Glava 1

Pricipi aktuarske matematike

Osnovu aktuarske matematike čine finasijska matematika i tablice smrtnosti. Kako je finasijska matematika obrađena u ptrehodnoj glavi, objasnimo ukratko šta su to tablice smrtnosti (Nalaze se nakraju).

Kao što se vidi iz samih tablica u prvoj koloni označenoj sa x nalaze se brojevi 10,11,12,13,...,99, koji označavaju broj godina starosti posmatranih lica. U drugoj koloni, označenoj sa l_x nalaze se redom brojevi koji pokazuju koliko ima živih ljudi iz posmatrane populacije koji su stari redom 10,11,12,13,...,99 godina. Prema tome

Definicija 1.1 *Broj l_x predstavlja broj živih lica starih x godina.*

Definicija 1.2
Broj d_x predstavlja broj umrlih lica u toku $x+1-$ ve godine, odnosno broj umrlih lica koji su doživeli x godina, a ni su doživeli $x+1$ godina.

Posledica 1.3 $\quad d_x = l_x - l_{x+1}$

Mnoge institucije mnogih zemalja prave tablice smrtnosti za svoje potrebe. Ovde se nećemo upuštati u tehnologiju konstruisanja tablica smrtnosti, već ćemo odmah preći na njihove primene uz pomoć verovatnoće i finansijske matematike.

Primer 1.4
Kolika je verovatnoća da lice staro x godina doživi x+1 godina?

Kako od l_x živih lica njih živih ostane l_{x+1}, to je tražena verovatnoća u oznaci p_x jednaka $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

Primer 1.5 *Kolika je verovatnoća da lice staro x godina živeti još tačno n godina?*

Kako od l_x živih lica, njih živih kroz n ostane l_{x+n}, to je tražena verovatnoća u oznaci ${}_np_x$ jednaka ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$.

A 1.6 Verovatno trajanje života

Koliko će još verovatno godina živeti lice staro x godina?

Pretpostavimo da će živeti verovatno još n godina. Tada je logično da reč verovatno shvatimo u smislu da je njih pola doživelo starost od $x + n$ godina. Prema tome imamo da je:

$$l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$$

Primer 1.7 *Koliko će još* verovatno *živeti lice staro* 50 *godina?*

Iz $l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$ sledi $l_{50+n} = \frac{l_{50}}{2} = \frac{69\,517}{2} = 34\,785,5$. Međutim iz tablice smrtnosti 17 engleskih društava sledi da je $l_{71} < 34\,785,5 < l_{70}$ tj. $l_{71} < l_{50+n} < l_{70}$, što znači $70 < 50 + n < 71$ i $20 < n < 21$, pa će posmatrano lice živeti još verovatno između 20 i 21 godina.

A 1.8 Utvrđivanje tarifa premije tj. mize za obezbeđenje rente

1. Premiju odnosno mizu osiguranik može uplatiti jednokratno zbog dobijanja rente, a može da vrši plaćanje i u ratama.

2. Prema početku primanja renta može biti neposredna, što znači prima je odma nakon uplate premije ili odložena za neki vremenski period.

3. Prema završetku primanja rente, ona može biti doživotna ili privremena.

4. U zavisnosti da li se prima na početku ili na kraju godine, zove se redom anticipativna renta i dekurzivna renta.

5. Renta je lična ako je dobija samo osiguranik dok je živ, a ne njegovi naslednici.

U svim obračunima računaćemo samo neto premije tj. mize.

Lako se dalje obračunavaju troškovi akvizicije, administracije i inkaso troškovi, čijim dodavanjem na neto premiju, dobija se bruto premija.

Svaki od sledećih obračuna je ustvari jedan zadatak iz finasijske matematike uz korišćenje tablica smrtnosti.

A 1.9 Neposredna doživotna lična renta

Neka je R renta koju dobija osiguranik svake godine, jer je izvršio jednokratnu uplatu mize M. Izračunajmo mizu M ako se renta prima početkom svake godine (anticipativno) i korišćenjem tablica smrtnosti 17 engleskih društava.

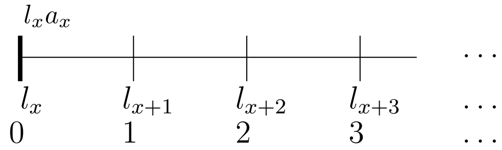
Neka se u nekom osiguravajućem društvu pojavilo l_x ljudi (naravno živih) i svi stari x godina. Oni su odlučili da se svi osiguraju na isti način i to neposrednom doživotnom ličnom rentom.

Označimo sa a_x premiju koju mora da uplati svako od l_x lica da bi dobijali na početku svake godine po 1 dinar sve dokraja života.

Sada zbir svih uplata osiguranika, sa jedne strane, mora biti jednak zbiru svih isplata osiguravajućega društva sa druge strane, naravno sve u istom vremenskom trenutku tj. moraju se sve uplate i islplate eskontovati ili diskontovati na isto vreme tj. na primer, na datum označen širokom crticom na vremenskoj osi.

Označimo na vremenskoj osi sa 0 trenutak kada je svako od l_x lica osiguravajućem društvu uplatilo po a_x dinara i kada je istovremeno svaki od njih dobio po 1 dinar odnosno društvo isplatilo ukupno l_x dinara. Dalje redom sa $1, 2, 3, \ldots$ označimo trenutke na vremenskoj osi nakon jedne, dve, tri, $\ldots$ godina, kada je društvo svim preživelima isplaćivalo, svakom po jedan dinar, redom ukupno po l_{x+1}, l_{x+2}, $l_{x+3}, \ldots$

dinara.



$$l_x a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \dots$$

Iznad vremenske ose, na odgovarajućem mestu, upisujemo vrednosti koje su uplatili osiguranici, a ispod vremenske ose, na odgovarajućim mestima, upisujemo sve vrednosti koje isplaćuje osiguravajuće društvo osiguranicima.

Kako su isplate anticipativne, to u trenutku 0 osiguravajuće društvo mora da isplati svakom od l_x lica po jedan dinar tj. ukupno l_x dinara. U trenutku 1 osiguravajuće društvo mora da isplati po jedan dinar svakom od preživelih l_{x+1} lica tj. isplaćuje l_{x+1} dinara itd. Sve isplate ćemo diskontovati na trenutak 0 (veća crtica na vremenskoj osi)i zatim na levu stranu jednakosti stavimo zbir svih uplata od osiguranika, a na desnu stranu stavimo zbir svih isplata osiguravajućeg društva, ali naravno diskontovane na trenutak 0. Tako dobijamo jednakost:

Činjenica 1.10 $$l_x \cdot a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \dots$$

Odavde se dobija neto miza a_x za 1 dinar rente, a za R dinara rente neto miza je $M = R \cdot a_x$.

Činjenica tj. algoritam 1.10 se isprogramira za računar i time je problem rešen.

Kako nekada nisu postojali računari, ovo računanje je bilo teže, pa su se zbog jednostavnosti računanja uvodile razne nove oznake, nazivane komutativnim brojevima (ne znam zbog čega baš tako) i unošene u tebelu zajedno sa brojevima l_x.

Prema tome u tabeli je dovoljno da imamo samo kolonu za l_x, jer sve dalje nam daje računar.

Prikažimo kako se to nekada radilo, a nažalost i dan danas aktuari tako rade, sa punim tablicama takozvanih komutativnih brojeva, bilo od 17 engleskih društava, rađenih na bazi 4% godišnje kamatne stope, bilo sa najnovijim tablicama smrtnosti srbije 2000-2002 godine rađene na bazi 3% godišnje kamatne stope.

A šta ako neko zahteva da se radi sa 5% godišnje kamatne stope!

Izvedimo sada jednakosti koje su posledice uvođenja tih novih oznaka, komutativnih brojeva. Prvo jednakost 1.10 pomnožimo sa $\frac{1}{r^x}$ i dobijamo

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \frac{l_{x+3}}{r^{x+3}} + \dots$$

a zatim uvođenjem oznake $\frac{l_w}{r^w} = D_w$, $w = 10, 11, 12, \dots, 99$ sledi

$$D_x \cdot a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} \dots,$$

a zatim se uvodi i oznaka $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} \dots$. Brojevi D_x i N_x zovu se komutativni brojevi.

Činjenica 1.11 *Miza M za anticipativnu neposrednu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot a_x = R \cdot \frac{N_x}{D_x}}$

Ako neko ima u računaru isprogramiranu činjenicu 1.10, tj. izračunavanje broja a_x, tada njemu ne trebaju tablice sa komutativnim brojevima.

Analogno dobijamo da miza M za dekurzivnu neposrednu doživotnu ličnu rentu R iznosi:

Činjenica 1.12 *Miza M za dekurzivnu neposrednu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot a_x = R \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x}}$

Primer 1.13 *Osoba od 40 godina, osigurala se da doživotno prima svake godine rentu $R = 5\,000$€ koju će primati od trenutka osiguranja pa sve do kraja života. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

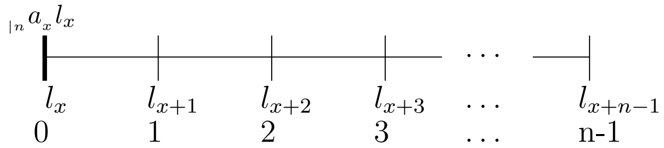
a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{40}}{D_{40}} = 5\,000 \cdot \frac{263\,643.62}{16\,382.56} = 80\,464.72$€

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{41}}{D_{40}} = 5\,000 \cdot \frac{247\,261.06}{16\,382.56} = 75\,464.72$€

A 1.14
Neposredna privremena lična renta

Neka je renta 1 dinar, koju osiguranik prima anticipativno tj. od trenutka uplate mize ${}_{|n}a_x$, tačno n godina, ili manje od n godina ako je pre isteka tih n godina preminuo.

Vremenska osa za ovaj obračun je



odakle diskontovanjem na trenutak prve isplate (široka crtica na vremenskoj osi) i sabiranjem sledi

$$l_x \cdot {}_{|n}a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{|n}a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \frac{l_{x+3}}{r^{x+3}} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{r^{x+n-1}}$$

$$D_x \cdot {}_{|n}a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1}$$

Kako je

$N_x \quad = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots$ i

$N_{x+n} = \qquad D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots$ to je

$N_x - N_{x+n} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}$. Dalje je

$D_x \cdot {}_{|n}a_x = N_x - N_{x+n}$ tj. ${}_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$, i sledi

Činjenica 1.15 *Miza M za anticipativnu neposrednu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{|n}a_x = R \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$

Analogno se dobija i

Činjenica 1.16 *Miza M za dekurzivnu neposrednu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$

Primer 1.17 *Osoba od* 45 *godina, osigurala se da prima svake godine rentu $R = 5\,000$€ koju će primati od trenutka osiguranja ali najviše* 10 *godina ili manje od n godina ako je pre isteka tih n godina preminuo. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

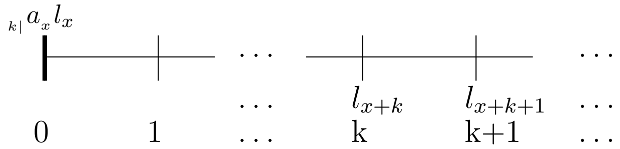
a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{45}-N_{55}}{D_{45}} = 5\,000 \cdot \frac{189\,326.69-87\,924.183}{12\,743.15} = 39\,751.75$€.

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{46}-N_{56}}{D_{45}} = 5\,000 \cdot \frac{176\,583.54-80\,583.643}{12\,743.15} = 37\,667.26$€.

A 1.18

Odložena doživotna lična renta

Neka je renta 1 dinar, koju osiguranik počinje da prima anticipativno (na početku) svake godine, k godina nakon uplate mize od ${}_{k|}a_x$ dinara, do kraja svog života. Vremenska osa za ovaj obračun je



odakle diskontovanjem svih iznosa na trenutak uplate mize od strane osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) i sabiranjem sledi

$${}_{k|}a_x \cdot l_x = \frac{l_{x+k}}{r^k} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{k+1}} + \frac{l_{x+k+2}}{r^{k+2}} + \ldots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$

$${}_{k|}a_x \cdot \frac{l_x}{r^x} = \frac{l_{x+k}}{r^{x+k}} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{x+k+1}} + \frac{l_{x+k+2}}{r^{x+k+2}} + \ldots$$

$${}_{k|}a_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \ldots = N_{x+k} \text{ i sledi}$$

Činjenica 1.19 *Miza M za anticipativnu odloženu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k}}{D_x}}$

Analogno se dobija i

Činjenica 1.20 *Miza M za dekurzivnu odloženu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k+1}}{D_x}}$

Primer 1.21 *Osoba od* 37 *godina, osigurala se da prima svake godine doživotno rentu $R = 5\,000$€ ali tek nakon* 12 *godina od trenutka osiguranja. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{49}}{D_{37}} = 5\,000 \cdot \frac{142\,094.38}{18\,986.95} = 37\,418.96€.$

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{46}-N_{56}}{D_{45}} = 5\,000 \cdot \frac{176\,583.54-80\,583.643}{12\,743.15} = 37\,667.26€.$

A 1.22
Odložena privremena lična renta

Neka je renta 1 dinar, koju osiguranik počinje da prima anticipativno (na početku) svake godine, k godina nakon uplate mize od ${}_{k|n}a_x$ dinara, ali tačno n godina, ili manje od n godina ako je pre isteka tih n godina preminuo. Vremenska osa za ovaj obračun je

$$\begin{array}{cccccccc}
{}_{k|n}a_x\, l_x & & & & & & & \\
\vdash & \text{---}\!\!\!\mid & \dots & \mid & \mid & \dots & \mid \\
 & & \dots & l_{x+k} & l_{x+k+1} & \dots & l_{x+k+n-1} \\
0 & 1 & \dots & \text{k} & \text{k+1} & \dots & \text{k+n-1}
\end{array}$$

odakle diskontovanjem svih iznosa na trenutak uplate mize od strane osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) i sabiranjem sledi

$$ {}_{k|}a_x \cdot l_x = \frac{l_{x+k}}{r^k} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{k+1}} + \ldots + \frac{l_{x+k+n-1}}{r^{k+n-1}} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$
$$ {}_{k|}a_x \cdot \frac{l_x}{r^x} = \frac{l_{x+k}}{r^{x+k}} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{x+k+1}} + \ldots + \frac{l_{x+k+n-1}}{r^{x+k+n-1}}$$
$$ {}_{k|}a_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + \ldots + D_{x+k+n-1}$$
$$ {}_{k|}a_x \cdot D_x = N_{x+k} - N_{x+k+n} \text{ pa sledi}$$

Činjenica 1.23 *Miza M za anticipativnu odloženu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|}\, a_x = R \cdot \frac{N_{x+k}-N_{x+k+n}}{D_x}}$

Analogno se dobija i

Činjenica 1.24 *Miza M za dekurzivnu odloženu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|}\, a_x = R \cdot \frac{N_{x+k+1}-N_{x+k+n+1}}{D_x}}$

Primer 1.25 *Osoba od* 33 *godina, osigurala se da prima svake godine rentu od* $R = 5\,000€$ *ali tek nakon* 15 *godina od trenutka osiguranja i tačno* 10 *godina, ili manje od* 10 *godina ako je pre isteka tih* 10 *godina preminuo. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{33+15} - N_{33+15+10}}{D_{33}} = 5\,000 \cdot \frac{85\,799.50}{23\,048.30} = 18\,612.98€.$

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{49} - N_{59}}{D_{33}} = 5\,000 \cdot \frac{142\,094.38 - 61\,109.405}{23\,048.30} = 17\,568.54€.$

A 1.26

Utvrđivanje tarifa kod osiguranja kapitala

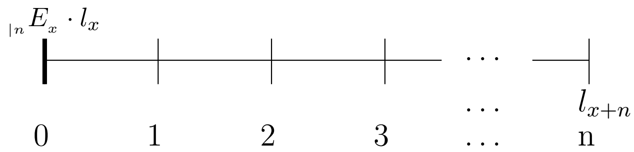
Za razliku od oosiguranja rente, koja se isplaćuje svake godine, kod osiguranja kapitala osigurani kapital se isplaćuje samo jednom ili eventualno nekoloko puta.

A 1.27

Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

Kao što se iz naziva vidi, osigurani kapital K se isplaćuje osiguraniku samo ako je živ u trenutku dogovorenom za isplatu. U protivnom kapital ostaje osiguravajućoj kompaniji.

Ako neto mizu za jedan dinar ovoga osiguranja obeležimo sa ${}_{|n}E_x$, tada vremenska osa za ovaj obračun je



jer je u trenutku 0 svako l_x osiguranika uplatio ${}_{|n}E_x$ dinara, tj. ukupno su uplatili $l_x \cdot {}_{|n}E_x$, a osiguravajuće društvo je isplatilo po 1 dinar svakom od preživelih l_{x+n} osiguranika, odnosno ukupno l_{x+n} dinara i odakle diskontovanjem na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot {}_{|n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^n} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{|n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^{x+n}} \Leftrightarrow D_x \cdot {}_{|n}E_x = D_{x+n} \Leftrightarrow {}_{|n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

pa sledi

Činjenica 1.28 *Miza M za osiguranje kapitala K za slučaj doživljenja nakon n godina iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}}$

Primer 1.29 *Osoba od* 37 *godina, osigurala je* 10 000€ *da joj se isplati kada napuni* 67 *gtodina, ukoliko je doživela te godine. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = 10\,000 \cdot \frac{D_{67}}{D_{37}} = 10\,000 \cdot \frac{3\,074.814}{18\,986.95} = 1\,619.44$€

A 1.30
Osiguranje kapitala za slučaj smrti (DOŽIVOTNO)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika. Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je A_x premija (miza) za osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po A_x dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na karaju prve, druge, treće itd. godine redom po d_x, d_{x+1}, d_{x+2} dinara, to je vremenska osa

$$\begin{array}{lllll}
A_x \cdot l_x & & & & \\
\hline
 & d_x & d_{x+1} & d_{x+2} & \ldots \\
0 & 1 & 2 & 3 & \ldots
\end{array}$$

odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot A_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \ldots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_x}{r^x} \cdot A_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \ldots \quad \Leftrightarrow$$

a zatim uvođenjem oznake $\frac{d_w}{r^{w+1}} = C_w$, $w = 10, 11, 12, \ldots, 99$ sledi

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot A_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$$

a zatim se uvodi i oznaka $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} \ldots$, pa je

$$\Leftrightarrow A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Brojevi C_x i M_x zovu se komutativni brojevi (tabela na kraju). Sada sledi

Činjenica 1.31 *Miza M za doživotno osiguranje kapitala K naslednicima u slučaju smrti osiguranika iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{M_x}{D_x}}$

Primer 1.32 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima kada god ona umrala na kraju te godine. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = K \cdot \frac{M_x}{D_x} = 10\,000 \cdot \frac{M_{45}}{D_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36}{12\,743.15} = 4\,285.72$€

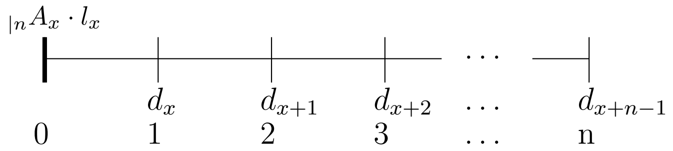
A 1.33

Osiguranje kapitala za slučaj smrti (PRIVREMENO - n godina)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro u toku prvih n godina od trenutaka osiguranja (uplate mize). Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je ${}_{|n}A_x$ premija (miza) za ovakvo osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po ${}_{|n}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na karaju prve, druge, treće, ... n-te godine redom po $d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, \ldots d_{x+n-1}$ dinara, to je vremenska osa



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot {}_{|n}A_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{r^n} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{|n}A_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{r^{x+n}} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot {}_{|n}A_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}$$

Kako je

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} + C_{x+n} + C_{x+n+1} + \ldots \quad \text{i}$$
$$M_{x+n} = C_{x+n} + C_{x+n+1} + \ldots \quad \text{to je}$$

$M_x - M_{x+n} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}$. Dalje je
$D_x \cdot {}_{|n}A_x = M_x - M_{x+n}$ tj. ${}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$, i sledi

Činjenica 1.34
Miza M za privremeno osiguranje kapitala K na n godina, u slučaju smrti osiguranika iznosi $\boxed{M = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$

Primer 1.35 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima na kraju te godine kada god je umrla, ali najviše* 20 *godina od trenutka osiguranja. Drugim rečima, ako je ta osoba preminula nakon* 65 *godina starosti, onda njeni naslednici ništa ne dobijaju. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36 - 2\,411.62}{12\,743.15} = 2\,393.24$€

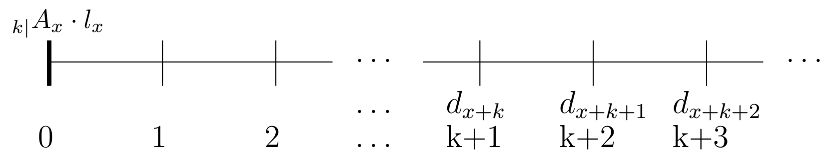
A 1.36

Osiguranje kapitala za slučaj smrti (ODLOŽENO - k godina)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro nakon k godina od trenutaka osiguranja (uplate mize). Ako je osiguranik umro pre isteka od k godina, tada naslednici ne dobijaju ništa, odnosno kapital ostaje osiguravajućem društvu. Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je ${}_{k|}A_x$ premija (miza) za ovakvo osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po ${}_{k|}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje ukupno na karaju $k+1$-ve , $k+2$-ge, $k+3$-će, ... godine redom po $d_{x+k}, d_{x+k+1}, d_{x+k+2}, \dots$ dinara naslednicima , to vremenska osa za ovaj slučaj je



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$\begin{aligned}
& l_x \cdot {}_{k|}A_x = \tfrac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \tfrac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \tfrac{d_{x+k+1}}{r^{k+3}} \dots \Big/ \cdot \tfrac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{l_x}{r^x} \cdot {}_{k|}A_x = \tfrac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}} + \tfrac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}} + \tfrac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}} + \dots \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & D_x \cdot {}_{k|}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \dots \\
\Leftrightarrow \quad & D_x \cdot {}_{k|}A_x = M_{x+k} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{k|}A_x = \tfrac{M_{x+k}}{D_x}
\end{aligned}$$

Sada sledi

Činjenica 1.37 *Miza M za odloženo osiguranje kapitala K nakon k godina, u slučaju smrti osiguranika iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{M_{x+k}}{D_x}}$

Primer 1.38 *Osoba od 45 godina, osigurala je 10 000 € da se isplati njenim nasledenicima kada god ona umrala na kraju te godine, ali samo ako bude živa bar 10 godina od trenutka osiguranja. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = K \cdot \frac{M_{x+k}}{D_x} = 10\,000 \cdot \frac{M_{55}}{D_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{3\,958.84}{12\,743.15} = 3\,106.64$€

A 1.39 Osiguranje kapitala za slučaj smrti (ODLOŽENO-PRIVREMNO, k-n godina)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro nakon k godina od trenutaka osiguranja (uplate mize) i nije živeo više od n godina nakon tih k godina. Ako je osiguranik umro pre isteka od k godina, ili nakon tih $n+k$ godina, tada naslednici ne dobijaju ništa, odnosno kapital ostaje osiguravajućem društvu. Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je ${}_{k|n}A_x$ premija (miza) za ovakvo osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po ${}_{k|n}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje ukupno na karaju $k+1$-ve , $k+2$-ge, $k+3$-će, ... i $k+n$-te godine redom po $d_{x+k}, d_{x+k+1}, d_{x+k+2}, \dots, d_{x+k+n}$ dinara naslednicima, to vremenska osa za ovaj slučaj je

$_{k|n}A_x \cdot l_x$

			$\dots$	d_{x+k}	d_{x+k+1}	d_{x+k+2}	$\dots$	$d_{x+k+n-1}$
0	1	2	$\dots$	k+1	k+2	k+3		k+n

odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot {}_{k|n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \ldots + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{k+n}} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{k|n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}} + \ldots + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{x+k+n}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot {}_{k|n}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots + C_{x+k+n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot {}_{k|n}A_x = M_{x+k} - M_{x+k+n} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{k|}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

Sada sledi

Činjenica 1.40 *Miza M za odloženo osiguranje kapitala K nakon k godina i privremeno za najviše n godina, u slučaju smrti osiguranika iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}}$

Primer 1.41 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000 € *da se isplati njenim nasledenicima na kraju te godine kada je umrla, ali samo ako je smrt nastupila između njene* 55 *i* 65 *godine života. Kolika jednokratna neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = K \cdot \frac{M_{55} - M_{65}}{D_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{3958.84 - 2411.62}{12\,743.15} = 1\,214.16$€

A 1.42

Osiguranje stalnom godišnjom premijom

Kako nisu svi ljudi u mogućnosti da odjednm uplate veću sumu novca radi osiguranja, bilo kapitala bilo rente, to njima odgovara da se premija uplaćuje svake godine ili (1) do kraja života (doživotna) ili (2) na neki određeni broj godina (privremeno).

Kako isplate osiguravajućeg društva naslednicima mogu biti
(1) neposredne (od trenutka osiguranja) i doživotne (do kraja života)
(2) neposredne (od trenutka osiguranja) i privremene
(3) odložene i doživotne
(4) odložene i privremene.

Prema tome postoji $2 \cdot 4 = 8$ mogućnosti ovakvoga osiguranja.

A 1.43

Izračunavanje godišnje doživotne premije neposrednog doživotnog osiguranja kapitala

Neka je l_x ljudi odlučilo da se osigura tako što će svako od njih počevši od dana osiguranja svake godine uplaćivati po $P(A_x)$ dinara, da bi njihovi naslednici dobili po 1 dinar na kraju godine kada je osiguranik preminuo. Vremenska osa za ovo osiguranje je

$$\begin{array}{cccc} P(A_x)l_x & P(A_x)l_{x+1} & P(A_x)l_{x+2} & \ldots \\ \vert\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & + & +\!\!-\!\!- & \ldots \\ & d_x & d_{x+1} & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots \end{array}$$

Sada ćemo sve uplate osiguranika (iznosi iznad vremenske ose) diskontovati na trenutak 0, sabrati ih i staviti na levu stranu jednakosti i diskontovati sve isplate osiguravajućeg društva (iznosi ispod vremenske ose), sabrati ih i staviti na desnu stranu jednakosti. Tako dobijamo

$$l_x P(A_x) + l_{x+1}\frac{P(A_x)}{r} + l_{x+2}\frac{P(A_x)}{r^2} + \ldots = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \ldots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{l_x}{r^x}P(A_x) + P(A_x)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + P(A_x)\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$P(A_x)\left(\frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots\right) = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$P(A_x)(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) = C_x + C_{x+1} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$P(A_x)N_x = M_x \quad \Leftrightarrow \quad P(A_x) = \frac{M_x}{N_x}$$

Činjenica 1.44 *Godišnja premija P koju osiguranik mora plaćati osiguravajućem društvu svake godine do kraja života, da bi njegovi naslednici dobili kapital od K dinara kada on premine, iznosi* $\boxed{P = K \cdot \frac{M_x}{N_x}}$

Primer 1.45 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima na kraju godine kada umre. Koliku godišnju neto mizu (premiju) mora uplaćivti osiguranik do svoje smrti za ovo osiguranje?*

Rešenje: $P = K \cdot \frac{M_{45}}{N_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36}{189\,326.69} = 288.46$€

A 1.46
Izračunavanje godišnje doživotne premije odloženog doživotnog osiguranja kapitala

Obračun je analogan kao i kod prethodne vrste osiguranja, samo što su isplate osiguranicima odložene za k godina. Označimo sa $P({}_{k|}A_x)$ godišnju premiju za jedan dinar osiguranoga kapitala, koji se može isplaćivati naslednicima na kraju godine ukojo je osiguranik preminuo, ali samo ako je prošlo najmanje k godina od trenutka osiguranja. Vremenska osa za ovo osiguranje je

$P({}_{k\|}A_x)l_x$	$P({}_{k\|}A_x)l_{x+1}$	$P({}_{k\|}A_x)l_{x+2}\dots$					
			$\dots$	d_{x+k}	d_{x+k+1}	d_{x+k+2}	$\dots$
0	1	2	$\dots$	k+1	k+2	k+3	$\dots$

$$l_xP({}_{k|}A_x)+l_{x+1}\frac{P({}_{k|}A_x)}{r}+l_{x+2}\frac{P({}_{k|}A_x)}{r^2}+\ldots = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}}+\frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}}\frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}}+\ldots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$
$$\frac{l_x}{r^x}P({}_{k|}A_x)+P({}_{k|}A_x)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}}+P({}_{k|}A_x)\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}}+\ldots = \frac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}}+\frac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}}+\frac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}}\ldots \Leftrightarrow$$
$$P({}_{k|}A_x)(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$P({}_{k|}A_x)N_x = M_{x+k} \quad\Leftrightarrow\quad P({}_{k|}A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x}$$

Činjenica 1.47 *Godišnja premija P, koju osiguranik mora plaćati osiguravajućem društvu svake godine do kraja života, da bi njegovi naslednici dobili kapital od K dinara kada on premine, ali samo ako je njegova smrt nastupila nakon k godina posle trenutka osiguranja, iznosi* $\boxed{P = K \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x}}$

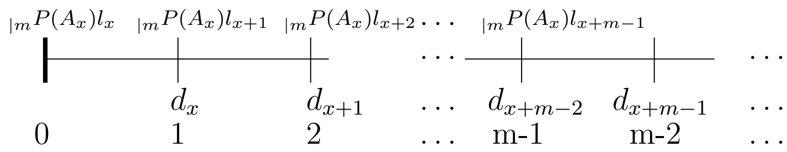
Primer 1.48 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima na kraju te godine kada umre, ali samo ako je doživela bar* 55 *godina. Koliku godišnju neto premiju P mora uplaćivti osiguranik do svoje smrti za ovo osiguranje?*

Rešenje: $P = K \cdot \frac{M_{55}}{N_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{3\,958.84}{189\,326.69} = 209.10$€

A 1.49

Izračunavanje godišnje privremene premije neposrednog doživotnog osiguranja kapitala

Neka je l_x ljudi odlučilo da se osigura tako što će svako od njih počevši od dana osiguranja svake godine uplaćivati po $_{|m}P(A_x)$ dinara, ali samo tačno m godina, da bi njihovi naslednici dobili po 1 dinar na kraju godine kada je osiguranik preminuo. Vremenska osa za ovo osiguranje je



Sada ćemo sve uplate osiguranika (iznosi iznad vremenske ose) diskontovati na trenutak 0, sabrati ih i staviti na levu stranu jednakosti i diskontovati sve isplate osiguravajućeg društva (iznosi ispod vremenske ose), sabrati ih i staviti na desnu stranu jednakosti. Tako dobijamo

$$_{|m}P(A_x)l_x + \frac{_{|m}P(A_x)}{r}l_{x+1} + \ldots + \frac{_{|m}P(A_x)}{r^{m-1}}l_{x+m-1} = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \ldots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \Leftrightarrow$$
$$_{|m}P(A_x)\frac{l_x}{r^x} + {}_{|m}P(A_x)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \ldots + {}_{|m}P(A_x)\frac{l_{x+m-1}}{r^{x+m-1}} = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$_{|m}P(A_x)\left(\frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \ldots + \frac{l_{x+m-1}}{r^{x+m-1}}\right) = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$_{|m}P(A_x)(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+m-1}) = C_x + C_{x+1} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$_{|m}P(A_x)(N_x - N_{x+m}) = M_x \quad \Leftrightarrow \quad {}_{|m}P(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

Činjenica 1.50 *Godišnja premija P koju osiguranik mora plaćati osiguravajućem društvu svake godine, tačno n godina, da bi njegovi naslednici dobili kapital od K dinara kada on premine, iznosi*

$$\boxed{P = K \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}}$$

Primer 1.51 *Osoba od 45 godina, osigurala je 10 000€ da se isplati njenim nasledenicima na kraju godine kada umre. Koliku godišnju neto premiju mora uplaćivti osiguranik tačno 10 godina za ovo osiguranje?*

Rešenje: $P = K \cdot \frac{M_{45}}{N_{45}-N_{55}} = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36}{189\,326.69-87\,924.183} = 538.58€$

Preostalih 5 mogućnosti se analogno rešavaju.

Jasno je da se mogu kostruisati razne druge vrste životnih osiguranja i obračun premija za svaku od njih je samo jedan novi zadatak iz finansijske odnosno aktuarske matematike, za onoga koje shvatio suštinu odnosno algoritam ovih obračuna.

x	l_x	D_x	N_x	S_x	d_x	C_x	M_x	R_x	a_x
10	100000	67556.42	1381771.36	24814820.55	676	439.12	14411.37	427355.16	20.4536
11	99324	64518.98	1314214.94	23433049.21	674	420.98	13972.25	412943.79	20.3694
12	98650	61616.50	1249695.96	22118834.29	672	403.59	13551.27	398971.54	20.2818
13	97978	58843.05	1188079.41	20869138.34	671	387.48	13147.68	385420.27	20.1906
14	97307	56192.37	1129236.42	19681058.89	671	372.58	12760.20	372272.59	20.0956
15	96636	53658.54	1073044.04	18551822.49	671	358.26	12387.62	359512.39	19.9977
16	95965	51236.50	1019385.50	17478778.50	672	344.98	12029.36	347124.77	19.8957
17	95293	48920.88	968149.00	16459392.05	673	332.21	11684.38	335095.41	19.7901
18	94620	46707.09	919228.12	15491244.10	675	320.39	11352.17	323411.03	19.6807
19	93945	44590.28	872521.03	14572016.03	677	308.97	11031.78	312058.86	19.5675
20	93268	42566.30	827930.75	13699495.05	680	298.41	10722.81	301027.08	19.4504
21	92588	40630.73	785364.45	12871564.35	683	288.19	10424.40	290304.27	19.3293
22	91905	38779.81	744733.72	12086199.95	686	278.33	10136.21	279879.87	19.2042
23	91219	37009.95	705953.91	11341466.28	690	269.19	9857.88	269743.66	19.0747
24	90529	35317.31	668943.96	10635512.42	694	260.33	9588.69	259885.78	18.9410
25	89835	33698.62	633626.65	9966568.51	698	251.76	9328.36	250297.09	18.8028
26	89137	32150.76	599928.03	9332941.91	703	243.81	9076.60	240968.73	18.6598
27	88434	30670.38	567777.27	8733013.93	708	236.10	8832.79	231892.13	18.5123
28	87726	29254.64	537106.89	8165236.70	714	228.95	8596.69	223059.34	18.3597
29	87012	27900.52	507852.25	7628129.85	720	221.99	8367.74	214462.65	18.2022
30	86292	26605.43	479951.73	7120277.64	727	215.52	8145.75	206094.91	18.0396
31	85565	25366.62	453346.30	6640325.95	734	209.24	7930.23	197949.16	17.8718
32	84831	24181.75	427979.68	6186979.69	742	203.37	7720.99	190018.93	17.6985
33	84089	23048.30	403797.93	5759000.09	750	197.67	7517.62	182297.94	17.5197
34	83339	21964.17	380749.62	5355202.19	758	192.09	7319.95	174780.32	17.3350
35	82581	20927.30	358785.45	4974452.53	767	186.89	7127.86	167460.37	17.1444
36	81814	19935.51	337858.15	4615667.18	776	181.82	6940.97	160332.51	16.9476
37	81038	18986.95	317922.64	4277809.03	785	176.84	6759.15	153391.54	16.7443
38	80253	18079.83	298935.69	3959886.42	795	172.22	6582.31	146632.39	16.5342
39	79458	17212.24	280855.86	3660950.75	805	167.67	6410.09	140049.08	16.3172
40	78653	16382.56	263643.62	3380094.91	815	163.23	6242.42	133639.99	16.0929
41	77838	15589.23	247261.06	3116451.31	826	159.06	6079.19	127397.57	15.8610
42	77012	14830.58	231671.83	2869190.27	839	155.36	5920.13	121318.38	15.6212
43	76173	14104.82	216841.25	2637518.46	857	152.59	5764.77	115398.25	15.3736
44	75316	13409.74	202736.43	2420677.23	881	150.82	5612.18	109633.48	15.1186
45	74435	12743.15	189326.69	2217940.82	909	149.64	5461.36	104021.30	14.8571
46	73526	12103.40	176583.54	2028614.14	944	149.41	5311.72	98559.94	14.5896
47	72582	11488.46	164480.14	1852030.61	981	149.31	5162.31	93248.22	14.3170
48	71601	10897.30	152991.68	1687550.48	1021	149.41	5013.00	88085.91	14.0394
49	70580	10328.76	142094.38	1534558.81	1063	149.58	4863.59	83072.91	13.7572
50	69517	9781.919	131765.619	1392464.43	1108	149.91	4714.01	78209.32	13.4703
51	68409	9255.778	121983.700	1260698.82	1156	150.39	4564.10	73495.31	13.1792
52	67253	8749.395	112727.922	1138715.12	1207	150.99	4413.71	68931.21	12.8841
53	66046	8261.892	103978.527	1025987.20	1261	151.68	4262.72	64517.50	12.5853
54	64785	7792.452	95716.636	922008.67	1316	152.20	4111.04	60254.78	12.2833

x	l_x	D_x	N_x	S_x	d_x	C_x	M_x	R_x	a_x
55	63469	7340.540	87924.183	826292.04	1375	152.91	3958.84	56143.74	11.9779
56	62094	6905.301	80583.643	738367.86	1436	153.55	3805.93	52184.90	11.6698
57	60658	6486.161	73678.342	657784.22	1497	153.92	3652.38	48378.97	11.3593
58	59161	6082.776	67192.181	584105.88	1561	154.32	3498.46	44726.59	11.0463
59	57600	5694.498	61109.405	516913.70	1627	154.67	3344.14	41228.13	10.7313
60	55973	5320.816	55414.907	455804.30	1698	155.20	3189.47	37883.99	10.4147
61	54275	4960.965	50094.091	400389.40	1770	155.56	3034.27	34694.52	10.0977
62	52505	4614.595	45133.126	350295.31	1844	155.84	2878.71	31660.25	9.7805
63	50661	4281.278	40518.531	305162.18	1917	155.77	2722.87	28781.54	9.4641
64	48744	3960.841	36237.253	264643.65	1990	155.48	2567.10	26058.67	9.1489
65	46754	3653.017	32276.412	228406.40	2061	154.84	2411.62	23491.57	8.8356
66	44693	3357.679	28623.395	196129.99	2128	153.72	2256.78	21079.95	8.5248
67	42565	3074.814	25265.716	167506.60	2191	152.19	2103.06	18823.17	8.2170
68	40374	2804.366	22190.902	142240.89	2246	150.01	1950.87	16720.11	7.9130
69	38128	2546.500	19386.536	120049.995	2291	147.12	1800.86	14769.24	7.6130
70	35837	2301.431	16840.036	100663.462	2327	143.69	1653.74	12968.38	7.3172
71	33510	2069.223	14538.605	83823.428	2351	139.59	1510.05	11314.64	7.0261
72	31159	1850.048	12469.382	69284.824	2362	134.85	1370.46	9804.59	6.7400
73	28797	1644.044	10619.334	56815.443	2358	129.44	1235.61	8434.13	6.4594
74	26439	1451.369	8975.290	46196.110	2339	123.465	1106.17	7198.519	6.1841
75	24100	1272.086	7523.921	37220.821	2303	116.886	982.705	6092.349	5.9147
76	21797	1106.275	6251.835	29696.901	2249	109.754	865.819	5109.644	5.6512
77	19548	953.9711	5145.5598	23445.0666	2179	102.249	756.065	4243.825	5.3938
78	17369	815.0314	4191.5887	18299.5070	2092	94.390	653.816	3487.760	5.1428
79	15277	689.2936	3376.5573	14107.9184	1987	86.205	559.426	2833.944	4.8987
80	13290	576.5777	2687.2637	10731.3612	1866	77.841	473.221	2274.518	4.6607
81	11424	476.5601	2110.6860	8044.0976	1730	69.393	395.380	1801.297	4.4290
82	9694	388.8384	1634.1259	5933.4118	1582	61.015	325.987	1405.917	4.2026
83	8112	312.8677	1245.2875	4299.2861	1427	52.920	264.972	1079.930	3.9803
84	6685	247.9139	932.4198	3053.9988	1268	45.216	212.052	814.958	3.7611
85	5417	193.1635	684.5059	2121.5792	1111	38.093	166.836	602.906	3.5437
86	4306	147.6410	491.3424	1437.0735	958	31.5837	128.743	436.0701	3.3280
87	3348	110.3786	343.7014	945.7312	811	25.7091	97.1593	307.3271	3.1139
88	2537	80.4242	233.3228	602.0298	673	20.5139	71.4502	210.1678	2.9011
89	1864	56.8171	152.8987	368.7070	545	15.9733	50.9369	138.7176	2.6911
90	1319	38.6584	96.0816	215.8083	427	12.0336	34.9630	87.7813	2.4854
91	892	25.1380	57.4232	119.7267	322	8.7254	22.9294	52.8183	2.2843
92	570	15.4457	32.2852	62.3036	231	6.0189	14.2040	29.8889	2.0903
93	339	8.8328	16.8395	30.0184	155	3.8833	8.1851	15.6849	1.9065
94	184	4.6098	8.0066	13.1789	95	2.2885	4.3019	7.4998	1.7369
95	89	2.1440	3.3968	5.1723	52	1.2045	2.0133	3.1979	1.5844
96	37	0.8570	1.2528	1.7755	24	0.5345	0.8089	1.1846	1.4618
97	13	0.2895	0.3958	0.5226	9	0.1927	0.2743	0.3757	1.3670
98	4	0.0857	0.1063	0.1268	3	0.0618	0.0816	0.1014	1.2403
99	1	0.0206	0.206	0.0206	1	0.0198	0.0198	0.0198	1.0000