$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 2 23.01.2022.

1. Date su tačke $A(1,0,1)$ i $B(0,1,1)$, i ravan $\alpha : x+y+z=0$. Odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan i ravan trougla ABC bude paralelna sa ravni α.

2. Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina:
$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$
potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.

3. Neka je $\vec{a}=(a,2,-1)\in\mathbb{R}^3$, i neka je funkcija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definisana sa
$f(x,y,z)=(((x,y,z)\times\vec{a})\cdot(1,2,3))\cdot(3,-2)$.
Dokazati da je f linearna transformacija, i diskutovati njen rang po parametru $a\in\mathbb{R}$.

REŠENJA

1. Vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha=(1,1,1)$. Kako je
$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(0,1,1)-(1,0,1)=(-1,1,0),\qquad \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_\alpha=(-1,1,0)\cdot(1,1,1)=0,$
sledi da je $\overrightarrow{AB}\parallel\alpha$, te postoji rešenje zadatka. Neka je S sredina duži AB. Kako je ravan trougla ABC paralelna sa ravni α, sledi da je $\overrightarrow{SC}\parallel\alpha$ odnosno $\overrightarrow{SC}\perp\vec{n}_\alpha$. S druge strane je $\overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{AB}$, te je
$$\overrightarrow{SC}\parallel\vec{m}=\vec{n}_\alpha\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=(-1,-1,2).$$
SC je visina jednakostraničnog trougla stranice AB, te je $|\overrightarrow{SC}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|$. Tako dobijamo
$$\vec{r}_S=\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)=\frac{1}{2}((1,0,1)+(0,1,1))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),$$
$$\vec{r}_{C_1,C_2}=\vec{r}_S\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|(-1,1,0)|\frac{(-1,-1,2)}{|(-1,-1,2)|}$$
$$=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\frac{(-1,-1,2)}{\sqrt{6}}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\pm\frac{1}{2}(-1,-1,2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\pm(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1),$$
$$\vec{r}_{C_1}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)+(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)=(0,0,2),\qquad \vec{r}_{C_2}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)-(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)=(1,1,0)$$
(zadatak ima dva rešenja).

2. Nakon što prvu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na drugu, prvu jednačinu oduzmemo od treće, a zatim drugu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem
$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$
čiji je skup rešenja $\qquad \mathcal{R}=\{(\alpha,\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(1,1,1)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Lin}((1,1,1))$.
Sledi da je $\mathcal{R}$, kao lineal, potorostor prostora $\mathbb{R}^3$ (teorema). Jedna baza mu je $\{(1,1,1)\}$ jer je, kao lineal nad $(1,1,1)$, skup $\mathcal{R}$ generisan sa $(1,1,1)$, a vektor $(1,1,1)\neq\vec{0}$ je i linearno nezavisan.

3. $f(x,y,z)=(((x,y,z)\times\vec{a})\cdot(1,2,3))\cdot(3,-2)=((-y-2z,x+az,2x-ay)\cdot(1,2,3))\cdot(3,-2)$
$=(8x-(3a+1)y+(2a-2)z)\cdot(3,-2)$
$=(24x-3(3a+1)y+6(a-1)z,-16x+2(3a+1)y-4(a-1)z)$.
Iz izraza kojima je funkcija f definisana vidimo da jeste linearna transformacija sa matricom
$$M_f=\begin{bmatrix}24&-3(3a+1)&6(a-1)\\-16&2(3a+1)&-4(a-1)\end{bmatrix}.$$
Ako prvu vrstu matrice M_f pomnoženu sa $\frac{2}{3}$ dodamo drugoj vrsti, dobijamo da je
$$M_f\sim\begin{bmatrix}24&-3(3a+1)&6(a-1)\\0&0&0\end{bmatrix},$$
odakle sledi da je $\mathrm{rang}(M_f)=1$ za svako $a\in\mathbb{R}$.