$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.
2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 4$, jedan koren mu je i, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 1$ je -20. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.
3. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z})$.

$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.
2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 4$, jedan koren mu je i, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 1$ je -20. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.
3. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z})$.

$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.
2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 4$, jedan koren mu je i, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 1$ je -20. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.
3. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z})$.

$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.
2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 4$, jedan koren mu je i, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 1$ je -20. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.
3. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z})$.

$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.
2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 4$, jedan koren mu je i, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 1$ je -20. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.
3. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z})$.

$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Za skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ su permutacije $s_i : A \to A$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definisane sa
$s_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$, $s_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.
Ispitati sve aksiome komutativne grupe na $(S, \circ)$, gde je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, a $\circ$ je kompozicija funkcija.

2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 9$, jedan koren mu je $2i$, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 2$ je -10. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.

3. Rešiti po $w \in \mathbb{C}$ jednačinu $w \cdot \overline{w} + 1 = i(w + \overline{w})$.

$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Za skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ su permutacije $s_i : A \to A$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definisane sa
$s_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$, $s_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.
Ispitati sve aksiome komutativne grupe na $(S, \circ)$, gde je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, a $\circ$ je kompozicija funkcija.

2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 9$, jedan koren mu je $2i$, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 2$ je -10. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.

3. Rešiti po $w \in \mathbb{C}$ jednačinu $w \cdot \overline{w} + 1 = i(w + \overline{w})$.

$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Za skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ su permutacije $s_i : A \to A$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definisane sa
$s_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$, $s_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.
Ispitati sve aksiome komutativne grupe na $(S, \circ)$, gde je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, a $\circ$ je kompozicija funkcija.

2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 9$, jedan koren mu je $2i$, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 2$ je -10. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.

3. Rešiti po $w \in \mathbb{C}$ jednačinu $w \cdot \overline{w} + 1 = i(w + \overline{w})$.

$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 **05.12.2021.**

1. Za skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ su permutacije $s_i : A \to A$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definisane sa
$s_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$, $s_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.
Ispitati sve aksiome komutativne grupe na $(S, \circ)$, gde je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, a $\circ$ je kompozicija funkcija.

2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 9$, jedan koren mu je $2i$, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 2$ je -10. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.

3. Rešiti po $w \in \mathbb{C}$ jednačinu $w \cdot \overline{w} + 1 = i(w + \overline{w})$.

$\boxed{\text{A}}$ **REŠENJA**

1. Izračunavanjem kompozicija funkcija f_1, f_2, f_3, f_4, gde je f_3 identička funkcija, dobijamo Kejlijevu tablicu

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_3 & f_4 & f_1 & f_2 \\ f_2 & f_4 & f_3 & f_2 & f_1 \\ f_3 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_4 & f_2 & f_1 & f_4 & f_3 \end{array}.$$

U unutrašnjosti tablice su svi elementi iz skupa $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, te je $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ grupoid. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija (teorema). Neutralni element je identička funkcija f_3 (vidi se i iz tablice jer su mu vrsta i kolona jednaki graničnim). Iz tablice očitavamo da je $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$ i $f_4^{-1} = f_4$. Tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu te je operacija $\circ$ komutativna na skupu $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

2. Kako je i koren polinoma P, to i $\overline{i} = -i$ mora biti koren polinom P, te je P deljiv i sa $(x-i)(x+i) = x^2+1$. Dakle, deljiv je sa $(x^2+4)(x^2+1)$. Kako je P polinom 5-og stepena, sledi da je oblika $P(x) = (x^2+4)(x^2+1)(x-\alpha)$. Ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x-1$ je -20, što znači da je $P(1) = -20$. Uvrštavajući 1 u $P(x) = (x^2+4)(x^2+1)(x-\alpha)$ dobijamo $P(1) = (1^2+4)(1^2+1)(1-\alpha) = 10 - 10\alpha = -20$, odakle dobijamo $\alpha = 3$.

   Kako su koreni polinoma x^2+4 kompleksni brojevi $\pm 2i$, a koreni polinoma x^2+1 su kompleksni brojevi $\pm i$, sledi da je $P(x) = (x^2+4)(x^2+1)(x-3)$ faktorizacija polinoma P nad $\mathbb{R}$, a faktorizacija nad $\mathbb{C}$ glasi $P(x) = (x-2i)(x+2i)(x-i)(x+i)(x-3)$.

3. Za $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ je

$$z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z}) \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)(x-iy)+1 = -i((x+iy)-(x-iy))$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 = -2yi^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2y+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=0 \ \wedge \ y=1)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = i.$$

$\boxed{\text{B}}$ **REŠENJA**

1. Računajući kompozicije navedenih funkcija, dobijamo Kejlijevu tablicu grupoida $(S, \circ)$, gde se iz tablice vidi zatvorenost operacije $\circ$ na skupu S.

$\circ$	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4
s_2	s_2	s_3	s_4	s_1
s_3	s_3	s_4	s_1	s_2
s_4	s_4	s_1	s_2	s_3

Kompozicija funkcija je uvek asocijativna operacija (što je teorema), a komutativna je na skupu S jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Neutralni element je s_1 jer je to identička funkcija skupa S, a vidi se i po tome što su mu vrsta i kolona jednaki graničnoj vrsti tj. koloni. Iz tablice vidimo da je $s_1^{-1} = s_1$, $s_2^{-1} = s_4$, $s_3^{-1} = s_3$ i $s_4^{-1} = s_2$. Dakle, $(S, \circ)$ je komutativna grupa.

2. Kako je $2i$ koren polinoma P, to i $\overline{2i} = -2i$ mora biti koren polinom P, te je P deljiv i sa $(x-2i)(x+2i) = x^2+4$. Dakle, deljiv je sa $(x^2+9)(x^2+4)$. Kako je P polinom 5-og stepena, sledi da je oblika $P(x) = (x^2+9)(x^2+4)(x-\alpha)$. Ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x-2$ je -10, što znači da je $P(2) = -10$. Uvrštavajući 2 u $P(x) = (x^2+9)(x^2+4)(x-\alpha)$ dobijamo $P(2) = (2^2+9)(2^2+4)(1-\alpha) = 104 - 104\alpha = -10$, odakle dobijamo $\alpha = \frac{114}{104} = \frac{57}{52}$.

   Kako su koreni polinoma x^2+9 kompleksni brojevi $\pm 3i$, a koreni polinoma x^2+4 su kompleksni brojevi $\pm 2i$, sledi da je $P(x) = (x^2+9)(x^2+4)(x-\frac{57}{52})$ faktorizacija polinoma P nad $\mathbb{R}$, a faktorizacija nad $\mathbb{C}$ glasi $P(x) = (x-3i)(x+3i)(x-2i)(x+2i)(x-\frac{57}{52})$.

3. Za $w = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ je

   $w \cdot \overline{w} + 1 = i\,(w + \overline{w}) \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)\cdot(x-iy) + 1 = i\,((x+iy)+(x-iy))$

   $\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 = 2xi \quad \Leftrightarrow \quad \big(x^2+y^2+1\big) - 2xi = 0$

   $\Leftrightarrow \quad \big(x^2+y^2+1 = 0 \;\wedge\; -2x = 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(x = 0 \;\wedge\; y^2+1 = 0\big),$

   gde ne postoji $y \in \mathbb{R}$ takvo da je $y^2+1 = 0$, te polazna jednačina nema rešenja po $z = x+iy \in \mathbb{C}$.