljive; uglavnom ćemo se, bar kad je o graficima reč, zadovoljiti korišćenjem manjeg skupa "poznatih" površi (grafika). Ovu grupu čine tzv. *površi drugog reda*, i to samo jedan uži izbor ovih površi. Prikazaćemo ih u nastavku.

Napomenimo još samo da je opšti oblik površi drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \,, \tag{15}$$

pri čemu su A, B, C, D, E, F, G, H, I, J konstante. Za razne vrednosti konstanti dobijaju se različiti tipovi površi.

Ravan: Prva površ koju navodimo nije u pravom smislu površ drugog reda, jer se dobija (samo) kada su svi koeficijenti uz nelinearne članove u jednačini (15) jednaki nuli. Dakle, opšta jednačina ravni je $ax + by + cz + d = 0$, pri čemu je $\vec{n} = (a, b, c)$ vektor normale na tu ravan. Segmentni oblik jednačine ravni, $\frac{x}{l} + \frac{y}{p} + \frac{z}{q} = 1$ omogućava direktno "čitanje" koordinata tačaka preseka ravni sa koordinatnim osama: tačke $(l, 0, 0)$, $(0, p, 0)$ i $(0, 0, q)$ su, redom, tačke preseka ravni sa x-, y-, i z-osom. Primer je prikazan na Slici 48. Ravan je data jednačinom $z = 12 - 3x - 4y$. Segmentni oblik, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$, pokazuje da su tačke preseka ravni i koordinatnih osa, redom, $(4, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ i $(0, 0, 12)$.



Slika 48: Grafik funkcije $z = 12 - 3x - 4y$; ovo je jednačina ravni.

Nivo linije površi: Jedan od načina da steknemo neku ideju o tome kako površ izgleda je da posmatramo njene *nivo-linije*. Dobijamo ih kada fiksiramo vrednosti funkcije z, odnosno posmatramo krive oblika

$$F(x, y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}\ .$$

Na ovaj način generišemo familiju krivih koje predstavljaju preseke posmatrane površi sa horizontalnim ravnima $z = C$. "Stek" ovih krivih predstavlja posmatranu površ. Za $z = 0$, specijalno, dobijamo presek površi xy-ravni.

Primer je prikazan na Slici 49, gde su naznačene nivo-linije površi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na levoj strani Slike 49 nivo linije su prikazane u 3D prostoru, a na desnoj strani su nivo-linije prikazane kao krive u xy-ravni; tačnije, prikazane su projekcije nivo-linija na xy-ravan. Uz malo dodatne analize (u opštem slučaju, posmatranjem projekcija površi na preostale dve koordinatne ravni, odnosno fiksiranjem vrednosti promenljivih $x = 0$ i $y = 0$, i/ili posmatranjem nivo linija za koje je $x = C$ ili $y = C$), možemo formirati kompletnu sliku o datoj površi. U ovom slučaju nije teško zaključiti da je posmatrana površ konus.

Paraboloid: Opšti oblik jednačine paraboloida je

$$z - c = A(x - a)^2 + B(y - b)^2\ , \qquad \text{za } A \cdot B > 0.$$

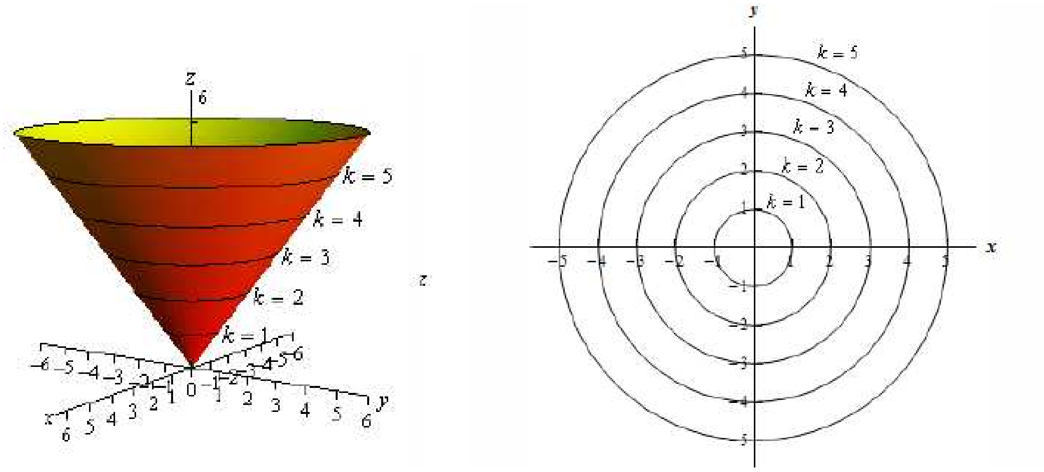
Ovako je prikazan paraboloid sa osom koja je paralelna z-osi i prodire xy-ravan u tački $(a, b, 0)$. U zavisnosti od vrednosti koeficijenata, paraboloid može biti eliptičan ili kružni (što je određeno oblikom nivo-linija), sa temenom u tački (a, b, c) koje je lokalni minimum ili lokalni maksimum. Neki primeri su dati na Slici 50. Zamenom uloga promenljivih dobijaju se paraboloidi čije su ose paralelne sa bilo kojom od koordinatnih osa.

Konus: Jednačina (dvostranog) konusa (sa osom paralelnom z-osi) je karakterističnog oblika

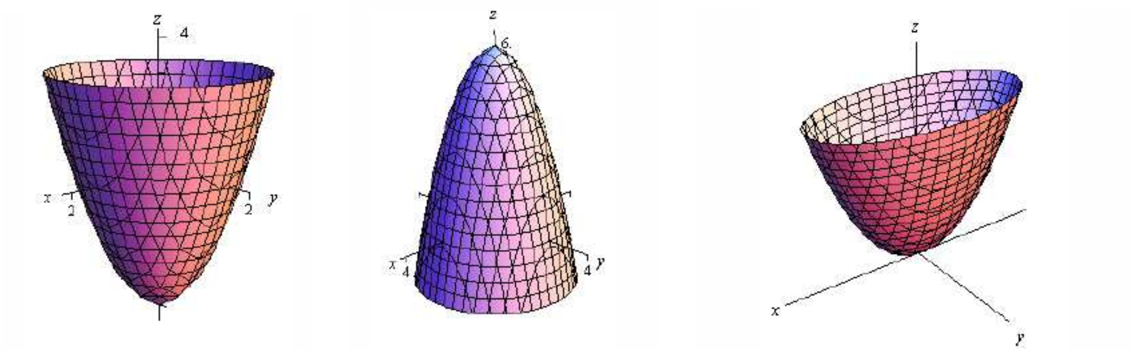
$$(z - c)^2 = A^2(x - a)^2 + B^2(y - b)^2\ ,$$

odakle se dobijaju jednačine

$$z = c + \sqrt{A(x - a)^2 + B(y - b)^2} \qquad \text{i} \qquad z = c - \sqrt{A(x - a)^2 + B(y - b)^2}\ .$$



Slika 49: Nivo-linije površi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ prikazane u 3D prostoru (levo) i njihove projekcije u xy-ravni (desno).



Slika 50: Grafik funkcije $z = 2x^2 + 2y^2 - 4$; ovo je jednačina kružnog paraboloida čije je teme lokalni minimum. Jednačina $z = -x^2 - 2y^2 + 6$ odgovara kružnom paraboloidu koji je otvoren nadole. Jednačina $z = A^2\,x^2 + B^2\,y^2$ je opšta jednačina eliptičnog paraboloida sa temenom (minimumom) u koordinatnom početku.

Vrh konusa je tačka (a, b, c). Nivo-linije konusne površi mogu biti kružnice ($A = B$) ili elipse ($A \neq B$). Primer dvostranog konusa sa temenom u koordinatnom početku je prikazan na Slici 51(levo).

Cilindar: Jednačina cilindrične površi se prepoznaje po odsustvu jedne promenljive: opšti oblik joj je

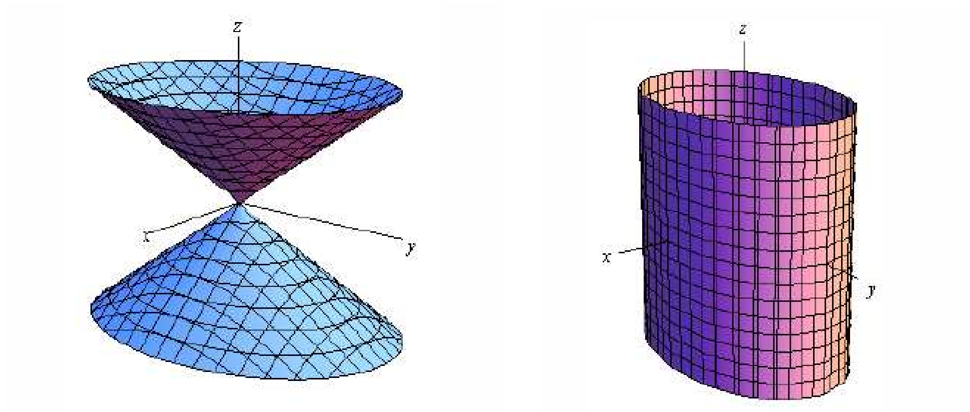
$$A^2(x-a)^2 + B^2(y-b)^2 = C^2\,.$$

Osa ove cilindrične površi je paralelna sa z-osom i prodire xy-ravan u tački $(a, b, 0)$. Zamenom uloga promenljivih mogu se generisati cilindri čije su ose paralelne drugim koordinatnim osama. Ovo je eliptična cilindrična površ ako je $A \neq B$ (nivo-linije su elipse). Kružni cilindar se dobija za $A = B$ (nivo-linije su kružnice). Primer eliptičnog cilindra čija je osa z-osa je prikazan na Slici 51(desno).

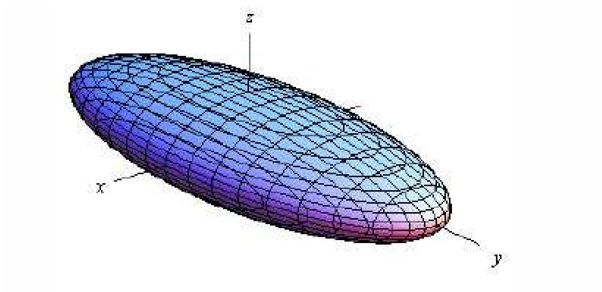
Elipsoid: Opšti oblik jednačine elipsoida je

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1\,.$$

Centar ovog elipsoida je u tački (a, b, c), a poluose (odsečci koje formira na koordinatnim osama) su mu A, B, i C. Ukoliko je $A = B = C$, jednačina odgovara sferi poluprečika A. Primer elipsoida sa centrom u koordinatnom početku prikazan je na Slici 52.



Slika 51: Konusna površ kojoj odgovara jednačina $z^2 = A^2\, x^2 + B^2\, y^2$ (levo). Cilindrična površ data jednačinom $r^2 = A^2\, x^2 + B^2\, y^2$ (desno).



Slika 52: Elipsoid sa centrom u koordinatnom početku i poluosama A, B, i C, dat je jednačinom $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} + \dfrac{z^2}{C^2} = 1$.

12.2 Oblast definisanosti, granična vrednost i neprekidnost funkcija više promenljivih

12.3 Parcijalni izvodi i totalni diferencijal

12.4 Geometrijska interpretacija - Tangentna ravan i normala na površ

12.5 Ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih

Uopštićemo postupak određivanja lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije jedne promenljive tako da ga možemo primeniti na funkcije više promenljivih. Pre svega, definisaćemo šta podrazumevamo pod pojmom *lokalnog ekstrema.* Definicije i tvrđenja ćemo formulisati za funkcije dve promenljve; uopštenja na slučaj tri i više promenljivih su direktna (osim ako nije drugačije naglašeno).

Definicija 12.1. *Funkcija $z = f(x, y)$, definisana u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ ima u tački $(x_0, y_0) \in D$ lokalni ekstrem ako je u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) priraštaj funkcije $\triangle z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ stalnog znaka. Pri tome*

- *Ukoliko je $\triangle z < 0$ za sve (x, y) iz uočene okoline, onda je (x_0, y_0) tačka lokalnog maksimuma funkcije f;*

- *Ukoliko je $\triangle z > 0$ za sve (x, y) iz uočene okoline, onda je (x_0, y_0) tačka lokalnog minimuma funkcije f.*

Ako je $\triangle z = f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$, tj. kada je $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ za sve tačke iz posmatrane okoline, jasno je da funkcija u tački (x_0, y_0) postiže (lokalno) najveću vrednost. Analogno, ako je $\triangle z = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$, znači da je $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, odnosno da funkcija u tački (x_0, y_0) postiže (lokalno) najmanju vrednost.

Dalje, u vezi sa ispitivanjem ekstremnih vrednosti funkcije, i kod funkcija više promenljivih su nam, kao i kod funkcija jedne promenljive, značajne *stacionarne* tačke funkcije.

Definicija 12.2. *Tačka (x_0, y_0) je stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$ ukoliko je zadovoljeno da je*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \; .$$

Dalje, navodimo (bez dokaza) *potreban* uslov da funkcija $z = f(x, y)$ ima u tački (x_0, y_0) lokalni ekstrem:

Teorema 12.1. (Potreban uslov za postojanje ekstrema) *Ako je tačka (x_0, y_0) ekstremna tačka funkcije $z = f(x, y)$, onda je (x_0, y_0) stacionarna tačka te funkcije.*

Na osnovu navedenog tvrđenja znamo da tačka koja nije stacionarna ne može da bude ni ekstremna za posmatranu funkciju. Zaključujemo da je prvi korak u određivanju ekstremnih vrednosti funkcije određivanje skupa njenih stacionarnih tačaka; ukoliko funkcija ima ekstreme, oni se mogu nalaziti samo u skupu stacionarnih tačaka.

Navedeni uslov je, kao što je i naglašeno, potreban. Da nije dovoljan ilustruje sledeći primer.

Primer 12.3. *Odrediti stacionarne tačke funkcije $f(x, y) = xy$ i utvrditi da li funkcija ima ekstremnih tačaka.*

Rešenje: Da bismo odrediti stacionarne tačke, odredićemo parcijalne izvode prvog reda date funkcije, izjednačiti ih sa nulom i rešiti dobijeni sistem jednačina.

$$\begin{aligned} f'_x &= y = 0 \\ f'_y &= x = 0 \end{aligned}$$

je odgovarajući sistem jednačina, koji se u ovom slučaju izuzetno jednostavno rešava. Njegovo jedino rešenje je tačka $A(0, 0)$. To je i jedina stacionarna tačka ove funkcije.

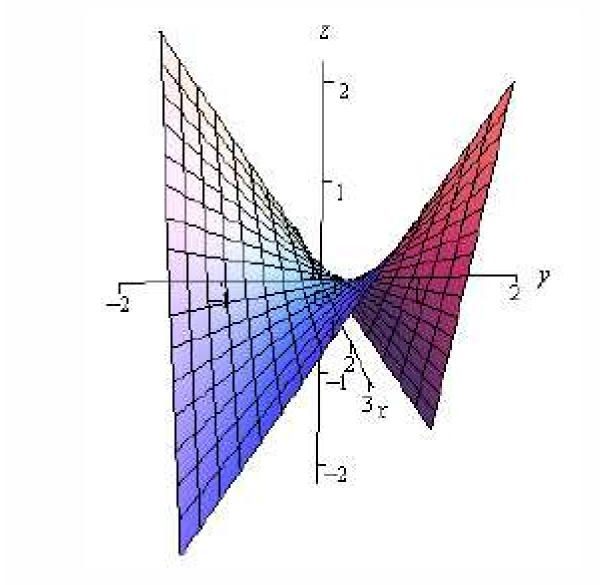
Da bismo proverili da li je A i ekstremna tačka, koristićemo Definiciju 12.1. Uočavamo da je vrednost funkcije u tački A jednaka $f(0, 0) = 0$. Ukoliko bi tačka A bila ekstremna, za sve vrednosti x i y u nekoj okolini tačke $(0, 0)$ vrednost funkcije bi morala biti istog znaka - ili svuda pozitivna, ili svuda negativna. Međutim, lako je uočiti da ovo nije slučaj, odnosno da važi:

$f(x, y) > 0$ ako su x i y istog znaka (odnosno ako su u prvom ili trećem kvadrantu xy-ravni);
$f(x, y) < 0$ ako su x i y suprotnog znaka (odnosno ako su u drugom ili četvrtom kvadrantu xy-ravni).

Zaključujemo da A nije ekstremna tačka posmatrane funkcije. Kako je ovo jedina stacionana tačka, funkcija nema ekstrema.

Grafik funkcije $f(x, y) = xy$ prikazan je na Slici 53. Uočavamo da, posmatrano iz tačke $A(0, 0)$, funkcija u nekim pravcima raste, a u nekim opada. Stacionarna tačka sa takvom osobinom naziva se *sedlasta tačka.*

Jasno je da ćemo uvek određivati stacionarne tačke funkcije, kao prvi korak u određivanje ekstremnih vrednosti. U prethodnom primeru bilo je veoma jednostavno odrediti stacionarne tačke. Uočavamo, međutim da postupak uvek podrazumeva rešavanje sistema jednačina, koji je u opštem slučaju nelinearan.



Slika 53: Grafik funkcije $f(x, y) = xy$. Tačka $(0, 0)$ je sedlasta tačka ove funkcije.

Kako za rešavanje nelinearnih sistema ne postoji opšti algoritam, može se dogoditi i da ne možemo da ga rešimo, ili da rešavanje, u najmanju ruku, iziskuje popriličan trud. Ovaj korak u određivanju ekstremnih vrednosti je, praktično, “neizvestan” pa jedino od njega zavisi naš uspeh u rešavanju problema.

Činjenica je, ipak, i da postupak provere da li je uočena stacionarna tačka funkcije i njena ekstremna tačka koji se zasniva na Definiciji 12.1, i koji smo sproveli u prethodnom primeru, nije praktičan u opštem slučaju. Ponašanje funkcije treba ispitati u svim pravcima kretanja unutar neke okoline stacionarne tačke, a to nije uvek jednostavno raditi direktno. Zato bi nam veoma odgovaralo da raspolažemo nekim dovoljnim uslovom za postojanje ekstrema funkcije. Takav dovoljan uslov je, kada je reč o funkcijama jedne promenljive, uslov da je drugi izvod posmatrane funkcije u stacionarnoj tački različit od nule. Ispostavlja se da i za funkcije više promenljivih možemo formulisati dovoljan uslov za postojanje ekstrema koji se “oslanja” na druge parcijalne izvode i totalni diferencijal drugog reda. Sledeća dva takva uslova navodimo bez dokaza.

Teorema 12.2. (Dovoljan uslov za postojanje ekstrema) *Ako za funkciju $z = f(x, y)$ u stacionarnoj tački (x_0, y_0) važi*

- $d^2z(x_0, y_0) < 0$ *uvek kada je* $(dx, dy) \neq (0, 0)$, *onda je* (x_0, y_0) *tačka lokalnog maksimuma funkcije* f*;*
- $d^2z(x_0, y_0) > 0$ *uvek kada je* $(dx, dy) \neq (0, 0)$, *onda je* (x_0, y_0) *tačka lokalnog minimuma funkcije* f*;*
- $d^2z(x_0, y_0)$ *menja znak za različite vrednosti* (dx, dy), *onda* (x_0, y_0) *nije ekstremna tačka funkcije* f*.*

U vezi sa navedenim uslovom napominjemo da se on može lako uopštiti i primeniti na funkcije sa više od dve promenljive. Takođe, važno je uočiti da ovaj kriterijum uvek daje konačan odgovor da li je posmatrana stacionarna tačka funkcije njena ekstremna tačka, ili ne.

Teorema 12.3. (Dovoljan uslov za postojanje ekstrema) *Za funkciju $z = f(x, y)$ u stacionarnoj tački (x_0, y_0) posmatramo izraz*

$$D(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 .$$

Tada važi:

- *ako je $D > 0$, funkcija ima ekstrem u tački (x_0, y_0), i pri tome*
  - *ako je $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, funkcija ima lokalni minimum;*
  - *ako je $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, funkcija ima lokalni maksimum;*
- *ako je $D < 0$, funkcija nema ekstrem u tački (x_0, y_0);*
- *ako je $D = 0$, ovaj metod ne daje odgovor o postojanju ekstrema funkcije u tački (x_0, y_0).*

Za razliku od uslova iz Teoreme 12.2, za uslov iz Teoreme 12.3 uočavamo da postoji mogućnost da ne možemo odrediti da li je uočena tačka ekstremna ili nije. U takvom slučaju odgovor o ekstremu moramo potražiti koristeći dovoljan uslov iz Teoreme 12.2. U vezi sa uslovom iz Teoreme 12.3 napominjemo i da je on formulisan samo za funkcije dve promenljive i da se ne može direktno uopštiti i primeniti na funkcije sa više promenljivih. Činjenica je, međutim, da uslov iz Teoreme 12.3, kada se može primeniti, veoma brzo i lako daje odgovor na pitanje o postojanju ekstrema, što ga, uprkos navedenim "nedostacima", čini veoma popularnim.

U nastavku ćemo sve navedeno primeniti u određivanju ekstremnih vrednosti nekih zadatih funkcija.

Primer 12.4. *Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*

Rešenje: Prvi korak u postupku je određivanje stacionarnih tačaka. Određujući parcijalne izvode, izjednačavajući ih sa nulom i rešavajući odgovarajući sistem jednačina, dobijamo:

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = y \; ; \\ f'_y &= 3y^2 - 3x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = x \; . \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednačine u drugu dobijamo da je

$$x^4 = x \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \; , \quad x_2 = 1$$

a tada je $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, pa su stacionarne tačke ove funkcije $A(1, 1)$ i $B(0, 0)$.

Drugi korak je provera da li su stacionarne tačke istovremeno i ekstremne, za šta koristimo jedan od navedenih dovoljnih uslova. Za primenu bilo kog od njih potrebni su nam parcijalni izvodi drugog reda.

$$f''_{xx} = 6x \; , \qquad f''_{xy} = -3 \; , \qquad f''_{yy} = 6y \; .$$

Ispitaćemo postojanje ekstrema primenom Teoreme 12.2, odnosno, ispitaćemo znak diferencijala drugog reda u okolini svake od stacionarnih tačaka.

Za tačku $A(1, 1)$ je

$$d^2z(1, 1) = 6\; dx^2 - 6\; dx\; dy + 6\; dy^2 = 6\left((dx - \frac{1}{2}dy)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\; dy)^2\right) \geq 0 \; .$$

Da bismo konačno zaključili da je A ekstremna tačka, moramo potvrditi da je $d^2z(A) = 0$ jedino u slučaju kada je $(dx, dy) = (0, 0)$.

Kako je $d^2z(A)$ (pozitivni) umnožak zbira kvadrata, jasno je da ovaj izraz može biti nula samo kada je

$$dx - \frac{1}{2}\; dy = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\; dy = 0$$

a rešavanjem ovog linearnog (trougaonog) homogenog sistema jednačina po dx i dy dobijamo da je njegovo jedino rešenje $(dx, dy) = (0, 0)$. (Podsećamo se da se ovakvo rešenje homogenog sistema linearnih jednačina zove trivijalno rešenje.)

Kako je ovim ispunjen dovoljan uslov naveden u Teoremi 12.2, zaključujemo da je $A(1,1)$ ekstremna tačka posmatrane funkcije. S obzirom na znak diferencijala drugog reda, tačka A je minimum funkcije.

Za tačku $B(0,0)$ je

$$d^2z(0,0) = -6\ dx\ dy$$

a ovaj izraz menja znak za različite izbore vrednosti dx i dy. Na osnovu Teoreme 12.2 zaključujemo da tačka $B(0,0)$ nije ekstremna tačka posmatrane funkcije.

Ilustrovaćemo i primenu Teoreme 12.3 za utvrđivanje da li su A i B ekstremne tačke (odnosno, rešićemo zadatak i na drugi način).

Za tačku A vrednost izraza D je

$$D(1,1) = 6 \cdot 6 - (-3)^2 > 0$$

odakle zaključujemo da je A ekstremna tačka funkcije. S obzirom da je $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, zaključujemo da je A tačka lokalnog minimuma funkcije.

Za tačku B vrednost izraza D je

$$D(0,0) = 0 \cdot 0 - (-3)^2 < 0$$

odakle zaključujemo da B nije ekstremna tačka posmatrane funkcije.

Primer 12.5. *Odrediti ekstremne vrednosti funkcije* $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2$.

Rešenje: S obzirom da je ovde reč o funkciji tri promenljive, odmah uočavamo da ne možemo primeniti Teoremu 12.3, već da moramo odrediti totalni diferencijal drugog reda u (svakoj) stacionarnoj tački funkcije i ispitati stalnost njegovog znaka.

Kako je

$$u'_x = 3x^2\ , \qquad u'_y = 2y\ , \qquad u'_z = 2z\ ,$$

zaključujemo da je $u'_x = 0$ za $x = 0$, i da je $u'_y = 0$ za $y = 0$, i da je $u'_z = 0$ za $z = 0$. To znači da je jedina stacionarna tačka posmatrane funkcije tačka $A(0,0,0)$.

Dalje određujemo parcijalne izvode drugog reda i formiramo totalni diferencijal drugug reda u tački A. Drugi parcijalni izvodi su

$$u''_{xx} = 6x\ , \quad u''_{xy} = u''_{xz} = 0\ , \quad u''_{yy} = 2\ , \quad u''_{yz} = 0\ , \quad u''_{zz} = 2\ .$$

Totalni diferencijal drugog reda funkcije tri promenljive je definisan kao

$$d^2u(x,y,z) = u''_{xx}\ dx^2 + u''_{yy}\ dy^2 + u''_{zz}\ dz^2 + 2\ u''_{xy}\ dx\ dy + 2\ u''_{xz}\ dx\ dz + u''_{yz}\ dy\ dz\ ,$$

a u tački A je

$$d^2z(0,0,0) = 2\ dy^2 + 2\ dz^2 \geq 0\ .$$

Na pitanje kada je $dz^2(A) = 0$ odgovor je, dakle, da je to samo ako je $dy = dz = 0$. Međutim, uočavamo da ne postoji uslov zbog kog bi tada i dx moralo biti nula, pa zaključujemo da je $dz^2(A) = 0$ kad god je $(dx, dy, dz) = (dx, 0, 0)$, što ne ispunjava uslov Teoreme 12.2, pa tačka A nije ekstremna tačka posmatrane funkcije.

Kako funkcija nema drugih stacionarnih tačaka, ona nema ni ekstremnih vrednosti.

Primer 12.6. *Odrediti ekstremne vrednosti funkcije* $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Rešenje: S obzirom da je

$$f'_x = 4x^3 - 2x - 2y \ , \qquad f'_y = 4y^3 - 2y - 2x \ ,$$

izjednačavanjem sa nulom dobijamo sistem jednačina

$$2x^3 = x + y \ , \qquad 2y^3 = x + y \ ,$$

odakle je

$$x^3 = y^3 \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad 2x^3 = 2x \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \ .$$

Zaključujemo da su stacionarne tačke date funkcije

$$A(1,1) \ , \qquad B(-1,-1) \qquad C(0,0) \ .$$

Dalje, pokušaćemo da odredimo da li su ove tačke ekstremne koristeći Teoremu 12.3. Njena primena je jednostavna i prirodno je da nam ova teorema bude prvi izbor u radu, uvek kada na osnovu nje možemo da dođemo do odgovora.

Parcijalni izvodi drugog reda date funkcije su

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2 \ , \qquad z''_{xy} = -2 \ , \qquad z''_{yy} = 12y^2 - 2 \ ,$$

pa je

$$D(1,1) = 10 \cdot 10 - (-2)^2 > 0 \ .$$

Zaključujemos da funkcija u tački A ima ekstrem. Kako je $f''_{xx}(1,1) = 10 > 0$, tačka A je tačka lokalnog minimuma funkcije.

Slično, i za tačku $B(-1,-1)$ je

$$D(-1,-1) = 10 \cdot 10 - (-2)^2 > 0 \ ,$$

pa funkcija i u tački B ima ekstrem. Kako je $f''_{xx}(-1,-1) = 10 > 0$, i tačka B je tačka lokalnog minimuma funkcije.

Konačno, za tačku $C(0,0)$ je

$$D(0,0) = (-2) \cdot (-2) - (-2)^2 = 0 \ ,$$

pa Teorema 12.3 ne daje odgovor o postojanju ekstrema u tački C. Primenom Teoreme 12.2 dobijamo

$$d^2 z(0,0) = -2\ dx^2 - 4\ dx\ dy - 2\ dy^2 = -2(dx + dy)^2 \leq 0$$

pri čemu važi da je $d^2 z(0,0) = 0$ za $dx + dy = 0$. Kako to znači da je $d^2 z(0,0) = 0$ uvek kada je $(dx, dy) = (dx, -dx)$ (odnosno, kada dx i dy imaju suprotne vrednosti) a ne samo kada je $(dx, dy) = (0,0)$, zaključujemo, na osnovu Teoreme 12.2, da tačka $C(0,0)$ nije ekstremna tačka posmatrane funkcije.

13 Obične diferencijalne jednačine prvog reda

13.1 Uvod - definicija, osnovni pojmovi i prvi primeri

Diferencijalnom jednačinom uspostavljena je relacija (veza) između funkcije i njenih izvoda. Ukoliko je reč o funkciji jedne promenljive, diferencijalna jednačina je *obična* (za razliku od *parcijalne*, u kojoj figurišu funkcije više promenljivih i njihovi parcijalni izvodi). Ukoliko se u jednačini, uz nepoznatu funkciju, pojavljuje samo prvi izvod te funkcije, jednačina je *prvog reda*. U opštem slučaju, u jednačini mogu figurisati i izvodi višeg reda; red diferencijalne jednačine jednak je redu najvišeg izvoda funkcije koji se u njoj pojavljuje.

Jezik diferencijalnih jednačina je jezik kojim se opisuju svi osnovni - i najznačajniji - prirodni zakoni. Prirodni zakoni i znanja iz prirodnih nauka nam govore na koji se način neki posmatrani sistemi kratkoročno menjaju (dok prelaze iz jedne posmatrane situacije u drugu). Izazov na koji odgovara teorija diferencijalnih jednačina je da se na osnovu znanja o kratkoročnim promenama dobiju informacije i formiraju zaključci o dugoročnim promenama i opštem ponašanju sistema. Zbog toga tipičan niz koraka koji se preduzima u radu sa diferencijalnim jednačinama obuhvata sledeće: (1) prvo se posmatrani (hemijski, fizički, biološki, ekonomski) sistem modeluje (opisuje) korišćenjem odgovarajuće diferencijalne jednačine; (2) dalje se nastoji da se diferencijalna jednačina reši i/ili da se stekne što više znanja o rešenju jednačine; (3) na kraju se ova informacija o rešenju jednačine sa matematičkog ponovo "prevodi" na jezik polaznog sistema i posmatranog naučnog konteksta. U okviru ovog kursa najviše pažnje biće posvećeno koraku (2) - rešavanju određenih tipova diferencijalnih jednačina koji se često pojavljuju pri modeliranju različitih fizičkih procesa. Koraci (1) i (3) su međusobno blisko povezani, i neodvojivi od konkretnog konteksta na koji se odnose.

Opšti oblik obične diferencijalne jednačine (ODJ) prvog reda, u implicitnom obliku je $F(x, y, y') = 0$. Kada je moguće, jednačina je data u svom normalnom obliku, $y' = f(x, y)$.

Primer 13.1. *Odrediti rešenje jednačine $y' = 2x$.*

Rešenje: Ovo je ODJ u normalnom obliku. Naš zadatak je da odredimo funkciju $y = y(x)$ koja (identički) zadovoljava ovu jednačinu. Jasno je da funkcija zadovoljava ovu jednačinu ako je izvod te funkcije jednak $2x$. Na pitanje koja funkcija zadovoljava ovakav uslov smo već davali odgovor:

$$y(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C \, .$$

Uočavamo da rešenje posmatrane diferencijalne jednačine nije jedinstveno - beskonačno mnogo funkcija oblika $y(x) = x^2 + C$ zadovoljavaju jednačinu. Kažemo da skup funkcija oblika $y(x) = x^2 + C$ predstavlja *opšte rešenje* posmatrane jednačine. Opšte rešenje ODJ prvog reda uvek zavisi od jedne proizvoljne konstante.

Ukoliko izaberemo konkretnu vrednost konstante C, a samim tim i jednu konkretnu funkciju koja je element opšteg rešenja, dobijamo jedno *partikularno rešenje*. Konstantu možemo odrediti na razne načine, a najčešći je zadavanjem uslova oblika $y_0 = y(x_0)$. Ovakav uslov se zove *početni uslov*, a diferencijalna jednačina zajedno sa početnim uslovom čine *početni problem.* Rešenje početnog problema je jedna konkretna funkcija (partikularno rešenje), koja je element opšteg rešenja.

Dodajući početni uslov, recimo, $y(1) = 2$ jednačini iz prethodnog primera, preformulisaćemo problem tako da on postane određivanje funkcije koja zadovoljava jednačinu, odnosno, čiji je izvod jednak $2x$, a koja uz to prolazi kroz tačku sa koordinatama $(1, 2)$. Ovaj uslov, u kombinaciji sa dobijenim opštim rešenjem $y(x) = x^2 + C$, daje

$$2 = 1^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 1\ ,$$

a tada je

$$y(x) = x^2 + 1$$

traženo konkretno rešenje koje zadovoljava početni problem $y' = 2x,\ \ y(1) = 2$.

Primer 13.2. *Odrediti rešenje jednačine* $y' = ky$.

Rešenje: Pođimo od slučaja kada je $k = 1$. Tada je pitanje koja funkcija ima osobinu da je jednaka svom izvodu. Veoma je lako zaključiti da je to, pre svega, funkcija $y = e^x$, odnosno, malo opštije, klasa funkcija oblika $y = C\ e^x$. Ova klasa funkcija je opšte rešenje date jednačine.

Za proizvoljnu vrednost konstante k, slično, zaključujemo da je $y = e^{kx}$ rešenje, odnosno da je $y = C\ e^{kx}$ opšte rešenje date diferencijalne jednačine. Ovu jednačinu smo rešili "napamet".

Za neke jednačine se može uočiti da imaju i rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu vrednost konstante C. Takvo rešenje naziva se *singularno rešenje.* Recimo, za jednačinu

$$y = xy' + y' + (y')^2$$

opšte rešenje je familija pravih oblika

$$y(x) = Cx + C + C^2\ , \quad C \in \mathbb{R}\ ,$$

što se može potvrditi direktnom proverom (uvrštavanjem). Međutim, i funkcija

$$y(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2$$

zadovoljava datu jednačinu, što se takođe lako potvrđuje uvrštavanjem. Ovo rešenje se, očigledno, ni za jednu vrednost konstante C ne može dobiti iz opšteg rešenja, jer je reč o kvadratnoj funkciji, dok je opšte rešenje familija linearnih funkcija - pravih. Funkcija $y(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2$ je, dakle, singularno rešenje posmatrane jednačine.

13.2 Jednačina koja razdvaja promenljive

U većini slučajeva neće biti moguće "napamet" rešavati diferencijalne jednačine. Moraćemo primenjivati neke pouzdanije metode. U stvari, naučićemo da prepoznamo neke osnovne tipove diferencijalnih jednačina, a zatim i kako se ti tipovi jednačina rešavaju. Prvi tip jednačina koje posmatramo su one koje razdvajaju promenljive.

Koristeći da je $y' = \dfrac{dy}{dx}$, diferencijalnu jednačinu možemo, u nekim slučajevima, transformisati tako da sva pojavljivanja jedne promenljive (nezavisne) grupišemo sa jedne strane znaka jednakosti, a sva pojavljivanja druge promenljive (zavisne) sa druge strane znaka jednakosti. Tada kažemo da posmatrana jednačina *razdvaja promenljive.* Ovakvu jednačinu rešavamo integraleći njenu levu i desnu stranu, svaku s obzirom na odgovarajuću promenljivu.

Primer 13.3. *Utvrditi da li se u jednačini* $y' = \dfrac{y + xy}{xy - x}$ *mogu razdvojiti promenljive, a zatim odrediti opšte rešenje ove jednačine.*

Rešenje: S obzirom da se data jednačina može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1+x)}{x(y-1)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y-1}{y}\, dy = \frac{1+x}{x}\, dx \;\; ,$$

zaključujemo da data jednačina razdvaja promenljive. Integraljenjem leve i desne strane dobijamo

$$\int \frac{y-1}{y}\, dy = \int \frac{1+x}{x}\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \int dy - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \int dx$$

a odatle je opšte rešenje polazne jednačine

$$y - \ln|y| = \ln|x| + x + C \qquad \Rightarrow \qquad y - x + C = \ln|xy| \; .$$

Rešenje je dobijeno u implicitnom obliku, što je uobičajeno.

Ovde možemo napomenuti da se i jednačina oblika $y' = f(x)$, koju smo već lako rešavali direktnim integraljenjem, formalno može smatrati jednačinom koja razdvaja promenljive. Važi

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int dy = \int f(x)\, dx \qquad \Rightarrow \qquad y = \int f(x)\, dx \; .$$

13.3 Neki ilustrativni primeri

Navešćemo primere kojima ćemo ilustrovati primenu diferencijalnih jednačina u modeliranju i rešavanju nekih problema iz realnog sveta. Iako u okviru ovog kursa akcenat stavljamo samo na rešavanje određenih tipova ODJ, činjenica ja da su modelovanje realnih procesa diferencijalnim jednačinama, a zatim i interpretiranje dobijenih rezultata izuzetno značajni, i u opštem slučaju ni malo jednostavni zadaci kojima u svakom problemu iz prakse treba posvetiti ozbiljnu pažnju.

Primer 13.4. Modelovanje rasta populacije: *U idealnim uslovima, koji podrazumevaju dovoljnu količinu hrane, odsustvo bolesti, istrebljenja, rata i sl., stopa rasta neke populacije je proporcionalna veličini populacije. Konstanta proporcionalnosti je karakteristika određene populacije i/ili određenih uslova. Odrediti funkciju kojom se određuje veličina populacije u nekom vremenskom trenutku* t.

Rešenje: Ako sa $P(t)$ označimo veličinu (broj jedinki) posmatrane populacije u trenutku t, onda uslov da je promena populacije u svakom trenutku proporcionalna veličini populacije možemo zapisati u obliku:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\, P(t) \; ,$$

gde je na levoj strani jednačine izvod funkcije populacije, odnosno promena funkcije, a na desnoj populacija pomnožena konstantom proporcionalnosti k. Navedena diferencijalna jednačina razdvaja promenljive i lako se može rešiti:

$$\frac{dP}{P} = k\, dt \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dP}{P} = k \int dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln|P| + \ln|C_1| = k\, t \qquad \Rightarrow \qquad C_1\, P = e^{kt} \; .$$

Dakle,

$$P(t) = C\, e^{kt}$$

predstavlja opšte rešenje date jednačine.

U izučavanju ponašanja konkretne populacije uglavnom raspolažemo nekim početnim uslovom; znamo veličinu populacije u trenutku $t_0 = 0$, ili u bilo kom dugom konkretnom trenutku. Ovo nam omogućava da odredimo konstantu C i da dobijemo odgovarajuće partikularno rešenje jednačine. Dakle, ako je $P(t_0) = P_0$ početni uslov određen na osnovu nekog konkretnog merenja (određivanja broja jedinki u trenutku t_0), onda je $P_0 = C\ e^{kt_0}$ i $C = P_0\ e^{-kt_0}$. Konačno, partikularno rešenje početnog problema je

$$P(t) = C\ e^{kt} = P_0\ e^{-kt_0}\ e^{kt} = P_0\ e^{k(t-t_0)}\ .$$

Vrednost konstante proporcionalnosti k određuje se za date uslove, uglavnom eksperimentalno, odnosno na osnovu nekih do tada dobijenih rezultata, ili izvršenih merenja. U svim slučajvima je zadovoljeno da $k > 0$ podrazumeva da populacija raste, a da $k < 0$ znači da se populacija smanjuje, odnosno da broj njenih jedinki opada.

Pretpostavimo da znamo da je broj ljudi na Zemlji 1750. godine iznosio 791 milion. Ovaj podatak nam može poslužiti kao početni uslov, $P(1750) = 791$. Uvrštavanjem u poslednji izraz za P, dobijamo da funkcija

$$P(t) = 791e^{k(t-1750)}$$

opisuje broj stanovnika na Zemlji, za svako t. Ukoliko iskoristimo još jedan izmereni podatak, recimo da je $P(2005) = 6453$ (odnosno da je na Zemlji 2005. godine bilo 6 milijardi i 453 miliona stanovnika), možemo odrediti i vrednost konstante k koja odgovara opisanoj situaciji:

$$6453 = 791e^{k(2005-1750)} \qquad \Rightarrow \qquad 255\ k = \ln\frac{6453}{791} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2.099}{255} \approx 0.00823\ .$$

Dakle, konačno je funkcija kojom se može izraziti veličina ljudske populacije u nekom trenutku (godini) na Zemlji predstavljena u obliku:

$$P(t) = 791e^{0.00823(t-1750)}\ .$$

Upoređivanjem grafika ove funkcije sa podacima o broju stanovnika na Zemlji tokom godina između 1750. i 2005. godine, uočavamo da postoji značajno odstupanje između teorijskih i eksperimentalnih vrednosti; stvarni broj stanovnika je uvek bio značajno manji od teorijskog. To je posledica suviše pojednostavljenog modela koji smo koristili, a koji je, između ostalog pretpostavljao idealne uslove života, odnosno "razmnožavanja". Značajno bolju aproksimaciju dobijamo ako, recimo, posmatramo samo period i podatke posle Drugog svetskog rata. Koristeći početni uslov $P(1950) = 2518$, odnosno, podatak da je na Zemlji 1950. godine živelo 2 milijarde i 518 miliona ljudi, možemo, na već opisani način, odrediti konstante C i k, nakon čega dobijamo funkciju rasta populacije

$$P(t) = 2518\ e^{0.0171(t-1950)}\ .$$

Upoređivanjem njenog grafika sa eksperimentalnim podacima uočava se veliko slaganje vrednosti.

Na osnovu dobijene funkcije možemo izvršiti predviđanje (opet, pretpostavljajući relativno normalne uslove života) da će 2050. godine na Zemlji živeti

$$P(2050) = 2518\ e^{0.0171(2050-1950)} \approx 13937\ ,$$

odnosno, nešto manje od 14 milijardi stanovnika.

Primer 13.5. Modelovanje rasta populacije, sa gornjim ograničenjem: *Naselje ima 1234 stanovnika. Vest se širi naseljem brzinom koja je proporcionalna proizvodu broja stanovnika koji su do tog trenutka vest čuli i broja onih koji je još nisu čuli. U 8h je vest čulo 100 stanovnika, a do podne pola grada. U koliko sati će vest čuti 1000 stanovnika?*

Rešenje: Ako sa $P = P(t)$ označimo broj stanovnika koji su vest čuli tokom sata t, sa k konstantu proporcionalnosti, a sa S (poznat i konstantan) broj stanovnika u naselju, onda je S prirodno gornje ograničenje vrednosti funkcije P, koja u ovom slučaju za razliku od prethodnog primera, ne može neograničeno da raste (ukupan broj stanovnika naselja je ujedno i najveći broj ljudi koji mogu da čuju vest). Opisani proces širenja vesti se može prikazati diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dP}{dt} = kP\,(S-P) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dP}{P\,(S-P)} = k\,dt\,,$$

a onda se, integraljenjem, dobija da je

$$\frac{1}{S}\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{S-P}\right)dP = k\,t + C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{S}\,\ln|\frac{S-P}{P}| = -k\,t - C\,,$$

i dalje

$$\frac{S}{P} - 1 = e^{-S(kt+C)} \qquad \Rightarrow \qquad P(t) = \frac{S}{1+e^{-S(kt+C)}}\,.$$

Koristeći da je $S = 1234$, kao i početne uslove da je $P(8) = 100$ i da je $P(12) = 617$, odredićemo konstante C i k. Zatim će biti potrebno odgovoriti na pitanje za koje t je $P(t) = 1000$.

Dobijamo da je $k = 0.0004925$, a da je $C = -0.00591$. Tada je

$$P(t) = \frac{1234}{1+e^{-1234(0.0004925t-0.00591)}}\,, \qquad \text{a} \qquad 1000 = \frac{1234}{1+e^{-1234(0.0004925t-0.00591)}} \quad \text{za} \quad t = 14.38$$

što znači da će 1000 stanovnika vest čuti nešto malo pre 14:30.

Primer 13.6. Njutnov zakon provođenja toplote: *Promena temperature objekta proporcionalna je razlici temperature posmatranog objekta i temperature okoline. Napisati funkciju kojom se opisuje temperatura $T(t)$ objekta u nekom trenutku t, ukoliko je poznata temperatura okoline, T_{ext}.*

Rešenje: Ako sa T_{ext} označimo temperaturu sredine (okoline), sa T temperaturu objekta, a sa k konstantu proporcionalnosti, onda se posmatrani proces može opisati diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T_{ext} - T)\,.$$

Ova diferencijalna jednačina opisuje Njutnov zakon hlađenja.

Konstanta proporcionalnosti (koja se zove koeficijent provodljivosti/hlađenja) je specifična za posmatrane materijale. Velika je ukoliko je izolacija objekta mala, a mala je ukoliko je objekat unutar sredine dobro izolovan. Ukoliko je $T_{ext} > T$, promena temperature je pozitivna, što znači da se posmatrani objekat greje. Ukoliko je $T_{ext} < T$, promena temperature je negativna, a posmatrani objekat se hladi. Napominjemo još i da ovakav model možemo koristiti samo ako je razlika između temperatura objekta i spoljašnje sredine dovoljno mala; u protivnom je suviše pojednostavljen i ne može na pravi način opisati posmatrani proces.

Rešićemo diferencijalnu jednačinu kojom smo opisali proces. Praktično, posmatraćemo *razliku* temperatura kao nepoznatu funkciju vremena t. Tada možemo razdvojiti promenljive

$$\frac{dT}{T_{ext}-T} = k\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int\frac{dT}{T_{ext}-T} = k\int dt \qquad \Rightarrow \qquad -\ln|T_{ext}-T| = kt + C_1\,,$$

a odatle je $|T_{ext} - T| = C\,e^{-kt}$. To znači da je

$$T(t) = T_{ext} + Ce^{-kt} \qquad \text{za} \quad T_{ext} < T\,,$$

i

$$T(t) = T_{ext} - Ce^{-kt} \qquad \text{za} \quad T_{ext} > T\,.$$

Ilustrovaćemo upotrebu ove funkcije posmatranjem sledeće situacije:

Primer 13.7. *Temperatura u hotelskoj sobi je* 20° C. *Policija je u ponoć otkrila telo žrtve. Temperatura tela je bila* 26° C. *Dva sata kasnije, temperatura tela je bila* 24° C. *Potrebno je odrediti približno vreme zločina.*

Rešenje: S obzirom da je temperatura sobe niža od temperature tela (objekta), koristićemo funkciju

$$T(t) = T_{ext} + Ce^{-kt} \qquad \text{za} \quad T_{ext} < T$$

i početni uslov $T_0 = T(0) = 26^\circ$ C. Takođe, koristićemo i pretpostavku da je temperatura tela u vreme zločina bila $T = 37^\circ$ C, kao i da je $T_{ext} = 20^\circ$ C. Na osnovu svega ovoga je

$$T(t) = 20 + C\ e^{-kt} \qquad \text{i} \qquad T(0) = 20 + C\ e^{0} = 26 \qquad \text{i} \qquad T(2) = 20 + C\ e^{-2k} = 24\ .$$

Dobijamo da je $C = 6$ i da je $6\ e^{-2k} = 4$. Odatle je $k = 0.203$. Sada imamo da je funkcija temperature pri hlađenju pod datim uslovima

$$T(t) = 20 + 6\ e^{-0.203t}$$

a vrednost t za koju je $T(t) = 37$ dobijamo iz

$$20 + 6\ e^{-0.203t} = 37 \qquad \Rightarrow \qquad t = -5.1303\ .$$

Dakle, zločin se dogodio približno 5 sati pre ponoći (što je početno vreme t_0), odnosno, oko 19h.

13.4 Geometrijska interpretacija - polja pravaca

Diferencijalnoj jednačini, za koju ćemo sada pretpostaviti da je možemo napisati u obliku $y' = f(x, y)$, ćemo pokušati da damo geometrijsku interpretaciju.

Prvo uočavamo da je navedenom diferencijalnom jednačinom svakoj tački (x, y) u ravni dodeljena vrednost y', što je koeficijent pravca nekog linijskog segmenta, odnosno koeficijent pravca rešenja (a to znači tangente na krivu koja predstavlja rešenje) u posmatranoj tački. Dakle, u svakoj tački (x, y) možemo nacrtati mali segment prave, sa koeficijentom pravca koji je određen uslovom $y' = f(x, y)$. Algoritam je:

1. Izaberi tačku (x, y);

2. Izračunaj $f(x, y)$ za uočenu tačku i datu diferencijalnu jednačinu;

3. Pridruži uočenoj tački linijski segment sa koeficijentom pravca y' dobijenim u koraku 2.

Na opisani način generisali smo *polje pravaca* date diferencijalne jednačine. Uočavamo da, ukoliko generišemo dovoljno "gusto" polje pravaca (odnosno, izračunamo vrednosti y' u velikom broju gusto raspoređenih tačaka ravni), praktično grafički određujemo rešenje jednačine. U stvari, svako rešenje jednačine u svakoj tački ravni ima tangentu čiji smo koeficijent pravca izračunali i nacrtali. Krive koje ispunjavaju navedeni uslov se "vide" u polju pravaca. Ove krive zovu se još i *integralne krive* diferencijalne jednačine.

Mada je postupak za određivanje polja pravaca jasan i jednostavan, ipak je pomalo nepraktičan za "ručnu realizaciju". Ukoliko ne generišemo polje pravaca koristeći računar, ispostavlja se da nam je mnogo jednostavnije da "grupišemo" tačke kojima odgovara isti koeficijent pravca tangente rešenja. To postižemo posmatrajući familiju krivih

$$f(x, y) = c\ ,$$

gde je c konstanta. Svaka kriva, generisana za jednu izabranu vrednost c naziva se *izoklina* ("iso-cline" - jednak nagib). Sve tačke jedne izokline karakteriše isti pravac tangente u polju pravaca.

Ilustrovaćemo navedene pojmove i njihove veze na primeru.

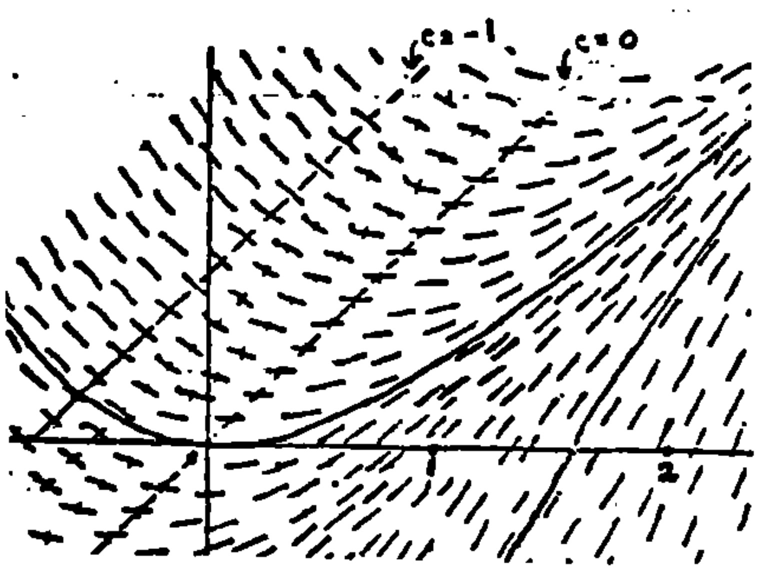
Primer 13.8. *Prikazati grafički polje pravaca, izokline i integralne krive koje odgovaraju diferencijalnoj jednačini* $y' = x - y$.

Rešenje: Ovde je, dakle, $f(x,y) = x - y$ i svakoj tački (x,y) u ravni dodeljujemo koeficijent pravca tangente određen po ovom pravilu preslikavanja. Polje pravaca odredićemo posmatrajući izokline: to su krive iz familije krivih oblika

$$c = x - y \qquad \text{za} \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

pri čemu svaku izoklinu određuje jedna vrednost konstante c.

Kako iz $c = x - y$ sledi da je $y = x - c$, zaključujemo da su sve izokline međusobno paralelne prave, koje seku x osu pod uglom $\frac{\pi}{4}$. Polje pravaca i izokline za koje je $c = 0$ i $c = -1$ su prikazane na Slici 54.



Slika 54: Polje pravaca diferencijalne jednačine $y' = x-y$. Izokline za pravce sa koeficijentima $y' = c = -1$ i $y' = c = 0$. Dve integralne krive su takođe prikazane.

Dakle, birajući $c = 0$ dobijamo izoklinu $y = x$. To znači da se koeficijenti pravca $y' = 0$ nalaze (samo) u tačkama prave koja je simetrala prvog i trećeg kvadranta, i da su tangente na sve integralne krive u tim tačkama paralelne sa x-osom.

Dalje, birajući $c = -1$ dobijamo izoklinu $y = x + 1$, a to znači da u svim tačkama prave $y = x + 1$ tangente na integralne krive imaju koeficijent pravca $c = y' = -1$. U ovom slučaju to znači da su tangente ortogonalne na odgovarajuću izoklinu.

Ovaj postupak se može nastaviti za proizvoljno mnogo vrednosti c. Mada su sve izokline međusobno paralelne prave, važno je uočiti da se koeficijenti pravaca (grafički prikazani pravolinijski segmenti koji određuju pravac tangente) na različitim izoklinama razlikuju.

Uočimo još i izoklinu koja odgovara vrednosti $c = 1$. Izoklina ima jednačinu $y = x - 1$, što znači da su tangente na krivu u tačkama ove prave istog pravca kao i sama izoklina. Drugim rečima, izoklina $y = x - 1$ je istovremeno i integralna kriva.

Konačno, na slici su prikazane i dve integralne krive. Njih, u opštem slučaju, možemo odrediti grafički, ukoliko pratimo pravac koji određuju naznačene tangente.

Kako je jednačina $y' = x - y$ linearna, možemo i analitički odrediti njeno opšte rešenje. Na osnovu standardnog postupka za rešavanje linearne jednačine dobijamo da je

$$y = Ce^{-x} + x - 1$$

njeno opšte rešenje. Ovu informaciju možemo upotrebiti da proverimo konzistentnost onoga što vidimo iz polja pravaca i onoga što znamo o analitičkoj formi rešenja. Tako, na primer, potvrđujemo da je među rešenjima i linearna funkcija $y(x) = x - 1$. Ostala rešenja su krive navedenog opšteg oblika.

Napominjemo da su informacije koje dobijamo o rešenju na osnovu polja pravaca i izoklina često komplementarne sa informacijom o analitičkom rešenju - stičemo utisak o ponašanju integralnih krivih i nekim osobinama diferencijalne jednačine koji možda i ne možemo jednako uspešno da stvorimo posmatrajući elemente opšteg rešenja.

Na kraju, prikazaćemo polje pravaca, izokline i integralne krive na primeru još jedne diferencijalne jednačine.

Primer 13.9. *Prikazati grafički polje pravaca, izokline i integralne krive koje odgovaraju diferencijalnoj jednačini $y' = xy$.*

Rešenje: Posmatrajući krive $c = xy$, odnosno $y = \dfrac{c}{x}$, dobijamo jednačine izoklina date diferencijalne jednačine. Izokline su, dakle hiperbole, sa asimptotama $y = 0$ i $x = 0$. Pri tome,

- u svim tačkama izokline $y = \dfrac{1}{x}$ je koeficijent pravca tangenti (elemenata polja pravaca) jednak 1 (paralelne su pravoj $y = x$);
- u svim tačkama izokline $y = -\dfrac{1}{x}$ je koeficijent pravca tangenti (elemenata polja pravaca) jednak -1 (paralelne su pravoj $y = -x$);
- u svim tačkama izokline $y = \dfrac{2}{x}$ je koeficijent pravca tangenti (elemenata polja pravaca) jednak 2 (paralelne su pravoj $y = 2x$);
- u svim tačkama izokline $y = -\dfrac{2}{x}$ je koeficijent pravca tangenti (elemenata polja pravaca) jednak -2 (paralelne su pravoj $y = -2x$)

i tako dalje.

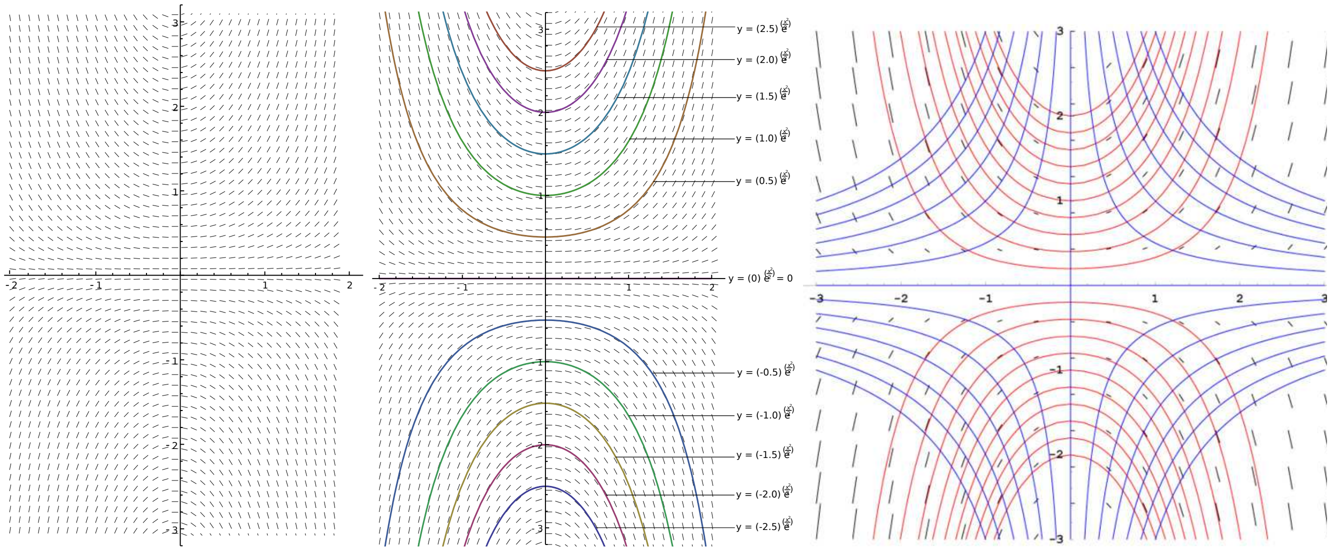
Polje pravaca (segmenti pravih sa odgovarajućim koeficijentom pravca pridruženi tačkama xy-ravni) prikazani su na Slici 55(levo). Krive koje "prolaze" kroz polje pravaca tako da su im tangente u svakoj tački xy-ravni upravo određeni pravolinijski segmenti su integralne krive (rešenja) date jednačine; nekoliko integralnih krivih je prikazano na Slici 55(sredina). Uočimo da se posmatrana jednačina lako rešava razdvajanjem promenljivih, a opšte rešenje je oblika $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Prikazana su rešenja za nekoliko različitih vrednosti konstante C: birano je $C \in \{-2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0, 5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$.

Konačno, na Slici 55(desno) su prikazani polje pravaca, integralne krive (crveno) i izokline (plavo) date jednačine. Uočavamo osobinu izoklina da u svim tačkama jedne izokline tangente na integralne krive imaju isti koeficijent pravca (odnosno, elementi polja pravaca imaju istu vrednost).

13.5 Egzistencija i jedinstvenost rešenja diferencijalne jednačine

Već smo uveli pojmove opšteg i partikularnog rešenja diferencijalne jednačine i time dotakli pitanje o broju rešenja, odnosno broju funkcija koje zadovoljavaju datu jednačnu. Međutim, kada se postavi pitanje postojanja i *jedinstvenosti* rešenja diferencijalne jednačine, misli se na nešto drugo.

Pojam jedinstvenosti rešenja diferencijalne jednačine u vezi je sa postojanjem i brojem integralnih krivih (rešenja) koje prolaze kroz *jednu tačku xy-ravni*. O uslovima pod kojima važi da diferencijalna



Slika 55: Polje pravaca diferencijalne jednačine $y' = xy$ (levo). Integralne krive ove diferencijalne jednačine, prikazane u polju pravaca (sredina). Izokline (plavo), integralne krive (crveno) i polje pravaca jednačine $y' = xy$ (desno).

jednačina ima jedinstveno rešenje govori sledeće tvrđenje, koje navodimo bez dokaza:

Princip preseka za integralne krive: Integralne krive diferencijalne jednačine $y' = f(x, y)$ ne mogu imati zajedničkih tačaka čim je $f(x, y)$ glatka kriva.
Ovo podrazumeva:

- Ako je $f(x, y)$ neprekidna u nekoj oblasti xy-ravni, integralne krive jednačine $y' = f(x, y)$ se ne mogu seći pod oštrim uglom nigde u toj oblasti;
- Ako je $f'_y(x, y)$ neprekidna u posmatranoj oblasti, onda se integralne krive jednačine $y' = f(x, y)$ ne mogu (ni) dodirivati u toj oblasti.

Ovo, drugim rečima, znači da:

- Postoji beskonačno mnogo krivih koje se mogu "provući" kroz polje pravaca neke diferencijalne jednačine. Svaka ta integralna kriva je (partikularno) rešenje date jednačine. One zajedno čine opšte rešenje diferencijalne jednačine.
- Kroz svaku tačku ravni, međutim, prolazi tačno jedna integralna kriva, ukoliko su funkcije $f(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ definisane i neprekidne u nekoj okolini te tačke. Uočeno rešenje je takođe neprekidno i diferencijabilno u posmatranoj okolini tačke.
- Ukoliko je $f(x, y)$ definisana i neprekidna, ali ne važi da je i $f'_y(x, y)$ definisana i neprekidna, onda je obezbeđeno postojanje rešenja diferencijalne jednačine $y' = f(x, y)$, ali ne i njegova jedinstvenost.

Primer kojim možemo ilustrovati tvrđenje o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja diferencijalne jednačine je, recimo:

Primer 13.10. *Odrediti rešenja jednačine* $y' = \dfrac{1 - y}{x}$. *Da li rešenja postoje u tačkama na y-osi?*

Rešenje: Data diferencijalna jednačina razdvaja promenljive, pa je lako možemo rešiti. Opšte rešenje koje dobijamo je

$$\frac{dy}{1 - y} = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad -\ln|1 - y| = \ln|x| + \ln|C| \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 - \frac{1}{Cx}\,.$$

Ono što je jasno i na osnovu same jednačine, kao i na osnovu oblika njenog rešenja je da za $x = 0$ ni jednačina, a ni funkcije rešenja nisu definisane. Dakle, tačke duž y-ose su svakako specifične u pogledu egzistencije i jedinstvenosti rešenja.

Ako pogledamo kako izgleda polje pravaca ove diferencijalne jednačine, uočavamo da tački (x, y) dodeljujemo pravac $f(x, y) = \dfrac{1-y}{x}$.

Ukoliko je $x = 0$ i $y \neq 1$, uočavamo da pravac dodeljen tačkama y-ose (osim tački $(0, 1)$) nije definisan, odnosno da kroz posmatrane tačke ne prolazi ni jedno rešenje date jednačine. Ovaj zaključak je u skladu sa činjenicom da $f(x, y)$ u tačkama y ose nije ni definisana, ni neprekidna, pa zbog narušavanja uslova za egzistenciju i jedinstvenost rešenja, rešenje ne postoji.

Ukoliko je $x = 0$ i $y = 1$, uočavamo da pravac dodeljen tački $(0, 1)$ nije određen, odnosno da odgovarajuće y' može biti bilo koja vrednost. Dakle, kroz posmatranu tačku prolazi beskonačno mnogo rešenja, koja imaju beskonačno mnogo pravaca. Dakle, u tački $(0, 1)$ nije obezbeđena jedinstvenost rešenja, mada egzistencija jeste. Ovo je u skladu sa činjenicom da $f'_y(x, y) = -\dfrac{1}{x}$ nije definisana, ni neprekidna u posmatranoj tački.

13.6 Homogena diferencijalna jednačina

Homogena diferencijalna jednačina je opšteg oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad y = y(x).$$

Rešava se uvođenjem smene

$$t = \frac{y}{x}, \quad t = t(x).$$

Da bismo uveli smenu u datu jednačinu, potrebno je da uočimo da je

$$y(x) = t(x)\, x \qquad \Rightarrow \qquad y' = t'(x)\, x + t(x),$$

odakle je

$$\frac{dt}{dx}\, x + t = f(t)\,.$$

Ovo je jednačina u kojoj se mogu razdvojiti promenljive:

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}\,,$$

a dalje je rešavamo integraljenjem, odnosno na način koji smo ranije opisali. Na kraju "vraćamo smenu", odnosno uvrštavamo da je $t = \dfrac{y}{x}$.

Ilustrovaćemo navedeni opšti postupak rešavanja jednim primerom:

Primer 13.11. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

Rešenje: S obzirom da je

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{xy}{y^2}}{\frac{x^2 - y^2}{y^2}} = \frac{\frac{x}{y}}{(\frac{x}{y})^2 - 1}$$

uočavamo da je jednačina homogna i da se može rešiti uvođenjem smene

$$t = \frac{y}{x}, \qquad \frac{1}{t} = \frac{x}{y}, \qquad y' = t'\, x + t.$$

Nakon uvođenja smene jednačina je

$$t'\,x + t = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} - 1} = \frac{t}{1-t^2},$$

$$\frac{dt}{dx}\,x = \frac{t}{1-t^2} - t = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Razdvajanjem promenljivih dobijamo

$$\frac{1-t^2}{t^3}\,dt = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1-t^2}{t^3}\,dt = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int t^{-3}\,dt - \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}.$$

Konačno je

$$-\frac{1}{2t^2} - \ln|t| = \ln|Cx|,$$

odnosno

$$\ln|Cy| = -\frac{x^2}{2y^2} \qquad \Rightarrow \qquad Cy = e^{-\frac{x^2}{2y^2}}.$$

13.7 Jednačina totalnog diferencijala

Opisaćemo još jednu klasu diferencijalnih jednačina za koju postoji (relativno jednostavan) postupak kojim se dolazi do njihovog rešenja. Iako na osnovu do sada izloženog možemo doći do zaključka da se diferencijalne jednačine rešavaju lako, i to manje-više direktnim integraljenjem, to uopšte nije slučaj; klase jednačina za koje navedeno važi su veoma malobrojne.

Posmatrajmo funkciju $u(x,y) = C$, za neko $C \in \mathbb{R}$. Njen totalni diferencijal prvog reda je

$$du = u'_x(x,y)\,dx + u'_y(x,y)\,dy = 0.$$

Lako uočavamo da funkcije $u(x,y) = C$ predstavljaju rešenja diferencijalne jednačine

$$u'_x(x,y)\,dx + u'_y(x,y)\,dy = 0$$

s obzirom da je zadovoljavaju.

Ako posmatramo diferencijalnu jednačinu oblika

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

za neke funkcije P i Q koje su neprekidne i diferencijabilne na nekoj oblasti D, možemo zaključiti da će ovu jednačinu zadovoljavati funkcija $u(x,y) = C$ za koju važi da je $du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, odnosno da su P i Q, redom, parcijalni izvodi po x, odnosno y, te funkcije u. Tako, određujući funkciju u na osnovu njenih parcijalnih izvoda, odmah određujemo i rešenje date diferencijalne jednačine.

Pre svega, jasno je da ne možemo očekivati da za svake dve proizvoljno zadate funkcije $P = P(x,y)$ i $Q = Q(x,y)$ postoji funkcija $u(x,y) = C$ takva da je $P = u'_x$ i $Q = u'_y$. Dalje, čak i ako znamo da takva funkcija $u(x,y) = C$ postoji, potrebno je da znamo i kako da je odredimo. Zaključujemo da nam treba odgovor na dva pitanja:

- Kako utvrditi da li postoji funkcija $u(x,y) = C$ takva da je $u'_x = P$ i $u'_y = Q$?
- Ukoliko takva funkcija postoji, kako je odrediti?

Da bismo formulisali uslov kojim ćemo proveriti da li postoji $u(x, y) = C$ takva da je $u'_x = P$ i $u'_y = Q$ za date funkcije P i Q, uočimo da, ako važi da je, za neku funkciju $u(x, y) = C$, ispunjeno $u'_x = P$ i $u'_y = Q$, i ako su P i Q diferencijabilne, onda postoje i $P'_y = u''_{xy}$ i $Q'_x = u''_{yx}$. Ako su funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne, onda mora važiti

$$u''_{xy} = u''_{yx} \qquad \Rightarrow \qquad P'_y = Q'_x \ .$$

Zaključujemo da, ukoliko je $P'_y \neq Q'_x$, funkcija $u(x, y) = C$ sa traženom osobinom (da su njeni parcijalni izvodi upravo date funkcije P i Q) ne postoji.

Ostaje da pokažemo da je navedeni uslov i dovoljan, odnosno da iz činjenice da je $P'_y = Q'_x$ sledi da funkcija $u(x, y) = C$ sa navedenim osobinama postoji. Ovo pokazujemo direktnom konstrukcijom funkcije u (pokazujemo da ona postoji tako što pokazujemo kako se ona može odrediti).

Dakle, ako je $u'_x = P(x, y)$ onda je

$$u(x, y) = \int P(x, y)\, dx \ .$$

U ovom postupku integracije promenljiva y se ponaša kao konstanta (uočimo dx ispod integrala), pa je i integraciona konstanta (uobičajeno C) sada neka funkcija $f(y)$. Ostaje da se odredi ta funkcija.

To se postiže diferenciranjem po y upravo dobijene funkcije $u = u(x, y)$, i izjednačavanjem dobijenog izraza sa $u'_y = Q(x, y)$. Može se pokazati da, pod navedenim uslovima, uvek postoji funkcija f takva da je $u'_y = Q(x, y)$. Određivanjem odgovarajuće funkcije $f = f(y)$, dobija se i funkcija $u(x, y) = C$.

Ilustrovaćemo opisani postupak na primeru.

Primer 13.12. *Proveriti da li je jednačina* $(6xy + x^2 + 3)\, y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$ *jednačina totalnog diferencijala, a zatim odrediti njeno opšte rešenje, odnosno funkciju* $u(x, y) = C$ *koja zadovoljava datu jednačinu.*

Rešenje: S obzirom da je $y' = \dfrac{dy}{dx}$, datu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$(3y^2 + 2xy + 2x)\, dx + (6xy + x^2 + 3)\, dy = 0.$$

Tada je

$$P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x \qquad \text{i} \qquad Q(x, y) = 6xy + x^2 + 3$$

i

$$P'_y = 6y + 2x \qquad \text{i} \qquad Q'_x = 6y + 2x.$$

Kako je $P'_y = Q'_x$, zaključujemo da je data jednačina jednačina totalnog diferencijala i da postoji funkcija $u(x, y) = C$ takva da je $u'_x = P(x, y)$ i $u'_y = Q(x, y)$. Dalje treba da odredimo funkciju u.

Postupak smo već opisali:

$$u'_x = P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x \qquad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int (3y^2 + 2xy + 2x)\, dx = 3y^2x + x^2y + x^2 + f(y) \ .$$

Već smo napomenuli da funkcija $f(y)$ koja zavisi samo od promenljive y "zamenjuje" integracionu konstantu (ona je konstanta za integral po promenljivoj x).

Dalje je, za prethodno određenu funkciju u

$$u'_y(x, y) = 6xy + x^2 + f'(y) = 6xy + x^2 + 3 \ \ (= Q(x, y)\ )$$

pa je

$$f'(y) = 3 \qquad \Rightarrow \qquad f(y) = 3y + C.$$

Zamenjujući dobijenu funkciju f u prethodni izraz za u konačno dobijamo rešenje date jednačine - implicitnu funkciju

$$u(x, y) = 3y^2x + x^2y + x^2 + 3y = C.$$

13.8 Integracioni množitelj

Ukoliko utvrdimo, da jednačina $P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy = 0$ nije jednačina totalnog diferencijala, onda njeno opšte rešenje moramo tražiti na neki drugi način. Jedna mogućnost je da posmatrana jednačina, nakon množenja pogodno izabranom funkcijom $\mu = \mu(x, y)$, postane jednačina totalnog diferencijala, i da se na nju može primeniti postupak rešavanja opisan u prethodnom odeljku. Dakle, za odgovarajuću funkciju $\mu = \mu(x, y)$, koja se zove *integracioni množitelj* ili *integracioni faktor*, od polazne jednačine, množenjem dobijamo jednačinu

$$\mu(x, y)\ P(x, y)\ dx + \mu(x, y)\ Q(x, y)\ dy = 0\ ,$$

za koju je zadovoljen uslov da je

$$(\mu(x, y)\ P(x, y))'_y = (\mu(x, y)\ Q(x, y))'_x. \tag{16}$$

Za ovu jednačinu postoji funkcija $u(x, y) = C$ koja je zadovoljava, odnosno, za koju važi da je

$$du = \mu(x, y)\ P(x, y)\ dx + \mu(x, y)\ Q(x, y)\ dy = 0.$$

Kako je tada i

$$\mu(x, y)(P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy) = 0,$$

zaključujemo da za $\mu(x, y) \neq 0$ mora važiti i

$$P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy = 0,$$

odnosno, da je funkcija $u(x, y) = C$ rešenje polazne jednačine, tj. baš ono što nam treba. Dakle, jasno je da ćemo lako rešiti polazni problem ukoliko odredimo odgovarajući integracioni faktor μ.

Integracioni faktor treba da zadovolji uslov (16), vsto znači da je

$$\mu'_y\ P + \mu\ P'_y = \mu'_x\ Q + \mu\ Q'_x\ ,$$

odnosno,

$$\mu'_y\ P - \mu'_x\ Q = \mu\ (Q'_x - P'_y)\ .$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednačina (u kojoj figurišu *parcijalni* izvodi nepoznate funkcije μ koja je funkcija *dve* promenljive). Nju u opštem slučaju nije jednostavno rešiti, odnosno, njeno rešavanje je problem bar jednake težine kao i rešavanje same polazne diferencijalne jednačine. Zato, iako je ideja korišćenja integracionih množitelja teoretski veoma dobra i moćna, njen praktični značaj je u velikoj meri umanjen nemogućnošću da se (dovoljno lako) u opštem slučaju odredi (bar jedna) pogodna funkcija μ. Zato se integracioni faktori uglavnom koriste u specijalnim situacijama kada funkcija μ nije funkcija dve, već funkcija jedne promenljive. Dakle, ako postoji integracioni faktor oblika $\mu = \mu(x)$ ili $\mu = \mu(y)$ kojim se polazna jednačina može svesti na jednačinu totalnog diferencijala, takav integracioni faktor se može relativno lako odrediti i polazna jednačina se može (relativno lako) rešiti.

Ilustrovaćemo korišćenje integracionog faktora sledećim primerom.

Primer 13.13. *Odrediti opšte rešenje jednačine* $(x^2 + y^2 + x)\ dx + xy\ dy = 0$ *znajući da ona ima integracioni množitelj koji je funkcija jedne promenljive.*

Rešenje: Ovde je $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$ i $Q(x, y) = xy$ pa lako potvrđujemo da data jednačina nije jednačina totatlnog difrencijala:

$$P'_y = 2y \neq y = Q'_x\ .$$

Kao što je i sugerisano tekstom zadatka, treba da odredimo integracioni množitelj jednačine - funkciju $\mu = \mu(x)$ ili $\mu = \mu(y)$, takvu da jednačina

$$\mu\ P\ dx + \mu\ Q\ dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. To znači da treba da bude zadovoljen uslov (16),

$$(\mu\, P)'_y = (\mu\, Q)'_x$$

odnosno

$$\mu'_y\, P + \mu\, P'_y = \mu'_x\, Q + \mu\, Q'_x\, . \tag{17}$$

Pretpostavimo, prvo, da je $\mu = \mu(y)$. Tada je $\mu'_x = 0$, a $\mu'_y = \mu' = \dfrac{d\mu}{dy}$ (oznaka je prilagođena uobičajenoj oznaci za prvi izvod funkcije jedne promenljive). Sada dobijamo da se uslov (17) svodi na

$$(x^2+y^2+x)\,\mu' + 2y\mu = y\mu \qquad \Rightarrow \qquad (x^2+y^2+x)\,\mu' = -y\mu \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{y\,dy}{x^2+y^2+x}\, .$$

Međutim, funkcija na desnoj strani $(\dfrac{y}{x^2+y^2+x})$ nije funkcija jedne promenljive y, što znači da naša pretpostavka nije tačna, pa je napuštamo.

Pretpostavimo, sada, da je $\mu = \mu(x)$. Tada je $\mu'_y = 0$, a $\mu'_x = \mu' = \dfrac{d\mu}{dx}$. Sada dobijamo da se uslov (17) svodi na

$$2y\mu = xy\,\mu' + y\mu \qquad \Rightarrow \qquad \mu = x\mu' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x}\, .$$

Funkcija $\mu = \mu(x)$ se dalje može odrediti integraljenjem prethodne diferencijalne jednačine u kojoj su razdvojene promenljive:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|\mu| = \ln|Cx| \qquad \Rightarrow \qquad \mu = Cx\, .$$

Kako nam je dovoljno da odaberemo jednu funkciju - inregracioni množitelj, opredeljujemo se za jednu vrednost konstante C. Tako za $C = 1$ dobijamo integracioni množitelj polazne jednačine: $\mu = x$. To dalje znači da je jednačina

$$x\,(x^2+y^2+x)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala, i da postoji funkcija $u(x,y) = C$ koja je zadovoljava. Znamo da je ista funkcija u rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Određujemo, dakle, funkciju $u(x,y) = C$ takvu da je $u'_x = x\,(x^2+y^2+x)$ i $u'_y = x^2\,y$.

$$u'_x = x^3 + x\,y^2 + x^2 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int (x^3 + x\,y^2 + x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2\,y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + f(y).$$

Dalje je, za ovako određenu funkciju u

$$u'_y(x,y) = x^2\,y + f'(y) = x^2\,y \qquad \Rightarrow \qquad f'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(y) = C.$$

Zamenjujući dobijenu funkciju f u prethodni izraz za u konačno dobijamo rešenje date jednačine - implicitnu funkciju

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2\,y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C = 0.$$

13.9 Linearna diferencijalna jednačina, Bernulijeva diferencijalna jednačina

13.9.1 Linearna diferencijalna jednačina

Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine prvog reda je

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{18}$$

gde su $p = p(x)$ i $q = q(x)$ neke date funkcije promenljive x. Ukoliko je $q(x) \equiv 0$, posmatrana jednačina je *homogena* (linearna diferencijalna jednačina prvog reda). U protivnom, jednačina je *nehomogena*.

Klasa linearnih jednačina je, u praksi, najvažnija (najčešće prisutna) klasa običnih diferencijalnih jednačina, kako prvog, tako i višeg reda. Zbog toga će uopštenje navedene jednačine prvog reda u sledećem odeljku biti centralna tema u okviru naše priče o jednačinama višeg reda.

Ukoliko je posmatrana jednačina homogena, mogu joj se razdvojiti promenljive. Takođe, može se pokazati da opšta (nehomogena) diferencijalna jednačina ima integracioni množitelj koji je oblika $\mu = \mu(x)$, što odmah navodi na jedan način za njeno rešavanje. Mi ćemo, međutim, navesti postupak rešavanja linearne jednačine korišćenjem smene.

U linearnu jednačinu ćemo uvesti smenu $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, gde su u i v neke diferencijabilne funkcije promenljive x. Ideja je da jednu od ovih funkcija odredimo tako što sami formulišemo pogodan uslov koji vodi do pojednostavljenja polazne jednačine, a zatim drugu od ovih funkcija odredimo rešavajući pojednostavljenu jednačinu. Koristeći da je, za uvedenu smenu, $y' = u'\ v + u\ v'$, uvrštavanjem u jednačinu (18), dobijamo

$$u'\ v + u\ v' + p(x)\ uv = q(x) \qquad \Rightarrow \qquad u'\ v + u(v' + p(x)\ v) = q(x)\ . \tag{19}$$

Ako sada postavimo uslov da funkcija $v = v(x)$ treba da bude takva da je

$$v' + p(x)\ v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = -p(x)\ v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = -p(x)\ dx,$$

odgovarajuću funkciju v možemo lako odrediti rešavajući ovu diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)\ dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|v| = -\int p(x)\ dx \qquad \Rightarrow \qquad v = e^{-\int p(x)\ dx}.$$

Za ovako određenu funkciju v jednačina (19) postaje:

$$u'\ v(x) = q(x) \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{q(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx$$

s obzirom da su q i v poznate funkcije promenljive x.

Opšte rešenje poslednje diferencijalne jednačine daje klasu funkcija u, koje pomnožene sa već određenom funkcijom v (tj. uvrštene u smenu $y = uv$) daju opšte rešenje polazne linearne diferencijalne jednačine.

Opisani postupak ćemo ilustrovati primerom:

Primer 13.14. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' - \dfrac{1}{x}\ y = x$.

Rešenje: Posmatrana jednačina je linearna ($p(x) = -\dfrac{1}{x}$, $q(x) = x$) pa je možemo rešiti uvođenjem smene $y = u(x) \cdot v(x)$, kada je $y' = u'\ v + u\ v'$. Uvrštavanjem dobijamo:

$$u'\ v + u\ v' - \frac{1}{x}\ u\ v = x \qquad \Rightarrow \qquad u'\ v + u(v' - \frac{1}{x}\ v) = x,$$

a zatim određujemo funkciju v iz uslova da je

$$v' - \frac{1}{x}\ v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\ v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Dobijamo da je

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|v| = \ln|Cx| \qquad \Rightarrow \qquad v = Cx.$$

Kako nam je dovoljna jedna funkcija v koja zadovoljava postavljeni uslov, konstantu C možemo odabrati proizvoljno. Ako je $C = 1$, funkcija $v = x$ je jedna od odgovarajućih funkcija.

Dalje je

$$u'\,x = x \qquad \Rightarrow \qquad u' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad u(x) = \int dx = x + C,$$

pa je opšte rešenje polazne linearne jednačine

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = (x + C)\,x = Cx + x^2.$$

13.9.2 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Bernulijeva jednačina je uopštenje linearne jednačine, i može se rešiti tako što se pogodnom smenom prvo svede na linearnu (po novouvedenoj promenljivoj), a zatim se rešava kao što je opisano u prethodnom odeljku. Opšti oblik Bernulijeve diferencijalne jednačine je

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n \tag{20}$$

gde su $p = p(x)$ i $q = q(x)$ date funkcije, a $n \in \mathbb{Q}$ (racionalan broj). Za $n = 0$ ova jednačina je linearna, a za $n = 1$ jednačina razdvaja promenljive. Kako ovakve jednačine već znamo da rešimo, posmatraćemo slučajeve kada je $n \neq 0$ i $n \neq 1$.

Deljenjem date jednačine sa y^n (što je jedini član po kom se jednačina razlikuje od linarne), dobijamo:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\,\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)\ .$$

Uzimajući za smenu

$$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)} = y^{1-n}(x)$$

kada je, po pravilu za izvod složene funkcije,

$$z'(x) = (1-n)\,y^{-n}(x)\,y'(x) = (1-n)\,\frac{y'}{y^n}\ ,$$

uvrštavanjem u jednačinu dobijamo

$$\frac{1}{1-n}\,z'(x) + p(x)\,z(x) = q(x),$$

a s obzirom da je $(1-n)$ konstanta različita od nule (kojom, po želji, možemo pomnožiti prethodnu jednačinu), dobijena jednačina je linearna jednačina po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Kao što već znamo, ova jednačina se dalje rešava uvođenjem smene $z(x) = u(x)\,v(x)$.

Postupak ćemo ilustrovati primerom:

Primer 13.15. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $xy' - 4y = x^2\,\sqrt{y}$.

Rešenje: Ako jednačinu podelimo sa x, dobijamo

$$y' - \frac{4}{x}\,y = x\,\sqrt{y},$$

i prepoznajemo Bernulijevu jednačinu u kojoj je $n = \dfrac{1}{2}$. Deljenjem sa $\sqrt{y}$ dobijamo

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\,\sqrt{y} = x,$$

i "čitamo" smenu

$$z(x) = \sqrt{y} \qquad \Rightarrow \qquad z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, y' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'\ .$$

Uvrštavanjem u jednačinu, dobijamo linearnu jednačinu

$$2z' - \frac{4}{x}\, z = x,$$

a uvođenjem smene $z = u\, v$, kada je $z' = u'\, v + u\, v'$ dobijamo

$$2(u'\, v + u\, v') - \frac{4}{x}\, u\, v = x \qquad \Rightarrow \qquad 2u'\, v + u\, (2v' - \frac{4}{x}\, v) = x.$$

Sada određujemo funkciju v iz uslova da je

$$2v' - \frac{4}{x}\, v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = 2\, \frac{dx}{x},$$

i dobijamo

$$\ln|v| = 2\ln|Cx| = \ln|Cx|^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = (Cx)^2,$$

a birajući $C = 1$, konačno određujemo $v(x) = x^2$.

Koristeći ovaj rezultat u linearnoj jednačini, dobijamo

$$2x^2\, u' = x \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{1}{2x},$$

odakle je

$$u(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

Sada je

$$z(x) = u(x)\, v(x) = x^2\, (C + \ln\sqrt{x})\ ,$$

a vraćajući i smenu $y = z^2$ dobijamo opšte rešenje polazne Benulijeve jednačine

$$y(x) = x^4\, (C + \ln\sqrt{x})^2\ .$$

14 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

14.1 Obične diferencijalne jednačine višeg reda - osnovni pojmovi

Obična diferencijalna jednačina n-tog reda je diferencijalna jednačina opšteg oblika

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \,.$$

Ona, dakle, sadrži nepoznatu funkciju jedne promenljive, i izvode te funkcije zaključno sa izvodom n-tog reda.

Opšte rešenje ovakve diferencijalne jednačine je oblika $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. To je familija funkcija koje zavise od n konstanti, a koje zadovoljavaju datu jednačinu za svaki izbor vrednosti tih konstanti. Za svaki konkretan izbor vrednosti konstanti koje figurišu u opštem rešenju dobija se jedno *partikularno rešenje* diferencijalne jednačine. Konstante u opštem rešenju se često određuju tako da rešenje zadovoljava neki *početni uslov* koji je oblika:

$$y(a) = b_1, \quad y'(a) = b_2, \quad y''(a) = b_3, \quad \dots \quad , \; y^{(n-1)}(a) = b_n \,.$$

Ovih n jednakosti nam je potrebno za određivanje vrednosti n nepoznatih konstanti.

Primer 14.1. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'''(x) = x$. Zatim odrediti ono partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$.*

Rešenje: Direktnim uzastopnim integraljenjem dobijamo

$$y''(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y'(x) = \int (\frac{x^2}{2} + C_1) \, dx = \frac{x^3}{6} + C_1 \, x + C_2,$$

$$y(x) = \int (\frac{x^3}{6} + C_1 \, x + C_2) \, dx = \frac{x^4}{24} + C_1 \, \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \,.$$

Ovim smo dobili opšte rešenje date jednačine.

Uvrštavanjem početnih uslova dobićemo i traženo partikularno rešenje (rešenje početnog problema):

$$y(0) = C_3 = 1 \,, \qquad y'(0) = C_2 = 2 \,, \qquad y''(0) = C_1 = -1,$$

pa je

$$y_p(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$$

Jednačina trećeg reda koju smo upravo rešili je jednostavna jednačina oblika $y^{(n)} = f(x)$, koja se rešava uzastopnom integracijom. Svakim korakom (integracijom) se snižava red jednačine. Ovakve jednačine uvek lako možemo rešiti (sve dok znamo da rešimo integrale na koje nailazimo). Činjenica je, međutim, da je, u opštem slučaju, rešavanje diferencijalnih jednačina višeg reda veoma ozbiljan posao i da se rešenja mnogih takvih diferencijalnih jednačina ne mogu odrediti (osim, eventualno, približno). Zato ćemo se u nastavku usredsrediti na samo jednu klasu diferencijalnih jednačina, koje se nazivaju *linearne diferencijalne jednačine* i predstavljaju uopštenje diferencijalne jednačine prvog reda, o kojoj smo već govorili.

14.2 Linearna diferencijalna jednačina drugog reda

Linearne diferencijalne jednačine su od veoma velikog značaja u teoriji diferencijalnih jednačina, ali i u širokoj praksi koja se na ovu teoriju oslanja. Izučavane su mnogo, i o njima se mnogo zna i može mnogo reći. Uz to, veliki deo teorijske osnove koja se na njih odnosi može se razumeti i bez velikog matematičkog predznanja i bez korišćenja komplikovanih matematičkih aparata. Dalje, linearne diferencijalne jednačine, i to posebno one drugog reda, su u osnovi svih rezultata iz oblasti mehanike fluida, teorije provodljivosti, talasnog kretanja, elektromagnetnih fenomena. Ovim je nedvosmisleno rečeno koliki je njihov značaj. Sadržaj koji sledi odnosi se, upravo zbog toga, u najvećoj meri na linearne diferencijalne jednačine drugog reda.

Linearna jednačina drugog reda je opšteg oblika

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x),$$

pri čemu su p, q i f neprekidne funkcije na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Očigledno, ova jednačina je uopštenje linearne jednačine prvog reda, $y' + q(x)\, y = f(x)$.

Ukoliko je $f(x) \equiv 0$, linearna jednačina se tada svodi na oblik $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$. Za takvu jednačinu kažemo da je *homogena*. U protivnom je *nehomogena*.

U nastavku ćemo prvo govoriti o homogenim, a zatim o nehomogenim linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda. Konačno, posebno ćemo se pozabaviti specijalnom klasom linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda - onima koje imaju konstantne koeficijente. U slučaju kada su p i q proizvoljne funkcije ne postoji opšti postupak za rešavanje linearne diferencijalne jednačine. Međutim, ako su p i q konstante, postoji opšti postupak za rešavanje linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima; to je razlog zbog kog ćemo im posvetiti posebnu pažnju. Izložićemo opšti postupak za njihovo rešavanje.

Nakon svega toga, ukratko ćemo pomenuti kako se svi navedeni rezultati mogu uopštiti na linearne diferencijalne jednačine višeg reda.

14.2.1 Homogena linearna jednačina drugog reda

Potrebno je da uvedemo neke pojmove koje ćemo koristiti u nastavku priče o rešavanju linearnih jednačina.

Definicija 14.1. *Linearna kombinacija funkcija $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ je funkcija oblika $y(x) = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$, gde su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (proizvoljne realne konstante).*

Definicija 14.2. *Funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ su linearno nezavisne na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ukoliko za njihovu linearnu kombinaciju na tom intervalu važi*

$$C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = 0 \qquad \textit{(ako i) samo ako je} \qquad C_1 = C_2 = 0.$$

Uočavamo da su dve funkcije linearno zavisne akko se jedna može prikazati kao umnožak druge. Ako je $C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = 0$ i, recimo, $C_2 \neq 0$, onda je $y_1 = -\dfrac{C_1}{C_2}\, y_2 = \lambda y_2$ (gde smo koristili oznaku da je $-\dfrac{C_1}{C_2} = \lambda$).

Napominjemo da se pojam linearne kombinacije i linearne (ne)zavisnosti funkcija može direktno proširiti i na n funkcija.

Da bismo formulisali uslov na osnovu kog možemo lako utvrditi da li su (dve) funkcije linearno zavisne ili ne, koristićemo *determinantu Vronskog.*

Definicija 14.3. *Detrminanta Vronskog za dve funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ koje su diferencijabilne na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, je*

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1\, y_2' - y_2\, y_1' \ .$$

Teorema 14.1. *Ako su funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ linearno zavisne na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, odgovarajuća determinanta Vronskog, $W_{y_1,y_2}(x)$ je na tom intervalu identički jednaka nuli.*

Dokaz: Pretpostavimo da su funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ linearno zavisne na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada možemo napisati da je, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, zadovoljeno da je $y_1 = \lambda y_2$. Determinanta Vronskog je onda

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\, y_2(x) & y_2(x) \\ \lambda\, y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Koristili smo osobinu determinante da je jednaka nuli ukoliko ima dve vrste (ili dve kolone) jednake, ili proporcionalne.

Uočavamo da je $W_{y_1,y_2}(x) = 0$ za svako $x \in I$.

Na osnovu prethodne teoreme znamo da iz činjenice da je za neke dve funkcije determinanta Vronskog različita od nule za bar jednu vrednost $x_0 \in I$, sledi da su te dve funkcije na posmatranom intervalu linearno nezavisne.

Sada je vreme da vidimo kako prethodne pojmove možemo da dovedemo u vezu sa linearnim diferencijalnim jednačinama, i iskoristimo pri određivanju njihovog opšteg rešenja.

Prvo još jednom naglašavamo da posmatramo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0,$$

na nekom intervalu I gde su p i q neprekidne funkcije.

Teorema 14.2. *Ukoliko su funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ dva rešenja homogene linearne jednačine drugog reda, onda je i svaka njihova linearna kombinacija $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ rešenje iste jednačine.*

Dokaz: Ovo tvrđenje veoma se lako dokazuje direktnom proverom, odnosno uvrštavanjem linearne kombinacije $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ rešenja y_1 i y_2 u jednačinu i utvrđivanjem da y zadovoljava jednačinu.

Jedno korisno tvrđenje o determinanti Vronskog koja odgovara rešenjima homogene linearne diferencijalne jednačine je

Teorema 14.3. *Ako su funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ dva rešenja homogene linearne jednačine drugog reda, tada je njihova determinanta Vronskog, $W_{y_1,y_2}(x)$, ili jednaka nuli za sve vrednosti $x \in I$, ili različita od nule za sve vrednosti $x \in I$.*

Ovu teoremu nećemo dokazivati, već ćemo samo napomenuti da je ona deo tvrđenja poznate Abelove teoreme, u okviru koje je data i formula (koja je poznata kao Abelova formula) za determinantu Vronskog koja odgovara rešenjima linearne homogene jednačine $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$:

$$W_{y_1,y_2}(x) = c\, e^{-\int p(x)\, dx},$$

gde je c odgovarajuća konstanta koja zavisi od y_1 i y_2, ali ne zavisi od x.

Odatle direktno sledi da za $c = 0$ važi da je $W_{y_1,y_2}(x) = 0$, za svako $x \in I$, a da za $c \neq 0$ važi da je $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$, za svako $x \in I$. Još jedna direktna posledica je i tvrđenje:

Teorema 14.4. *Ako su funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ dva rešenja homogene linearne jednačine drugog reda na nekom intervalu I, tada važi:*

- *y_1 i y_2 su linearno nezavisne funkcije akko je $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$, za sve $x \in I$;*
- *y_1 i y_2 su linearno zavisne funkcije akko je $W_{y_1,y_2}(x) = 0$, za sve $x \in I$.*

Sledi veoma značajno tvrđenje o opštem rešenju homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda:

Teorema 14.5. *Ukoliko su funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ na nekom intervalu I dva linearno nezavisna rešenja homogene linearne jednačine drugog reda, onda je opšte rešenje te jednačine oblika $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$.*

Dokaz: Uočimo, prvo, razliku između tvrđenja Teoreme 14.2 i Teoreme 14.5.

Prva kaže da, polazeći od dva rešenja homogene linearne jednačine, možemo formirati još beskonačno mnogo rešenja te jednačine, formirajući sve moguće linearne kombinacije dva posmatrana rešenja.

Druga kaže da, polazeći od dva *linearno nezavisna* rešenja homogene linearne jednačine, možemo formirati *sva moguća* rešenja te jednačine, formirajući sve moguće linearne kombinacije polazna dva rešenja. Kada kažemo "sva moguća rešenja", mislimo na rešenja koja zadovoljavaju sve moguće početne uslove. Opšte rešenje, je, dakle, rešenje u kom se konstante C_1 i C_2 mogu odrediti tako da bude zadovoljen bilo koji postavljeni početni uslov.

Kako nema sumnje da linearna kombinacija $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ (linearno nezavisnih) rešenja y_1 i y_2 jeste rešenje posmatrane jednačine, jer to sledi već na osnovu Teoreme 14.2, ostaje da dokažemo da iz linearne nezavisnosti funkcija y_1 i y_2 sledi da se konstante C_1 i C_2 mogu odrediti tako da bude zadovoljen bilo koji postavljeni početni uslov.

Neka je početni uslov dat u obliku

$$y(x_0) = a\,, \qquad y'(x_0) = b\,.$$

Potrebno je pokazati da se uvek, na jedinstven način, mogu odrediti konstante C_1 i C_2 u izrazu $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ tako da je zadovoljeno da je

$$y(x_0) = C_1\, y_1(x_0) + C_2\, y_2(x_0) = a \qquad \text{i} \qquad y'(x_0) = C_1\, y_1'(x_0) + C_2\, y_2'(x_0) = b.$$

Ovim je generisan sistem linearnih jednačina u kom su promenljive C_1 i C_2, a determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W_{y_1,y_2}(x_0).$$

Kako su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine, znamo (na osnovu Teoreme 14.4) da za njihovu determinantu Vronskog važi da je $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$, za sve $x \in I$. To, naravno, znači da je $W_{y_1,y_2}(x_0) \neq 0$, odnosno, da je determinanta gornjeg sistema jednačina različita od nule, za svako x_0. To, dalje, znači da je posmatrani sistem jednoznačno rešiv, odnosno da se konstante C_1

i C_2 uvek mogu odrediti na jedinstven način, tako da proizvoljan početni uslov bude zadovoljen nekom funkcijom oblika $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$.

Ovo, konačno, znači da je $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ opšte rešenje posmatrane homogene jednačine, odnosno da je teorema dokazana.

Skup dva linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda zove se *fundamentalni skup (sistem) rešenja* te diferencijalne jednačine.

Primer 14.2. *Data je diferencijalna jednačina* $y'' + \dfrac{1}{x}\, y' - \dfrac{1}{x^2}\, y = 0$, *za* $x \neq 0$. *Proveriti da li funkcije* $y_1 = x$ *i* $y_2 = -\dfrac{1}{x}$ *čine fundamentalni skup rešenja ove jednačine. Formirati opšte rešenje posmatrane jednačine.*

Rešenje: Posmatrana jednačina je homogena, linearna, drugog reda. Date funkcije čine fundamentalni skup rešenja ove jednačine ukoliko zadovoljavaju jednačinu i uz to su linearno nezavisne.

Da bismo utvrdili da li su date funkcije y_1 i y_2 rešenja ove jednačine, uvrstićemo ih u jednačinu i to neposredno proveriti. Kako je $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$, $y_2' = \dfrac{1}{x^2}$ i $y_2'' = \dfrac{-2}{x^3}$, uvrštavanjem u jednačinu dobijamo

$$0 + \frac{1}{x} \cdot 1 - \frac{1}{x^2} \cdot x = 0, \quad \text{i} \quad \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{x} = 0,$$

i zaključujemo da posmatrane funkcije jesu rešenja jednačine.

Da bismo proverili linearnu nezavisnost ovih funkcija, posmatramo njihovu determinantu Vronskog:

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{x} \\ 1 & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{x} \neq 0\ , \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dakle, date funkcije su linearno nezavisna rešenja posmatrane jednačine, pa čine njen fundamentalni skup rešenja, koji je, prema tome $\{x, -\dfrac{1}{x}\}$.

Konačno, opšte rešenje date homogene linearne jednačine je linearna kombinacija elemenata fundamentalnog skupa rešenja, odnosno

$$y(x) = C_1\, x - C_2\, \frac{1}{x}.$$

Napomenimo, ipak, da smo do opšteg rešenja lako došli pre svega zato što smo dobili dva linearno nezavisna rešenja jednačine, pa je u ovom slučaju naš posao bio samo da potvrdimo da date funkcije zaista čine findamentalni skup, i da zatim napišemo njihovu linearnu kombinaciju. Najteži deo posla, određivanje linearno nezavisnih rešenja, nismo morali da radimo. U stvari, taj posao, u slučaju opšte linearne (homogene) jednačine, najčešće nećemo ni znati da uradimo. Prethodna priča bi, tako, prilično izgubila na značaju (šta vredi što znamo šta možemo da napravimo od funkcija y_1 i y_2, kad ne znamo da odredimo te funkcije!), kada ne bi postojala veoma važna specijalna klasa homogenih linearnih diferencijalnih jednačina, za koje ćemo lako određivati funkcije y_1 i y_2, odnosno fundamentalni skup rešenja. Kao što je već rečeno, to su linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima, i ubrzo ćemo se pozabaviti njima.

14.2.2 Nehomogena linearna jednačina drugog reda

Posmatrajmo sada nehomogenu linearnu jednačinu

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x). \tag{21}$$

Ukoliko znamo opšte rešenje homogenog dela jednačine, $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, za koje smo u prethodnom delu pokazali da je oblika $y_h = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$, možemo odrediti *opšte rešenje* nehomogene jednačine koristeći *metod varijacije konstanti.* Ovaj postupak ćemo u nastavku opisati, a zatim ilustrovati primerom.

Polazeći, dakle, od $y_h = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$, gde su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rešenja homogenog dela jednačine, a C_1 i C_2 proizvoljne konstante, pretpostavićemo da je opšte rešenje jednačine (21) oblika

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2.$$

To znači da sada posmatramo $C_1 = C_1(x)$ i $C_2 = C_2(x)$ kao funkcije promenljive x. Cilj je odrediti $C_1(x)$ i $C_2(x)$ tako da funkcija y zaista bude rešenje posmatrane nehomogene jednačine (21).

Da bismo uvrstili pretpostavljeno rešenje u jednačinu (21), potrebni su nam njegovi izvodi. Prvi izvod je, na osnovu pravila za izvod proizvoda,

$$y'(x) = C_1'(x)\, y_1 + C_1(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2 + C_2(x)\, y_2'.$$

S obzirom da imamo dve nepoznate funkcije ($C_1 = C_1(x)$ i $C_2 = C_2(x)$) i jednu jednačinu koju teba da zadovoljimo, imamo mogućnost da, zbog neodređenosti problema, postavimo pogodan dodatni uslov. Odlučićemo se za uslov

$$C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0, \tag{22}$$

koji dalje pojednostavljuje upravo izračunati prvi izvod:

$$y'(x) = C_1(x)\, y_1' + C_2(x)\, y_2'.$$

Dalje je drugi izvod ove funkcije

$$y''(x) = C_1'(x)\, y_1' + C_1(x)\, y_1'' + C_2'(x)\, y_2' + C_2(x)\, y_2''.$$

Ako sada dobijene izvode uvrstimo u jednačinu (21), dobijamo

$$C_1'(x)\, y_1' + C_1(x)\, y_1'' + C_2'(x)\, y_2' + C_2(x)\, y_2'' + p(x)\left(C_1(x)\, y_1' + C_2(x)\, y_2'\right) + q(x)\left(C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2\right) = f(x),$$

odnosno

$$C_1(x)\left(y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1\right) + C_2(x)\left(y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2\right) + C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x).$$

Kako su y_1 i y_2 rešenja jednačine $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, jasno je da su izrazi u zagradama uz C_1 i C_2 jednaki nuli, odnosno da važi

$$y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 = 0 \qquad \text{i} \qquad y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 = 0.$$

Tada mora važiti

$$C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x) \tag{23}$$

a ovo je još jedan uslov, uz uslov (22), koji koristimo za određivanje nepoznatih funkcija C_1 i C_2. U stvari, uslovi (22) i (23) predstavljaju sistem linearnih jednačina sa promenljivim $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$. Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$$

jer su funkcije y_1 i y_2 po pretpostavci linearno nezavisne. Sistem linearnih jednačina čija je determinanta različita od nule ima jedinstveno rešenje. To znači da iz ovog sistema na jednoznačan način dobijamo vrednosti za $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$. Njihovom direktnom integracijom dobijamo i vrednosti nepoznatih funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$. Uvrštavanjem u polazni oblik rešenja dobijamo opšte rešenje jednačine (21).

Primer 14.3. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Rešenje: Prvo je potrebno odrediti opšte rešenje homogenog dela posmatrane jednačine, $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$. Kako se ova homogena jednačina može napisati u obliku

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{y'}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy'}{y'} = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy'}{y'} = \int \frac{dx}{x},$$

dobijamo da je

$$\ln |y'| = \ln |C\, x| \qquad \text{odnosno} \qquad y' = C\, x.$$

Nakon još jedne integracije je

$$y = y_h = \int C\, x\, dx = C_1 x^2 + C_2,$$

gde smo koristili oznaku $\dfrac{C}{2} = C_1$. Dakle, ovu homogenu jednačinu smo relativno lako rešili (snižavanjem reda), a sada ostaje da odredimo i opšte rešenje date nehomogene jednačine polazeći od opšteg rešenja homogene. Uočavamo da funkcije $y_1 = x^2$ i $y_2 = 1$ predstavljaju elemente fundamentalnog sistema rešenja posmatrane homogene jednačine.

Posmatrajući

$$y(x) = C_1(x)\, x^2 + C_2(x) \tag{24}$$

cilj nam je da odredimo funkcije $C_1 = C_1(x)$ i $C_2 = C_2(x)$ tako da y bude rešenje date (nehomogene) jednačine.

Prateći sve što je prethodno urađeno u okviru opisa postupka varijacije konstanti, diferenciramo (dva puta) izraz za y i formiramo sistem linearnih jednačina sa nepoznatim C_1' i C_2':

$$\begin{aligned} C_1'\, x^2 + C_2' &= 0 \\ C_1'\, 2x &= x \end{aligned}$$

gde smo korisili da je u datoj diferencijalnoj jednačini $f(x) = x$.

Ovaj (trougaoni) sistem lako rešavamo i dobijamo da je

$$C_1' = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad C_2' = -\frac{1}{2}\, x^2.$$

Direktnom integracijom je dalje

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int dx = \frac{x}{2} + C_1,$$

i

$$C_2(x) = -\frac{1}{2} \int x^2\, dx = -\frac{x^3}{6} + C_2.$$

Konačno, opšte rešenje polazne nehomogene jednačine dobijamo uvrštavanjem ovih funkcija u izraz (24):

$$y(x) = (\frac{x}{2} + C_1)\, x^2 - \frac{x^3}{6} + C_2$$

odnosno

$$y(x) = C_1\, x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

Opšte rešnje $y = y(x)$ nehomogene linearne jednačine (21) možemo dobiti, polazeći od opšteg rešenja $y = y_h(x) = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ odgovarajuće homogene jednačine $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, na još jedan način osim koristeći metod varijacije konstanti. Može se pokazati da je to traženo opšte rešenje oblika

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + y_p\ , \tag{25}$$

gde je $y_p(x)$ jedno partikularno rešenje date nehomogene jednačine. O tome kako da odredimo to jedno partikularno rešenje ne možemo da kažemo mnogo u slučaju opšte linearne jednačine. Opet će, međutim, sve biti mnogo lakše za slučaj jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Da bismo dokazali da je tvrđenje/formula (25) o opštem obliku rešenja tačno, prvo uočavamo da važi tvrđenje

Teorema 14.6. *Ako su y_{p1} i y_{p2} dva partikularna rešenja nehomogene jednačine (21), onda je njihova razlika $y_{p1} - y_{p2}$ rešenje odgovarajuće homogene jednačine $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$. Pri tome, ako je $y_h(x) = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ opšte rešenje ove homogene jednačine, onda za svaki izbor dva partikularna rešenja y_{p1} i y_{p2} nehomogene jednačine (21) postoje konstante C_1 i C_2 takve da je za njih*

$$y_{p1} - y_{p2} = C_1\,y_1 + C_2\,y_2\ .$$

Dokaz: Kako su y_{p1} i y_{p2} partikularna rešenja nehomogene jednačine (21), ove funkcije zadovoljavaju jednačinu, odnosno, zadovoljeno je

$$y''_{p1} + p(x)\,y'_{p1} + q(x)\,y_{p1} = f(x) \qquad \text{i} \qquad y''_{p2} + p(x)\,y'_{p2} + q(x)\,y_{p2} = f(x)\ .$$

Formirajući razliku ovih jednakosti, dobijamo

$$(y''_{p1} - y''_{p2}) + p(x)\,(y'_{p1} - y'_{p2}) + q(x)\,(y_{p1} - y_{p2}) = 0\ ,$$

što, u stvari, znači da funkcija $y_{p1} - y_{p2}$ zadovoljava homogenu jednačinu $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ (odnosno, da je jedno njeno rešenje).

Kako je $y_h(x) = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ po pretpostavci opšte rešenje jednačine $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$, za svako partikularno rešenje te jednačine, pa i za upravo generisano $y_{p1} - y_{p2}$, važi da je oblika $C_1\,y_1 + C_2\,y_2$, za odgovarajući izbor konstanti C_1 i C_2.

Kako je sada jasno da je moguće napisati

$$y_{p1} - y_{p2} = y_h \qquad \Rightarrow \qquad y_{p1} = y_h + y_{p2},$$

lako je zaključiti da se, polazeći od jednog konkretnog partikularnog rešenje y_{p2} nehomogene jednačine (21), i opšteg rešenje $y_h(x) = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ odgovarajuće homogene jednačine, za odgovarajući izbor konstanti C_1 i C_2 mogu generisati sva ostala (partikularna) rešenja posmatrane nehomogene jednačine. Time smo pokazali da je formulom (25) zaista predstavljeno opšte rešenje jednačine (21). Na ovu formulu ćemo se oslanjati kada budemo rešavali nehomogene jednačine sa konstantnim koeficijentima.

14.2.3 Linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Da bismo odredili opšte rešenje linearne jednačine drugog reda, potrebna su nam dva linearno nezavisna rešenja njenog homogenog dela. Dalje, po opisanom postupku, linearna kombinacija ovih rešenja predstavlja opšte rešenje homogenog dela jednačine, koje označavamo sa y_h. Opšte rešenje nehomogene linearne jednačine dobijamo ili metodom varijacije konstanti, ili u obliku $y = y_h + y_p$, ukoliko znamo jedno partikularno rešenje y_p nehomogene jednačine. Zaključujemo da se ceo postupak rešavanje (nehomogenih) linearnih jednačina drugog reda oslanja na poznavanje dva linearno nezavisna rešenja homogenog dela jednačine. O tome kako odrediti dva takva rešenja nismo još rekli praktično ništa, osim da za jednačinu

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0,$$

u opštem slučaju, kada su p i q proizvoljne funkcije, standardni postupak ne postoji.

Ukoliko, međutim, posmatramo specijalnu klasu među linearnim jednačinama drugog reda - linearne difererencijalne jednačine drugog reda *sa konstantnim koeficijentima*, rešavanje postaje znatno jednostavnije. Tačnije, za ovu grupu jednačina postoji standardan, i uz to prilično jednostavan, algoritam rešavanja. Opisaćemo ga u nastavku.

Homogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Posmatramo, dakle, homogenu jednačinu oblika

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0\ , \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\ . \tag{26}$$

Pretpostavimo da ona ima rešenje koje je oblika $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Odredićemo uslov koji λ u tom slučaju mora da zadovoljava.

Funkcija $y = e^{\lambda x}$ treba da zadovoljava jednačinu (26). Uvrštavanjem, za $y' = \lambda\, e^{\lambda x}$ i $y'' = \lambda^2\, e^{\lambda x}$, dobijamo

$$\lambda^2\, e^{\lambda x} + a_1\, \lambda\, e^{\lambda x} + a_2\, e^{\lambda x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2)\, e^{\lambda x} = 0.$$

Odatle zaključujemo da će funkcija $y = e^{\lambda x}$ biti rešenje jednačine (26) za one vrednosti λ za koje je

$$\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2 = 0. \tag{27}$$

Prethodna jednačina zove se *karakteristična jednačina* diferencijalne jednačine (26). To je kvadratna jednačina koju lako rešavamo, i za koju znamo da ima dva rešenja. Označimo ih sa λ_1 i λ_2. Znamo da za dva rešenja kvadratne jednačine mogu da nastupe sledeći slučajevi:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 = \lambda_2$;
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Jasno je da su funkcije $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rešenja jednačine (26) u svim prethodno navedenim slučajevima. Međutim, ono što nam je potrebno da bismo formirali opšte rešenje ove jednačine je da na raspolaganju imamo njena dva *linearno nezavisna* rešenja. Za svaki od tri prethodno navedena slučaja ćemo posebno razmotriti ovo pitanje.

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   S obzirom da već znamo da (realne) funkcije $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ zadovoljavaju jednačinu (26), ostaje da utvrdimo da su ove funkcije linearno nezavisne.

   Posmatramo odgovarajuću determinantu Vronskog

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1\, e^{\lambda_1 x} & \lambda_2\, e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\ .$$

   Kako je, po pretpostavci, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, zaključujemo da je $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$, odnosno da su funkcije y_1 i y_2 linearno nezavisne. One, dakle, formiraju fundamentalni sistem rešenja, a njihova linearna kombinacija je opšte rešenje jednačine (26):

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\ .$$

   Primer 14.4. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' + y' - 2y = 0$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina date homogene difrencijalne jednačine je

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

   a njena rešenja su

$$\lambda_1 = -2 \qquad \text{i} \qquad \lambda_2 = 1.$$

Ova rešenja su realna i različita, pa je fundamentalni skup rešenja date jednačine $\{e^{-2x}, e^x\}$, a opšte rešenje date jednačine je

$$y(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^x.$$

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 = \lambda_2$

I u ovom slučaju je $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ rešenje jednačine (26). Pokazaćemo da je drugo, linearno nezavisno, rešenje te jednačine funkcija $y_2 = x\, e^{\lambda_1 x}$ (jasno je da nema smisla koristiti vrednost λ_2, jer bismo, koristeći već opisani postupak, time generisali dva jednaka rešenja, koja svakako nisu linearno nezavisna). Da je $y_2 = x\, e^{\lambda_1 x}$ rešenje polazne jednačine utvrdićemo direktnim uvrštavanjem. Uočavajući da je

$$y_2' = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \qquad \text{i} \qquad y_2'' = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2\, x e^{\lambda_1 x},$$

uvrštavanjem u jednačinu (26) dobijamo:

$$(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x + a_1 + a_1\lambda_1 x\ + a_2 x)\, e^{\lambda_1 x} = 0$$

što je identički zadovoljeno jer je

$$2\lambda_1 + a_1 + (\lambda_1^2\ + a_1\lambda_1\ + a_2)x = 0.$$

Poslednje važi zato što je

$$\lambda_1^2\ + a_1\, \lambda_1\ + a_2 = 0$$

jer je λ_1 rešenje karakteristične jednačine (27), a

$$2\lambda_1 + a_1 = 0$$

jer je λ_1 dvostruko rešenje jednačine (27). Ovo poslednje tvrđenje sledi, recimo, na osnovu Vijetove formule za zbir rešenja jednačine: $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_1 = \dfrac{-a_1}{1}$. Ostaje još da ispitamo linearnu zavisnost ova dva rešenja jednačine (26). Determinanta Vronskog za funkcije $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = x\, e^{\lambda_1 x}$ je

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x\, e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1\, e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x\, e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\lambda_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_1 & 1 + \lambda_1\, x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x - \lambda_1 x) = e^{2\lambda_1 x} \neq 0.$$

Zaključujemo da su posmatrane funkcije linearno nezavisne, odnosno da formiraju fundamentalni sistem rešenja jednačine (26). To znači da je u slučaju kada su koreni karakteristične jednačine realni i jednaki, opšte rešenje ove jednačine

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Primer 14.5. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina date homogene difrencijalne jednačine je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

a njena rešenja su

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Ova rešenja su realna i jednaka, pa je fundamentalni skup rešenja date jednačine $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$, a opšte rešenje date jednačine je

$$y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2 x\, e^{2x}.$$

3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \ \ \lambda_1 = \alpha + \beta i, \ \ \lambda_2 = \alpha - \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

U ovom slučaju rešenje jednačine koje dobijamo za vrednost karakterističnog korena je kompleksna funkcija

$$y = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\, e^{\beta x i} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\ .$$

(Koristili smo Ojlerovu formulu prema kojoj je $e^{xi} = \cos x + i\sin x$.)

S obzirom da nam ne odgovaraju kompleksna rešenja (elementi fundamentalnog sistema koji su kompleksne funkcije), uočićemo važnu osobinu jednačine (26):
Ako je $y(x) = u(x) + i\ v(x)$ kompleksna funkcija koja zadovoljava jednačinu (26), onda tu jednačinu zadovoljavaju i realni deo u i imaginarni deo v ove kompleksne funkcije.
Ovo se lako potvrđuje direktnim uvrštavanjem, koristeći da je $y' = u' + iv'$ i $y'' = u'' + iv''$. Tada

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u'' + iv'' + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0$$

odnosno

$$u'' + a_1\, u' + a_2\, u + i(v'' + a_1\, v' + a_2\, v) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u'' + a_1\, u' + a_2\, u = 0 \quad \text{i} \quad v'' + a_1\, v' + a_2\, v = 0$$

(jer je kompleksan broj jednak nuli akko mu je realni i imaginarni deo jednak nuli).

Ovu osobinu koristimo da zaključimo da su funkcije

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{i} \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

rešenja jednačine (26), kao realni i imaginarni deo kompleksnog rešenja $e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ koje smo prethodno uočili. Pokazaćemo da su ove funkcije linearno nezavisne i da, prema tome, formiraju fundamentalni skup rešenja jednačine (26).

Determinanta Vronskog za funkcije $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ je

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha\ e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha\ e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\ \cos\beta x - \beta\ \sin\beta x & \alpha\ \sin\beta x + \beta\ \cos\beta x \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha\ \sin\beta x\ \cos\beta x + \beta\ \cos^2\beta x - \alpha\ \sin\beta x\ \cos\beta x + \beta\ \sin^2\beta x) = e^{2\alpha x}\cdot\beta \neq 0,$$

jer je $\beta \neq 0$, budući da je to imaginarni deo po pretpostavci kompleksnog karakterističnog korena.

Dakle, uočena rešenja su linearno nezavisna, pa se opšte rešenje jednačine (26) u slučaju kada su karakteristični koreni konjugovano-kompleksni, može napisati u obliku

$$y(x) = C_1\ e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2\ e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Uočimo da se, polazeći od konjugovano-kompleksnog rešenja $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ dolazi do istih funkcija fundamentalnog sistema, pa nema nikakvog značaja, ni potrebe, uzimati ga posebno u obzir. To znači da nam je jedno kompleksno rešenje dovoljno da formiramo fundamentalni sistem i opšte rešenje polazne jednačine.

Primer 14.6. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina date homogene difrencijalne jednačine je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

a njena rešenja su

$$\lambda_1 = -1 + 2i \qquad \text{i} \qquad \lambda_2 = -1 - 2i.$$

Ova rešenja su konjugovano-kompleksna, pa je fundamentalni skup rešenja date jednačine $\{e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x$
a opšte rešenje date jednačine je

$$y(x) = C_1\, e^{-x}\cos 2x + C_2\, e^{-x}\sin 2x.$$

Nehomogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Već nam je poznata formula (25), koja omogućava da opšte rešenje nehomogene linearne jednačine dobijemo u obliku $y = y_h + y_p$, gde je y_h opšte rešenje homogenog dela jednačine, a y_p jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine. Sada znamo da se opšte rešenje homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima relativno lako dobija. Ostaje da navedemo kako se može odrediti jedno partikularno rešenje nehomogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Metod neodređenih koeficijenata zasniva se na tome da se, za određene oblike funkcije f u jednačini

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f(x)\ , \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \tag{28}$$

zna *oblik* partikularnog rešenja y_p, a onda preostaje da se nepoznati *koeficijenti* koji figurišu u funkciji y_p odrede tako da y_p zadovoljava jednačinu (28).

Može se, dakle, pokazati, da

- za $f(x) = P_n(x)\, e^{ax}$ jednačina (28) ima partikularno rešenje oblika $y_p = x^s Q_n(x)\, e^{ax}$, gde su P_n i Q_n polinomi n-tog stepena, a s višestrukost karakterističnog korena a karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine. Ovde je dakle, P_n dati polinom, a Q_n polinom istog stepena kao P, ali sa nepoznatim koeficijentima. Ukoliko a nije karakteristični koren, koristimo $s = 0$.
- za $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\ \cos bx + Q_m(x)\ \sin bx)$ jednačina (28) ima partikularno rešenje oblika $y_p = x^s\ e^{ax}(R_l(x)\ \cos bx + S_l(x)\ \sin bx)$, gde su P_n i Q_m polinomi n-tog, odnosno m-tog stepena, R_l i S_l su polinomi l-tog stepena, pri čemu je $l = \max\{n, m\}$, a s višestrukost karakterističnog korena $a + bi$ karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine. Polinomi P i Q su poznati, a R i S imaju nepoznate koeficijente. Ukoliko $a + bi$ nije karakrteristični koren, koristimo $s = 0$.

Ovde napominjemo da jednačina drugog reda ne može imati višestruke kompleksne karakteristične korene, ali će ovakav slučaj biti moguć pri rešavanju linearnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima. Kako sve ostalo što se tiče metoda neodređenih koeficijenata ostaje nepromenjeno, najprirodnije je odmah izložiti kompletan rezultat (umesto da ga kasnije dopunjavamo).

Dokaz da navedeno važi (odnosno, da se za navedene oblike funkcije f nepoznate konstante u pretpostavljenom obliku y_p uvek mogu jednoznačno odrediti tako da y_p bude partikularno rešenje jednačine (28)) nećemo navoditi. Prikazaćemo, umesto toga, neke ilustrativne primere.

Primer 14.7. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

1. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$;
2. $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$;
3. $y'' - 3y' - 4y = -8xe^{4x}\cos x$.

Rešenje: Kako svim navedenim jednačinama odgovara ista homogena jednačina $y'' - 3y' - 4y = 0$, odnosno ista karakteristična jednačina $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, čija su rešenja $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 4$, zaključujemo da je, u sva tri slučaja, rešenje homogenog dela jednačine

$$y_h(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x}\ .$$

Partikularna rešenja će se razlikovati u svakom od tri slučaja, pa ćemo ih posebno razmotriti. Uočavamo takođe da se u sva tri slučaja do partikularnog rešenja može doći metodom neodređenih koeficijenata, s obzirom na odgovarajući oblik funkcije f za svaku od jednačina.

1. Funkcija $f(x) = 3e^{2x}$ je oblika $f(x) = P_n(x)\, e^{ax}$, za stepen polinoma $n = 0$, $a = 2$ i $s = 0$ (jer $a = 2$ nije karakteristični koren homogene jednačine). To znači da partikularno rešenje y_p očekujemo u obliku
$$y_p(x) = A\, e^{2x}$$
i da nam je zadatak da odredimo koeficijent A; to je pretpostavljeni polinom Q, koji je u ovom slučaju nultog stepena.

   Konstantu A određujemo tako da pretpostavljeno rešenje y_p zadovoljava datu nehomogenu jednačinu, dakle - uvrštavanjem i izjednačavanjem koeficijenata. Tako dobijamo:
$$y_p'(x) = 2A\, e^{2x} \qquad\qquad y_p''(x) = 4A\, e^{2x}\ ,$$
a uvrštavanjem je
$$4A\, e^{2x} - 3 \cdot 2A\, e^{2x} - 4A\, e^{2x} = 3e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad -6A\, e^{2x} = 3e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{2}.$$
To znači da je traženo partikularno rešenje nehomogene jednačine
$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\, e^{2x},$$
a opšte rešenje te jednačine
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x} - \frac{1}{2}\, e^{2x}.$$

2. U ovom slučaju je $f(x) = 2\sin x$ oblika $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\, \cos bx + Q_m(x)\, \sin bx)$, za $a = 0$, $b = 1$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = 2$, $n = m = 0$. Kako je $l = \max\{n, m\} = 0$ (dakle, polinomi R i S su konstante), i $s = 0$ jer $a + bi = i$ nije karakteristični koren homogene jednačine, partikularno rešenje y_p očekujemo u obliku
$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x.$$
Uvrštavanjem određujemo konstante A i B.
$$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x \qquad\qquad y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x,$$
a dalje je
$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x,$$
$$(-5A - 3B)\cos x + (-5B + 3A)\sin x = 2\sin x.$$
Izjednačavanjem koeficijenata uz trigonometrijske funkcije, dobijamo sistem jednačina
$$-5A - 3B = 0 \qquad \text{i} \qquad 3A - 5B = 2.$$

Rešenje ovog sistema je $A = \frac{3}{17}$, $B = -\frac{5}{17}$, pa je partikularno rešenje nehomogene jednačine

$$y_p(x) = \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x,$$

a opšte rešenje posmatrane nehomogene jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x.$$

3. I ovde je $f(x) = -8xe^{4x}\cos x$ oblika $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\,\cos bx + Q_m(x)\,\sin bx)$, za $a = 4$, $b = 1$, $P_n(x) = -8x$, $Q_m(x) = 0$, $n = 1$, $m = 0$. Kako je $l = \max\{n, m\} = 1$, i $s = 0$ jer $a + bi = 4 + i$ nije karakteristični koren homogene jednačine (uočimo da $a = 4$ jeste karakteristični koren jednačine, ali se u slučaju ovog oblika funkcije f pitanje postavlja o kompleksnom korenu $a + bi$), partikularno rešenje y_p očekujemo u obliku

$$y_p(x) = (Ax + B)e^{4x}\cos x + (Cx + D)e^{4x}\sin x.$$

Dalje je

$$y_p'(x) = [(4Ax + Cx + A + 4B + D)\cos x + (-Ax + 4Cx - B + C + 4D)\sin x]\; e^{4x},$$

$$y_p''(x) = [(15Ax+8Cx+8A+15B+2C+8D)\cos x+(-8Ax+15Cx-2A-8B+8C+15D)\sin x]\; e^{4x},$$

Uvrštavanjem vrednosti za funkciju i izvode u polaznu jednačinu, i izjednačavanjem koeficijenata uz trigonometrijske funkcije, dobijamo

$$-Ax + 5Cx + 5A - B + 2C + 5D = -8x \qquad \text{i} \qquad -5Ax - Cx - 2A - 5B + 5C - D = 0\,,$$

a izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene polinoma, dobijamo sistem linearnih jednačina iz kojeg se jednoznačno dobijaju nepoznati koeficijenti A, B, C, D:

$$-A + 5C = -8\,, \quad -5A - C = 0\,, \quad 5A - B + 2C + 5D = 0\,, \quad -2A - 5B + 5C - D = 0,$$

odakle je

$$A = \frac{4}{13}, \qquad B = -\frac{280}{169}\,, \qquad C = -\frac{20}{13}\,, \qquad D = -\frac{4}{169}.$$

Na osnovu svega ovoga je

$$y_p(x) = \left(\frac{4}{13}\,x - \frac{280}{169}\right) e^{4x}\cos x + \left(-\frac{20}{13}x - \frac{4}{169}\right) e^{4x}\sin x,$$

i konačno

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x} + \left(\frac{4}{13}\,x - \frac{280}{169}\right) e^{4x}\cos x + \left(-\frac{20}{13}x - \frac{4}{169}\right) e^{4x}\sin x.$$

Ukoliko je u jednačini $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f(x)$ funkcija f zbir dve funkcije, odnosno $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, partikularno rešenje jednačine (28) možemo tražiti u obliku zbira dva sabirka $y_p = y_{p1} + y_{p2}$, pri čemu je y_{p1} partikularno rešenje jednačine $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f_1(x)$, a y_{p2} partikularno rešenje jednačine $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f_2(x)$. Ovo tvrđenje se lako proverava direktnim uvrštavanjem i važi za proizvoljan broj sabiraka čija je suma funkcija f.

Primer 14.8. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\sin x$.

Rešenje: U ovom slučaju je $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 3e^{2x} + 2\sin x$, pa problem rešavamo rešavajući zasebno dve jednačine,

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \qquad \text{i} \qquad y'' - 3y' - 4y = 2\sin x.$$

Na osnovu rezultata prethodnog primera, znamo da je jedno partikularno rešenje prve jednačine $y_{p1}(x) = -\dfrac{1}{2}\, e^{2x}$ a da je jedno partikularno rešenje druge jednačine $y_{p2}(x) = \dfrac{3}{17}\cos x - \dfrac{5}{17}\sin x$. To znači da je jedno partikularno rešenje polazne jednačine iz ovog primera

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = -\frac{1}{2}\, e^{2x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x,$$

a opšte rešenje polazne jednačine je tada

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x} - \frac{1}{2}\, e^{2x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x.$$

Naglasili smo da se metod neodređenih koeficijenata može primeniti za određivanje partikularnog rešenja jednačine samo ako je funkcija f specijalnog oblika, kao što je prethodno navedeno. Ukoliko to nije slučaj, za funkciju f u opštem slučaju preostaje nam da primenimo metod varijacije konstanti, koji smo opisali u prethodnom delu teksta. Ovaj metod je opštiji i može se primeniti na svaki oblik funkcije f. S obzirom da zahteva malo više tehničkog posla, verovatno je da ćemo prednost dati metodu neodređenih koeficijenata, u slučajevima kada smo u mogućnosti da biramo.

Primer 14.9. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

Rešenje: Homogena jednačina koja odgovara datoj linearnoj jednačini je $y'' - 2y' + y = 0$, njena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, a karakteristični koreni su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2 x\, e^x.$$

Kako u ovom slučaju funkcija $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ nije oblika na koji se može primeniti metod neodređenih koeficijenata, opšte rešenje posmatrane nehomogene jednačine odredićemo metodom varijacije konstanti.

Posmatramo

$$y(x) = C_1(x)\, e^x + C_2(x) x\, e^x,$$

određujemo prvi izvod

$$y'(x) = C_1'(x)\, e^x + C_1(x)\, e^x + C_2'(x) x\, e^x + C_2(x)(e^x + x\, e^x),$$

i postavljamo uslov

$$C_1'(x)\, e^x + C_2'(x) x\, e^x = 0. \tag{29}$$

Tada je

$$y'(x) = C_1(x)\, e^x + C_2(x)(e^x + x\, e^x),$$

i dalje je

$$y''(x) = C_1'(x)\, e^x + C_1(x)\, e^x + C_2'(x)(e^x + x\, e^x) + C_2(x)(2e^x + x\, e^x)\ .$$

Uvrštavanjem u jednačinu dobijamo da mora biti zadovoljen uslov

$$C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)(e^x + x\, e^x) = \frac{e^x}{1+x^2}. \tag{30}$$

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina, (29) i (30), po C_1' i C_2', dobijamo

$$C_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + C_2 \ ,$$

i

$$C_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(x) = -\int \frac{x\ dx}{1+x^2} = -\ln\sqrt{1+x^2} + C_1.$$

Uvrštavanjem ovih funkcija, dobijamo opšte rešenje polazne jednačine

$$y(x) = (\text{arctg}\, x + C_2)\ e^x + (C_1 - \ln\sqrt{1+x^2})x\ e^x = C_2\ e^x + C_1 x\ e^x\ + e^x\ (\text{arctg}\, x - x\ \ln\sqrt{1+x^2}).$$

14.3 Linearna diferencijalna jednačina višeg reda