B Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________

Studijski program E1 E2 PR SV IT IN (zaokruži) 23.01.2021.

KOLOKVIJUM 2

U zadatku je dato više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Ako su $\vec s$ i $\vec t$ jedinični nekolinearni vektori, a $\vec p = \vec s + \vec t$ i $\vec q = \alpha\vec s + \beta\vec t$ uzajamno normalni, tada ugao $\measuredangle(\vec s,\vec t)$ može biti: 1) $\measuredangle(\vec s,\vec t)=\frac{\pi}{6}$ ~~2)~~ $\measuredangle(\vec s,\vec t)=\pi$ 3) $\measuredangle(\vec s,\vec t)=\frac{\pi}{4}$ ~~4)~~ $\measuredangle(\vec s,\vec t)=0$ 5) $\measuredangle(\vec s,\vec t)=\frac{\pi}{3}$ 6) $\measuredangle(\vec s,\vec t)=\frac{\pi}{2}$

- Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax \;+\; ay &= 0 \\ -\;(a+1)y &= a+1 \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: \\
2) određen: $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$
3) 1 puta neodređen: $\{0,-1\}$
4) 2 puta neodređen: \\

Za vektore $\vec a = (-1,1,0)$ i $\vec b = (-2,0,2)$ izračunati: 5) $|\vec a| =$ $\sqrt2$ 6) $|\vec b| =$ $2\sqrt2$
7) $\vec a - 2\vec b =$ $(3,1,-4)$ 8) $\vec a\cdot\vec b =$ 2 9) $\vec a\times\vec b =$ $(2,2,2)$ 10) $\measuredangle(\vec a,\vec b) =$ $\pi/3$

Koje od sledećih uređenih n-torki **nisu** generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: ~~11)~~ $((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0))$
12) $((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3))$ 13) $((1,0,0),(0,-1,0))$ ~~14)~~ $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3))$

- $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&2\\6&3\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\end{bmatrix}$ $\quad\begin{vmatrix}9&9&9\\9&9&0\\9&0&0\end{vmatrix} = -9^3$ $\quad\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$

- Koordinate tačke A' projekcije tačke $A(3,1,2)$ na pravu određenu sa $x=y=z$ je: $A'(2,2,2)$

- Vektor položaja $\vec r_T$ tačke prodora prave $p:\vec r = \vec r_Q + t\vec l$ kroz ravan $\alpha:\ \vec m\vec r = \vec m\vec r_W$ je $\vec r_T = \vec r_Q + \frac{(\vec r_W - \vec r_Q)\cdot\vec \omega}{\vec p\cdot\vec \omega}\vec p$

- Normalna projekcija vetora $\vec x = 3\vec i + 3\vec j + 3\vec k$ na ravan $\alpha:\ x+2y+z=0$ je: $\mathbf{pr}_\alpha(\vec x) = (1,-1,1)$

- Koje od sledećih uređenih n-torki **su zavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: 1) $((1,3,-2),(-2,-6,4))$
2) $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3))$ ~~3)~~ $((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0))$ 4) $((1,0,1),(1,1,0),(2,1,1))$

- Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla ABC (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec a = \vec{AB}$ i $\vec b = \vec{AC}$. $\vec{AT} = \frac13\vec a + \frac13\vec b$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&3&1&3\\1&3&2&3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&2\\-3&0&6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5&1\\5&1\\5&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&7&9\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3&-2\\-9&6\end{bmatrix}$

2 2 1 1 0 3 3 1 1

- Za koje koeficijente α su vektori $\vec p = \alpha\vec a + 5\vec b$ i $\vec q = 3\vec a - \vec b$ kolinearni, ako vektori $\vec a$ i $\vec b$ nisu kolinearni. $\alpha = -15$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A,B,C reda 2 i svaki skalar λ:
~~1)~~ $det(\lambda A) = \lambda^3 det(A)$ ~~2)~~ $rang(A+B) = rang(A)+rang(B)$ ~~3)~~ $rang(AB) = rang(A)rang(B)$
4) $A(BC) = (AB)C$ ~~5)~~ $det(A+B) = det(A)+det(B)$ 6) $A(B+C) = AB+AC$ ~~7)~~ $AB = BA$
8) $A+B = B+A$ 9) $det(AB) = det(A)det(B)$

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ za koju važi da
1) je injektivna $f(x,y,z) = ($ ~~ , ~~ $)$ 2) nije injektivna $f(x,y,z) = (0, 0)$
3) je sirjektivna $f(x,y,z) = (x, y)$ 4) nije sirjektivna $f(x,y,z) = (0, 0)$

- Ako su vektori $\vec a = a_1\vec i + a_2\vec j + a_3\vec k$ i $\vec b = b_1\vec i + b_2\vec j + b_3\vec k$ **kolinearni** tada je: ~~1)~~ $\vec a\cdot\vec b = 0$ 2) $\vec a\times\vec b = 0$
~~3)~~ $\vec a$ i $\vec b$ su nezavisni 4) rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\le 2$ 5) rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\le 1$ ~~6)~~ rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix} = 1$
~~7)~~ $\vec a\nparallel\vec b$ ~~8)~~ $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\ (\vec a\ne\lambda\vec b\ \wedge\ \lambda\vec a\ne\vec b)$ ~~9)~~ $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\ \vec a = \lambda\vec b$ 10) $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ \alpha\vec a + \beta\vec b = 0\ \wedge\ \alpha^2+\beta^2\ne0$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako je:
1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna 2) $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ 3) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 4) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$
5) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 6) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ 7) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 8) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x - 2y, 2x + ay)$ je izomorfizam akko $a \in$ $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$
- Za pravu $a:\ x = 2y + 4 = z - 1$ napisati jedan vektor $\vec{a} = (\ 1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\ ) \parallel a$ i koordinate jedne njene tačke $A(\ 0\ ,\ -2\ ,\ 1\ )$
- Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$ i $\vec{a} \neq 0$. Tada je 1) Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je vektor $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ 2) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ 3) $\vec{x} = (\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k}$ 4) Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ 5) $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ 6) $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})| = \frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|}$ 7) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k})$ je trijedar vektora
- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zavisna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ generatorna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je 1) $k \leq m$ 2) $k \leq m \leq n$ 3) $m \leq k \leq n$ 4) $k \leq n \leq m$ 5) $n \leq m \leq k$ 6) $n \leq k \leq m$
- Izraziti vektor $\vec{x} = (4, -2, -2)$ na bar jedan način kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, -1, 0)$. $\vec{x} = \underline{\ 4\ }\ \vec{a} + \underline{\ 2\ }\ \vec{b} + \underline{\ 0\ }\ \vec{c}$ $(\alpha, \beta, \gamma) = (4-\gamma, 2-\gamma, \gamma)$

B **ALGEBRA - KOLOKVIJUM 2** **23.01.2022.**

1. Date su tačke $A(1, 0, 1)$ i $B(0, 1, 1)$, i ravan $\alpha : x + y + z = 0$. Odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan i ravan trougla ABC bude paralelna sa ravni α.
2. Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$
potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.
3. Neka je $\vec{a} = (a, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$, i neka je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa
$f(x, y, z) = (((x, y, z) \times \vec{a}) \cdot (1, 2, 3)) \cdot (3, -2)$.
Dokazati da je f linearna transformacija, i diskutovati njen rang po parametru $a \in \mathbb{R}$.