A **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **23.01.2021.**

Studijski program **E1** **E2** **PR** **SV** **IT** **IN** **(zaokruži)** **KOLOKVIJUM 2**

U zadatku je dato više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Za koje koeficijente α su vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kolinearni, ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. $\alpha = -15$

- Izraziti vektor $\vec{x} = (3, 1, -4)$ na bar jedan način kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, -1, 0)$. $\vec{x} = \underline{3}\ \vec{a} + \underline{(-1)}\vec{b} + \underline{0}\ \vec{c}$ $\quad (\alpha, \beta, \gamma) = (3-\gamma, -1-\gamma, \gamma)$

- Ako su $\vec{s}$ i $\vec{t}$ jedinični nekolinearni vektori, a $\vec{p} = \vec{s} + \vec{t}$ i $\vec{q} = \alpha\vec{s} + \beta\vec{t}$ uzajamno normalni, tada ugao $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t})$ može biti: 1) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{6}$ 2) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{4}$ 3) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{3}$ 4) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{2}$ ~~5)~~ $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \pi$ ~~6)~~ $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = 0$

- Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla ABC (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

- Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina
  $$\begin{array}{rcl} ax + ay & = & 0 \\ -(a-1)y & = & a-1 \end{array}$$
  1) kontradiktoran: \\
  2) određen: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
  3) 1 puta neodređen: $a \in \{0, 1\}$
  4) 2 puta neodređen: \\

- Za pravu $a:\ x = 2y + 4 = z - 1$ napisati jedan vektor $\vec{a} = (\ 1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\ ) \parallel a$ i koordinate jedne njene tačke $A(\ 0\ , -2\ ,\ 1\ )$

- Za vektore $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ 3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, 1, -2)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 1)$ 6) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$

- Koje od sledećih uređenih n-torki **nisu** generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: ~~1)~~ $\big((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0)\big)$ 2) $\big((1, 0, 0), (0, -1, 0)\big)$ ~~3)~~ $\big((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3)\big)$ 4) $\big((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\big)$

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -9^3$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

- Koordinate tačke A' projekcije tačke $A(1, 1, 2)$ na pravu određenu sa $x = y = z$ je: $A'(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

- Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p:\ \vec{r} = \vec{r}_Q + t\vec{l}$ kroz ravan $\alpha:\ \vec{m}\vec{r} = \vec{m}\vec{r}_W$ je $\vec{r}_T = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_W - \vec{r}_Q)\cdot\vec{m}}{\vec{l}\cdot\vec{m}} \cdot \vec{l}$

- Normalna projekcija vetora $\vec{x} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravan $\alpha:\ x + 2y + z = 0$ je: $\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x}) = (1, -1, 1)$

- Koje od sledećih uređenih n-torki **su zavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: ~~1)~~ $\big((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0)\big)$ 2) $\big((1, 3, -2), (-2, -6, 4)\big)$ 3) $\big((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3)\big)$ 4) $\big((1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\big)$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
  $$\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \underset{3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}}$$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ:
  ~~1)~~ $det(A + B) = det(A) + det(B)$ ~~2)~~ $det(\lambda A) = \lambda^3 det(A)$ 3) $det(AB) = det(A)det(B)$
  ~~4)~~ $rang(A + B) = rang(A) + rang(B)$ ~~5)~~ $rang(AB) = rang(A)rang(B)$ 6) $A(BC) = (AB)C$
  7) $A(B + C) = AB + AC$ ~~8)~~ $AB = BA$ 9) $A + B = B + A$

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da
  1) je injektivna $f(x, y, z) = (\quad , \quad)$ 2) nije injektivna $f(x, y, z) = (\ 0\ ,\ 0\ )$
  3) je sirjektivna $f(x, y, z) = (\ x\ ,\ y\ )$ 4) nije sirjektivna $f(x, y, z) = (\ 0\ ,\ 0\ )$

- Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **kolinearni** tada je: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni 7) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ 8) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ 9) $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \ \wedge\ \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ 10) $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$
- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako je: 1) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 2) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ 4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ 6) $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ 7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \ \Rightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x - y, 2x + ay)$ je izomorfizam akko $a \in$ $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
- Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$ i $\vec{a} \neq 0$. Tada je 1) $\vec{x} = (\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k}$ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k})$ je trijedar vektora 3) Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je vektor $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ 4) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ 5) Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ 6) $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ 7) $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})| = \frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|}$
- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ zavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je 1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $k \leq n$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $n \leq m \leq k$

A ALGEBRA - KOLOKVIJUM 2

23.01.2022.

1. Date su tačke $A(0,1,1)$ i $B(1,1,0)$, i ravan $\alpha : x + y + z = 0$. Odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan i ravan trougla ABC bude paralelna sa ravni α.
2. Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina
$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 6z &= 0 \\ -x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$
potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.
3. Data je ravan $\alpha : x - y - z = 0$. Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projekcija na ravan α, i neka je $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ravanska simetrija u odnosu na ravan α. Dokazati da su f i g linearne transformacije, i izračunati rangove njihovih matrica.