UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD

Aleksandar Kršić

Linearna logika sa primjenama u Petri mrežama

- master rad -

Mentor:
dr Silvia Gilezan

Novi Sad, 2017.

Predgovor

Temelje logike, postavili su Stari Grci, koji su svojim mentalitetom uvijek imali potrebu da polemišu i dokazuju da su u pravu. U tom smislu, logika se razvijala kao dio filozofije. U tom vremenu, smatralo se da oni ljudi koji su bili bolji u baratanju sa riječima i zakonima pravilnog zaključivanja su u prednosti nad drugima. Zato se Stari Grci smatraju kao prvi narod koji se bavio problemima pravilnog zaključivanja.

Logika kao nauka, prvi svoj procvat doživljava za vrijeme Leibniza[1], za kojeg se smatra da je pra-otac matematičke logike. Laibniz je htio da stvori jedan formalni račun pomoću kojeg bi sve moglo biti izraženo i svi problemi riješeni. Svoj formalni jezik nazivao je characteristica universalis, a cilj mu je bio da izgradi logiku kao sistem za izračunavanje. Međutim, Leibniz je uspio samo da izgradi račun za identitet i inkluziju i geometrijski račun.

Ključni momenat, za formalni račun, smatra se knjiga Begriffsschrift - Eine der arithmetischen nachgebikdete Formelsprache des reinen Denkes, Goltiba Fregea. On je u svom radu precizirao pojam Leinbizovog univerzalnog jezika. Pored toga, on je uveo pojmove izvođenja i dokaza, svojstva kvantifikatora kao i pravila izvođenja kao što je modus ponens. [13] Kasnije, ideju za rozvojem ovakvih računa koristi i Hilbert, čiji račun pominjemo u ovom radu.

Prva glava ovog rada je uvodnog karaktera i posvećena je osnovnim pojmovima formalnog računa. Navodi se Hilbertov sistem za Intuicionističku logiku, kao i formalni dokaz prve aksiome njegovog sistema. Uvodi se pojma supstrukturnih logika, te vrši se njihova podjela.

U drugoj glavi, uvodi se sintaksa Linearne logike, i prikazuje se Intuicionistička linearna logika i njen sekventni račun. Kako prirodna dedukcija pedstavlja osnovni sistem pomoću kojeg se definiše intuicionistička linearna logika, u ovom dijelu rada uvode se osnovni pojmovi prirodne dedukcije. Intuicionistička linearna logika omogućava modeliranje Petri mreža o kojim se detaljnije priča u glavi 3. U glavi dva još se definišu i Kvantali kao jedan od modela Intuicionističke likearne logike.

Treća glava, posvećena je Petri mrežama, kao i njihovom prikazu u Linearnoj logici. Kao rezultat veze između Petri mreža i Linearne logike naveden je primjer, koji prikazuje rad samoposlužne mašine za pranje i sušenje veša. U ovoj glavi Petri mreže se definišu i kao multiskupovi, te daje se veza između intuicionističke linearne logike i Petri mreža.

[1]Gottfried Wilhelm Leibniz, njemački filozof, matematižar i fizičar.

Poslednja, četvrta glava, rezervisana je za problem pod nazivom ,,Svijet kockica". Ovaj problem ilustruje problem planiranja u vještačkoj inteligenciji. Kako se ovaj problem smatra motivacioni primjer za razvoj Linearne logike, prirodno se nametnulo njegovo navođenje u ovom radu i tumačenje. Uvode se i osnovne stvari o Coq dokazivaču, u kojem je implementiran ovaj pomenuti problem.

⋆⋆⋆

Želio bih da se zahvalim mentorki, dr Silvii Gilezan, na pomoći u izboru teme i izradi rada, podršci i razumjevanju. Njoj dugujem zahvalnost na nesebičnom znanju koje mi je pružila. Zahvaljujem se i članovima komisije na korisnim savjetima.

Najviše želim da se zahvalim mojim roditeljima, Gordani i Goranu, što su me podržavali i vjerovali u mene svih ovih godina. Takođe, zahvlajujem se svojim prijateljima i kolegama, na podršci i druženjima, koja su moje studentske dane učinila srećnim i lijepim.

Novi Sad, datum Aleksandar Kršić

Sadržaj

Uvod

Logika kao matematička disciplina razvila se u drugoj polovini XIX vijeka. Prvi radovi ovde discipline smatraju se radovi Friedrich Fregea [2] i Charles Peircea [3] Najveći razvoj logike se desio u XX vijeku za koji su zaduženi tadašnji logičari Gerhrard Gentzen, David Hilbert, Bertrand Russell i Kurt Gödel. Težnja matematičara XX vijeka bila je formalizacija matematike, zbog koje u tom periodu nastaju formalni logički sistemi dokazivanja. Najpoznatiji formalni sistemi su Hilbertov aksiomatski sistem i Gentzenovi sisetmi, prirodna dedukcija i sekventni račun. Razvojem formalnih sistema, razijale su se i neklasične logike, kao logike u čijim se sistemima odbacuju ili ograničavaju neka od Gentzenovih strukturnih pravila, o kojima se nešto vi se može vidjeti u glavi 1.

Tako nastale logike se nazivaju supstukturne, čija je definicija data u glavi 1. Veoma važno otkriće u radovima Gentzena jesu pravila izvođenja u logici, koja ne uključuju ni jednu logičku konstantu. Takva pravila izvođenja Gentzen je nazvao *strukturna pravila*. U ovom radu bavimo se Linearnom logikom, jednom od važnijih supstrukturnih logika.

Linearna logika predstavlja prefinjenost intuicionističke i klasične logike. Umjesto naglašavanja istine, kao što je to u klasičnoj logici ili dokaza, što je odlika intuicionističke logike, Linearna logika naglašava ulogu formula kao resursa. U tom smislu, u ovoj logici se ne mogu primjenjivati strukturna pravila slabljenje i kontrakcija na sve formule, već samo na one formule označene određenim modalima. S obzirom da se akcenat u Linearnoj logici stavlja na resurse, ona je pronašla široke primjene. Jedna od primjena je i u Petri mrežama, koja se predstavlja u ovom radu.

[2] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (8.11.1848. - 26.7.1925.) bio je njemački matematičar, jedan od osnivača moderne matematičke logike.

[3] Charles Sanders Peirce(10.9.1839.-19.4.1914.) američki matematičar i logičar.

Glava 1

Supstrukturne logike-osnovni pojmovi

Supstrukturne logike su logike kod kojih se posebna pažnja posvećuje ispitivanju strukturnih pravila koja se ondose na raspored i broj pojavjlivanja premisa u pravilima zaključivanja. Ograničavanjem ili odbacivanjem strukturnih pravila dobijaju se supstrukturne logike. Kako bi lakše shvatili teoriju vezanu za supstruktrune logike moramo uvesti neke osnovne pojmove, kao i ispričati ukratko način kako su se razvijale supstrukturne logike.

1.1 Terminologija

1.1.1 Definicija *Skup aksioma i pravila izvođenja na posmatranom jeziku čini logički skup, na osnovu kojeg se realizuju logičke dedukcije.*

1.1.2 Definicija *Jezik $\Im$ je jezik iskaznog računa sa:*

- *logičkim veznicima:* $\rightarrow, \leftarrow, \cdot, \wedge, +, \vee, \neg$ *i* $\sim$ *;*
- *iskaznim konstantama:* $1, 0, \top$ *i* $\bot$*;*
- *prebrojivo mnogo iskaznih promjenjljivih;*
- *lijevom i desnom zagradom.*

Sada kada smo definisali jezik iskaznog računa možemo dati i definiciju formula na jeziku $\Im$.

1.1.3 Definicija *Formule na jeziku $\Im$ se definišu na sledeći način:*

- *Izkazne promjenjljive i iskazne konstante su atomske formule. Atomske formule su formule.*

- *Ako su A i B formule, tada su forume* $(A \to B), (B \leftarrow A), (A \cdot B), (A \wedge B), (A + B), (A \vee B)$

Definicija preuzeta iz [11]. Ako posmatramo sekventni račun tada jezik definišemo na sledeći.

1.1.4 Definicija *Jezik sekvenata $\mathcal{G}$ je jezik koji se sastoji od jezika $\Im$ sa: zapetom, rampom, i prazninom.*

Na jeziku de se defini se term na sledeći način:

1.1.5 Definicija *G- term je bilo koja formula ili $\emptyset$. G- terme se označavaju velikim grčkim slovima: $\mathit{\Gamma}, \mathit{\Gamma}_1, \mathit{\Gamma}_2, ..., \Delta, \Delta_1, \Delta_2, ...$*

Kažemo da je Γ jednočlan, ako je $\Gamma = A$, gdje je A bilo koja formula jezika $\Im$.

U sistemu sekvenata, *izvođenje*, čine sekventi, koji su u sledećemo poretku: svaki sekvent u izvođenju je zaključak najviše jednog pravila izvođenja, a svaki svekent u izvođenju je pretpostavka tačno jednog pravila izvođenja.

Dokaz sekventa $\Gamma \vdash \Delta$, u sistemu sekvenata, je izvođenje čiji je krajnji $\Gamma \vdash \Delta$ i čiji su polazni sekventi aksiome u sisetmu.

Teorema neke logike, je formula A, ako na osnovu akisoma i pravila izvođenja sistema sekvenata postoji dokaz ili sekventa $\vdash A$ ili sekevnta $\emptyset \vdash A$.

1.1.1 Formalni račun

Formalni sistemi javljaju je krajem XIX vijeka kao potreba za formalizacijom matematike. Pod formalizacijom se smatra konstrukcija sistema koji se sastoje od konačnog broja aksioma i pravila izvođenja. Prvi među matematičarima koji se bavio formalizacijom, konkretno logike, bio je *David Hilbert*. Njegov sistem sastoji se samo iz aksioma i jednog pravila izvodjenja poznat pod nazivom *Modus ponens*. U ovom radu bavićemo se između ostalog i intucionističkom logikom, čiji formalni sistem se sastoji iz tri aksiome i pravila *Modus ponens*. Sistem navodimo u tabeli 1.1.

Tabela 1.1: Hilbertov sistem za Intuicionističku logiku

A1	$\vdash A \to A$
A2	$\vdash A \to (B \to A)$
A3	$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
MP	$\dfrac{\vdash A \to B \quad \vdash A}{\vdash B}$

Prva aksioma je zapravo teorema, jer se ona može izvesti pomoću druge i treće aksiome uz pravilo *Modus ponens*. Kontsruišimo formalni dokaz prve aksiome.

1.1.6 Primjer Sekvent B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, predstavlja formalni dokaz $\vdash A \rightarrow A$, ako su B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 definisani na sledeći način:

- $B_1 = ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)))$,
  gdje smo iskoristili aksiomu A3 za $A = A, B = (A \rightarrow A)$ i $C = A$.
- $B_2 = (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$
  gdje smo iskoristili aksiomu A2 za $A = A$, $B = (A \rightarrow A)$.
- $B_3 = ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)))$,
  gdje smo primjenili pravilo izvođenja MP na B_1 i B_2.
- $B_4 = (A \rightarrow (A \rightarrow A))$,
  gdje smo iskoristili A2 aksiomu za $A = A$, $B = A$.
- $B_5 = (A \rightarrow A)$,
  primjenjuje se MP na B_3 i B_4.

Ovim primjerom smo pokazali da je aksioma A1 zaista teorema.

Iako je moguće izvesti sve ituicionističke teoreme, zbog složenosti dokaza, javila se potreba za jednostavijim formalnim sistemom logike. Ideju koja prirodnije predstavlja ljudsko zaključivanje predstavio je Gerhard Gentzen, koji je 1934. godine došao do novog formalnog sistema pod nazivom *prirodna dedukcija* [12]. On je napravio ovaj sistem od jedne aksiome i dva pravila izvođenja (jedno pravilo je pravilo uvođenja a drugo pravilo eliminacije).

Tabela 1.2: Prirodna dedukcija za Intuicionističku logiku

aksioma	$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}$
pravilo uvođenja	$\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$
pravilo eliminacije	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$

Dokazano je da za prirodnu dedukciju važi svojstvo podformule, što znači da se dokaz tvrđenja $\Gamma \vdash A$ može uprostiti tako da svi koraci njegovi budu isključivo sastavljeni od formule A i pretpostavki iz Γ. Pored ovog formalnog sistema, Gerhard Gentzen uveo je još jedan formalni sistem koji je ekvivalentan prirodno deduktivnom sistemu i za koji takođe važi svojstvo podformule i njega je nazvao *sekventni račun*.

1.2 Razvoj supstrukturnih logika

Najpoznatije supstukturne logike su Relevanta, Afina, Linearna i Lambekova logika. Sve ove logike nastajale su iz različitih potreba. Intuicionistička logika inspirisana je kontstruktivnim debatama o osnovama matematike. Za razliku od nje, Relevantna logika se razvila kao potreba da se formuliše imlikacija koja je lišena neintuitivnih karakteristika. U nastavku uvešćemo račun sekvenata kao i opisati način dobijanja pomenutih logika.

1.3 Uloga strukturnih pravila u računu sekvenata

Račum sekvenata je 1935. godine uveo Gerhard Gentzen [1] kao formalni sistem koji je ekvivalentan ND sistemu ili sistemu koji je poznatiji pod nazivom prirodna dedukcija. Za ovaj formalni sistem pokazao je da u njemu važi svojstvo podformule. Postoji varijanta računa sekveanta za klasičnu logiku koja se obilježava sa LK i varijanta za intuicionističku logiku koja se obilježava sa LJ[2]. U pomenutim sistemima osnovni pojam je *sekvent*, koji definišemo na sledeći način:

1.3.1 Definicija *Izraz oblika* $\Gamma \vdash \Delta$, *gdje su* Γ *i* Δ *konačni, moguće prazni, nizovi formula nazivamo sekvent i čitamo ,,iz baze* Γ *slijedi* Δ*" ili ,,u kontekstu* Γ *je tačno* Δ*".* Γ *nazivamo antecedent, dok* Δ *nazivamo sukcedent sekventa* $\Gamma \vdash \Delta$.

Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ odgovara formuli $A_1 \wedge ... \wedge A_n \longrightarrow B_1 \vee ... \vee B_m$. To znači da se zarez čita kao konjukcija u antecedentu (prethodnik), dok se u sukcedentu zarez čita kao disjunkcija. Simbol strelica odgovara oznaci implikacije.
Razlikujemo *jednozaključan* i *višezaključan* sekvent. Ukoliko je Γ jednočlan ili prazan niz formula, takav sekvent nazivamo *jednozaključan*, u ostalim slučajevima kažemo da je *višezaključan*.

Što se tiče izvođenja u sistemima LJ i LK imamo dvije vrste pravila: *strukturna* i *operacijska*.
Strukturna pravila, kako i sam naziv kaže, odnose se na promjenu strukture sekventa. Sama formulacija strukturnih pravila ne sadrži logičke simbole iz jezika na kojem su formule, odnosno simbole koje se u sekventima pojavljuju lijevo ili desno od $\vdash$. Strukturna pravila su pravila koja se odnose na zaključivanje, tj. ne odnose se na logičke veznike.
Za razliku od strukturnih pravila, operacijska pravila za izvođenje služe za uvođenje novih logičkih veznika lijevo, odnosno desno od rampe.

[1]Gerhard Gentzen, njemački logičar i matematičar, koji se sa pravom smatra jednim od najistaknutijih ličnosti savremene logike.

[2] Zapravo intuicionistička logika se u originalnim Gentzenovim radovima obiljezava sa LI, što je i prirodno, zbog samog naziva intuicionistčka logika. Međutim, greška u interpretaciji slova I kao J, se provlači u literaturi skoro oduvjek, zašto je to tako, može se naci u [23].

Najčešća strukturna pravila su sledeća:

1. *slabljenje* - gdje se hipoteza ili zaključak može produžiti sa dodatnom formulom;

2. *permutacija* - gdje se formule sa iste strane rampe mogu zamjeniti;

3. *kontrakcija* - gdje se dvije jednake formule koje su sa iste strane rampe mogu zamjenjeniti sa jednom formulom;

4. *sječenje* - ovo pravilo skraćuje i pojednostavljuje izvođenje. Istovremeno onemogućava rekonstrukciju dokaza, jer nema načina da se prepozna formula koja je pri sečenju nestala. Zbog toga je značajna Gentzenova ,,Teorema o eliminaciji sječenja" (Cut elimination).[3]

1.3.2 Definicija *Formalni račun klasične logike dat je pomoću aksioma i pravila izvođenja. Intuitivno, pravila opisuju načine zaključivanja bez uticanjana na vezu između antecedetna i sukcedenta. Oni predstavljaju parove ili trojke sekvenata dati u obliku:*

$$\frac{S_1}{S_2} \quad \frac{S_1}{S_2 \; S_3}$$

Sekvent iznad linije naziva se gornji sekvent ili premisa pravila, dok sekvent ispod horizontalne linije naziva se donji sekvent ili zaključak pravila.

Pravila Gencenovog sekvent računa za klasičnu logiku se nalaze u tabeli 1.1 i tabeli 1.2. (preuzeto iz [11])

Tabela 1.3: Pravila sekventnog računa za klasičnu logiku

Aksioma: $A \vdash A$

Strukturna pravila:

slabljenje: $\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$

kontrakcija: $\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$

permutacija: $\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}$

sječenje: $\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$

[3] Gentzenova ,,Teorema o eliminaciji sječenja" u literaturi se navodi i u originalnom njemačkom nazivu ,,Hauptsatz". Teorema tvrdi da je pravilo sečenja moguće izostaviti a da sistem i dalje ima isti skup izvodivih formula.

Tabela 1.4: Pravila izvođenja za veznike

$\wedge - IA$: $\frac{A,\Gamma\vdash\Delta}{A\wedge B,\Gamma\vdash\Delta} \quad \frac{A,\Gamma\vdash\Delta}{A\wedge B,\Gamma\vdash\Delta}$	$\wedge - IS$: $\frac{\Gamma\vdash\Delta,A \quad \Gamma\vdash\Delta,B}{\Gamma\vdash\Delta,A\wedge B}$
$\vee - IA$: $\frac{A,\Gamma\vdash\Delta \quad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\vee B,\Gamma\vdash\Delta}$	$\vee - IS$: $\frac{\Gamma\vdash\Delta,A}{\Gamma\vdash\Delta,A\vee B} \quad \frac{\Gamma\vdash\Delta,B}{\Gamma\vdash\Delta,A\vee B}$
$\neg - IA$: $\frac{\Gamma\vdash\Delta,A}{\neg A,\Gamma\vdash\Delta}$	$\neg - IS$: $\frac{A,\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta,\neg A}$
$\rightarrow -IA$: $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$	$\rightarrow -IS$: $\frac{A,\Gamma\vdash\Delta,B}{\Gamma\vdash\Delta,A\rightarrow B}$
$\forall - IA$: $\frac{\gamma a,\Gamma\vdash\Delta}{\forall x\gamma x,\Gamma\vdash\Delta}$	$\forall - IS$: $\frac{\Gamma\vdash\Delta,\gamma a}{\Gamma\vdash,\forall x\gamma x}$
$\exists - IA$: $\frac{\gamma a,\Gamma\vdash\Delta}{\exists x\gamma x,\Gamma\vdash\Delta}$	$\exists - IS$: $\frac{\Gamma\vdash\Delta,\gamma a}{\Gamma\vdash\Delta,\exists x\gamma x}$

Sada možemo definisati supstrukturne logike na sledeći način:

1.3.3 Definicija *Logike čije se sekventne formulacije mogu dobiti odbacivanjem ili restrikcijom nekih strukturnih pravila iz LK nazivaju se* ***supstrukturne logike****.*

1.3.1 Podjela supstukturnih logika u odnosu na način dobijanja sekventnog računa

Ukoliko se sistem dobije restrikcijom strukturnog pravila *slabljenja* desno od $\vdash$, tj. ukoliko se sukcedent sastoji najviše od jedne formule, onda kažemo da je dobijeni sistem sekvenata sistem za ***Intuicionističku logiku***.
Međutim, ukoliko odbacimo strukturno pravilo *slabljenja* iz LK, dobija se sistem sekvenata za ***Relevantnu logiku***. Sistem sekvenata za ***Afinu logiku***[4] dobija se tako što se u potpunosti odbaci strukturno pravilo *kontrakcije*. Ukoliko odbacimo i jedno i drugo pomenuto pravilo, tj. ukoliko odbacimo i pravila *slabljenja* i *kontrakcije* nastaje sistema sekvenata za ***Linearnu logiku***. Sistem sekvenata za ***Lambekovu logiku***, dobija se odbacivanjem strukturnih pravila: *slabljenja*, *kontrakcije* i *permutacije*. [11] U ovom radu nećemo ulaziti u to zašto se vrši restrikija ili se potpuno odbacuju određenja strukturna pravila. O razlozima za restrikciju ili odbacivanje nekih strukturnih pravila može se pročitati u [16].

[4]Afina logika poznata je još pod nazivom ***Grišinova*** ili ***BCK logika***.

Shodno tome, ukoliko logičke sisteme posmatramo u odnosu na njihove strukture, tj. koja svojstva ne sadrže, dijelimo ih na sledeće supstrukturne tipove:

- Relevantne - omogućavaju *zamjenu* i *kontrakciju*, ali ne i *slabljenje*. Ovakva struktura omogućava da se svaka promjenljiva i formula koristi najmanje jednom.

- Afine - omogućavaju *zamjenu* i *slabljenje*, ali ne i *kontrakciju*. Ovakva struktura omogućava da se svaka promjenljiva i formula koristi najviše jednom.

- Linearne - omogućavaju *zamjenu*, ali ne i *slabljenje* ili *kontrakciju*. Ovakva struktura omogućava da se svaka promjenljiva i formula koristi tačno jednom.

- Nekomutativne - ne dozvoljava ni jedno od strukturnih pravila. Ovo omogućava da se svaka promjenljiva pojavljuje tačno jedom i to da redoslijedom kojim je uvedena.

Glava 2

Linearna logika

Kaže se da se najljepše stvari u životu ne mogu kupiti novcem, odnosno neke stvari nemaju cijenu. Jedna od tih stvarih je i istina. Gledajući očima matematičara, istinu predstavlja svaka dokazana teorema ili tvrđenje. U tom smislu kažemo da je tradicionalna logika, ,,logika o istini", gdje posmatranu teoremu (istinu) možemo koristi koliko god želimo puta da pri tome nemamo nikakve ,,troškove". Za razliku od istine hrana, koja nam je takođe dragocjena, ima cijenu. Kada napravimo ručak možemo ga pojesti samo jednom. U tom smislu, imamo i Linearnu logiku. Linearna logika predstavlja ,,logiku o resursima", gdje se pod resursima podrazumjevaju hipoteze ili pretpostavke. Resursi su potrošni, odnosno oni se ne mogu proizvoljno duplirati ili odbacivati. Upravo zbog toga Linearna logika se izdvojila kao jedna od najinteresantnijih i popularnijih logika.

2.1 Sintaksa Linearne logike

2.1.1 Veznici u Linearnoj logici

Eksponencijalni veznici

U Linearnog logici se sem uobičajenih veznika definišu i novi veznici.
Posmatrajmo implikaciju:

$$\text{Ako } A \text{ i } A \to B \text{ , tada važi } B\text{, ali i dalje imamo } A \text{ .}$$

U matematici ova implikacija je dobra, međutim u realnom životu implikacije su uzročne. Šta to znači? Uzročne implikacije ne mogu se ponavljati, jer ukoliko ih primjenimo uslovi se izmjene[1].

[1]Promjena uslova u fizici je inače poznata kao reakcija

2.1.1 Primjer Definišimo A i B na sledeći način: neka A ima značenje,,Imati 200 dinar", a B neka ima značenje,,Dobiti komad pice". Nakon izvršavanja posmatrane implikacije, potrošeno je 200 dinara, te ne možemo ponovo izvršiti implikaciju. Dakle, došlo je do promjene uslova (reakcije), iz džepa je potrošeno 200 dinara.

Na osnovu ovog primjera možemo uvesti *linearnu implikaciju.*

Linearna implikacija u oznaci $A \multimap B$ (čita se,,konzumiranjem A dobija se B" ili ,,A lizalica B") predstavlja implikaciju koja znači da iz A se zaključuje B, ali predpostavku A ne možemo više koristiti.
Ako se vratimo na posmatran primjer implikacija $A \multimap B$ znači da mogu potrošiti 200 dinara na komada pice, ali jednom, jer nakon toga nemam više 200 dinara.

Nakon uvođenja linearne implikacije, novonastala situacija zahtjeva da uvedemo i posebne veznike koji će brojati iteraciju akcija. Takve veznike nazivamo *eksponencijalnim* i označamo ih sa ! i ?.
Dakle, zapis $!A$ gdje ! ***eksponencionalni veznik*** nam omogućava da pobjegnemo od linearnosti, odnosno da naglasimo da imamo beskonačnu zalihu A. Sada možemo i standardnu implikaciju definisati na sledeći način:

$$A \Rightarrow B = (!A \multimap B).$$

Važno je napomenuti da je ova formula jenda od esencijalnih za prevođenje intuicionističke logike u linearnu.

Dvije konjunkcije

U Linearnoj logici postoje dvije vrste konjunkcije:

1. ***multiplikativna konjunkcija*** u oznaci $\otimes$
2. ***aditivna konjunkcija*** u oznaci & .

Obe ove vrste izražavaju dostupnost dvije akcije. One predstavljaju dvije različite interpretacije veznika $\wedge$.

$A \otimes B$ *multiplikativna konjunkcija*, čita se ,,i A i B", predstavlja formu u kojoj će obe akcije biti obavljene, odnosno obe će biti proizvedene iz zajednočkog skupa resursa.

2.1.2 Primjer Neka se A interpterita kao ,,Imam parče pice", B kao ,,Imam sok " i D kao ,,Imam 200 dinara" (Pretpostavka je da je cijena pice 200 dinara kao i cijena soka 200 dinara). Tada zapis:

- $D \multimap A, D \multimap B, \quad D, D \vdash A \otimes B$ je tačan.

  U našoj interpretaciji znači da imamo i 200 dinara da kupimo picu i 200 dinara da kupimo sok.

- $D \multimap A, D \multimap B, \quad D \vdash A \otimes B$ nije tačan.

  U našoj interpteraciji bi značilo da imam samo 200 dinara, a kupio sam i sok i picu što je nemoguće.

$A\&B$ *Aditivna konjunkcija* , čita se ,,Odabrati od A i B", predstavlja formu u kojoj se bira jedna od akcija koja će biti izvršena, a ne obe. Nakon uvođenja aditivne konjunkcije možemo se ponovo vratiti na primjer 2.1.2 u kojem zapis $D \multimap A, D \multimap B, D \vdash A \otimes B$ nije imao smisao. Međutim, ukoliko u navedenom primjeru multiplikativnu konjunkciju zamjenimo sa aditivnom dobijamo sledeći izraz:

$$D \multimap A, D \multimap B, D \vdash A\&B.$$

Sada ovo interpretiramo: ,,Pošto imamo samo 200 dinara, što je dovoljno samo za picu ili sok, biramo jedno od to dvoje da kupimo, ali ne i oboje."

Disjunkcija

Pored konjunkcija u linearnoj algebri postoji i ***disjunkcija*** koja je definisana na identičan način kao klasično $\vee$, samo se u Linearnoj logici drugacije označava.

$A \oplus B$ *Dijunkcija* , čita se ,,A ili B", predstavlja formu u kojoj se zna da će se jedna od akcija A ili B izvšiti, ali se ne bira koja.

2.1.3 Primjer Neka C označava rečenicu: ,,Bacam novčić.", A rečenicu ,,Bilo je pismo" dok B ,,Bila je glava." Tada izraz:

$$C \multimap A \oplus B$$

ima sledeću interpretaciju, kada bacimo novčić, ne možemo birati šta će pasti, ali znamo sigurno da će biti ili pismo ili glava, tj. bar jedno od mogućnosti.

Radi lakšeg razumjevanja, da ne bi došlo do zabune pojasnimo još jednom razliku između $\otimes$ & i $\oplus$ na jednom primjeru.

2.1.4 Primjer Interpretirajmo A sa ,,Ja imam picu" , B sa ,,Ja imam sladoled" i C sa ,,Ja sam srećan". Tada linearne implikacije imaju sledeće značenje:

1. $A \otimes B \multimap C$ Ja ću biti srećan ako budem imao oboje, i picu i sladoled.
2. $A\&B \multimap C$ Ja ću biti srećan ako budem mogao da biram između pice i sladoleda, ali sve dok ja mogu da biram jedno od to dvoje.
3. $A \oplus B \multimap C$ Ja ću biti srećan ako budem imao ili picu ili sladoled, svejedno mi je koje od to dvoje.

Disjunkcija $\parr$

Ova disjunkcija izražava zavistnost između dvije vrste akcija. Radi lakšeg razumjevanja ova disjunkcija se pretežno čita kao $A^{\perp} \multimap B$.

Linearna negacija

Linearna negacija u oznaci $()^{\perp}$ predstavlja jedan on važnijih veznika u linearnoj logici. Linearna negacija se čita kao ,,nula”. Ova negativna operacija predstavlja operaciju koja ima isto značenje kao transpozicija u linearnoj algebri. Dakle, ako je A bila akcija tada je $A^{\perp}$ predstavlja reakciju. Imajući to u vidu zaključujemo da linearne implikacije $A \multimap B$ i $B^{\perp} \multimap A^{\perp}$ su iste, odnosno dualne.

Najvažnija osobina linearne negacije je da vazi identitet:

$$(A^{\perp})^{\perp} = A$$

Inovulutivne osobine nule omogućavaju De Morganovi zakoni. Više o tome može se naći u [9] i [**?**].

Formule

Negaciju možemo proširiti na ostale formule pomoću De Morganovih zakona te dobijamo sledeće formule:

Tabela 2.1: Formule

$1^{\perp} := \perp$	$\perp^{\perp} := 1$
$\top^{\perp} := 0$	$0^{\perp} := \top$
$(p)^{\perp} := p^{\perp}$	$(p^{\perp})^{\perp} := p$
$(A \otimes B)^{\perp} := A^{\perp} \parr B^{\perp}$	$(A \parr B)^{\perp} := A^{\perp} \otimes B^{\perp}$
$(A \& B)^{\perp} := A^{\perp} \oplus B^{\perp}$	$(A \oplus B)^{\perp} := A^{\perp} \& B^{\perp}$
$(!A)^{\perp} :=?A^{\perp}$	$(?A)^{\perp} :=!A^{\perp}$
$(\forall x A)^{\perp} := \exists x A^{\perp}$	$(\exists x A)^{\perp} := \forall x A^{\perp}$
$A \multimap B := A^{\perp} \parr B$	

Prelazi i stanja

Stanja se pretežno izražavaju formulama, dok se prelazi izražavaju značenjem implikacije između stanja. To znači da se kao aksiom uzima sledeće: stanje S_1 je dostupno iz stanja S, ako je implikacija $S \multimap S_1$ dokazana. Međutim, u logici, ne može se sve na ovaj način predstaviti. Posmatrajmo primjer jedne hemijske reakcije.

2.1.5 Primjer

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

Ovu hemijski jednačinu možemo intepretirati u standardnom govoru i na sledeći način: CH_4 i O_2 i O_2 slijedi CO_2 i H_2O i H_2O. Možemo se ovako izraziti, jer naš mozak zna da u ovom slučaju izraz ,,i" nije idempotentan (zbog proporcija), odnosno kada se početno stanje iskoristi za dobijanje krajnjeg, ono se više ne može iskoristiti. Zato bi ovu reakciju trebalo zapisati:

$$CH_4 \otimes O_2 \otimes O_2 \multimap CO_2 \otimes H_2O \otimes H_2O$$

Na ovaj način, zapisana hemijska jednačina se tumači kao linearna posledica od počentog do krajnjeg stanja.

2.2 Linearna prirodna dedukcija

Zbog velike primjene Linearne logike prije svega u funkcionalnom programiranju, javila se potreba za uvođenjem intuicionističke verzije linearne logike. Kako prirodna dedukcija predstavlja osnovni sistem pomoću kojeg se definiše intuicionistička linearna logika, u ovom dijelu rada uvešćemo osnovne pojmove prirodne dedukcije.

2.2.1 Pravila zaključivanja

Prvo se uvode pravila, koja dijelimo na pravila uvođenja (pravila koja uvode logičke veznike u zaključke) i pravila eliminacije (pravila koja eliminišu logičke veznike). Uvodna pravila obilježavaju se sa slovom I (,,introduction rule"), dok eliminacijsko sa slovom E (,,elimination rule").

Multiplikativna konjunkcija

Ukoliko imamo neke resurse, i želimo da postignemo ciljeve A i B istovremeno ($A \otimes B$), to radimo tako što prvo podjelimo resurse na Δ i Δ' resurse, te pokažemo da se pomoću resursa Δ može postići cilj A, a pomoću resursa Δ' cilj B.

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta' \vdash B}{\Delta, \Delta' \vdash A \otimes B} \otimes I$$

Pravilo za eliminaciju nam daje ono šta možemo dobiti ukoliko znamo da ciljeve A i B možemo postići istovremeno iz istog resursa. Dakle, ako sa A i B i resursom $\Delta^{'}$ možemo postići cilj C, onda ga možemo postići i sa resursima $\Delta, \Delta^{'}$.

$$\frac{\Delta \vdash A \otimes B \quad \Delta^{'}, u : A, \omega : B \vdash C}{\Delta, \Delta^{'} \vdash C} \otimes E$$

Aditivna konjunkcija $A \& B$

Ovo pravilo uvođenja, još nazivamo i *interni izbor*. Sve dok ne odlučimo koje od ciljeva hoćemo da postignemo A ili B resurs je dostupan za obe premise.

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \& B} \& I$$

Upravo zbog toga, kako ne možemo istrovremeo postići A i B imamo dva eleminaciona pravila.

$$\frac{\Delta \vdash A \& B}{\Delta \vdash A} \& E_L$$

$$\frac{\Delta \vdash A \& B}{\Delta \vdash B} \& E_R$$

Linearna implikacija

Linearna implikacija u oznaci $A \multimap B$ predstavlja postizanje cilja B pomoću resursa A.

$$\frac{\Delta, \omega : A \vdash B}{\Delta \vdash A \multimap B} \multimap I$$

Međutim ako znamo da važi $A \multimap B$, tada B možemo dobiti iz derivacije (resursa) od A.

$$\frac{\Delta \vdash A \multimap B \quad \Delta^{'} \vdash A}{\Delta, \Delta^{'} \vdash B} \multimap E$$

Jedinica

Jedinica, u oznaci 1 predstavlja trivijalni cilj (konstanta) koji nema resurs.

$$\frac{}{\vdash 1} 1I$$

Ako pak 1 možemo postići sa nekim resursom Δ, tada znamo da možemo trošiti sve te resurse.

$$\frac{\Delta \vdash 1 \quad \Delta^{'} \vdash C}{\Delta, \Delta^{'} \vdash C} 1E$$

T ,,tačno"

Predstavlja jedinicu za aditivni konjunkciju, koja slijedi zakone intuicionističke istine. To je cilj koji troši sve resurse.

$$\frac{}{\vdash \top}\top I$$

Za $\top$ ne postoji eliminacijsko pravilo.

Disjunkcija

Za disjunkciju $A \oplus B$ imamo dva uvodna pravila lijevo i desno.

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \oplus B}\oplus I_L$$

$$\frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \oplus B}\oplus I_R$$

Što se tiče eliminacionog pravila ono izlgleda na sledeći način za disjunkciju $A \oplus B$.

$$\frac{\Delta \vdash A \oplus B \qquad \Delta', u : A \vdash C \qquad \Delta', \omega : B \vdash C}{\Delta, \Delta' \vdash C}\oplus E$$

Impossibility

Ovo pravilo u oznaci sa 0 označava slučaj disjunkcije izmedju nule aditivne konjunkcije i jedinice od $\oplus$.

$$\frac{\Delta \vdash 0}{\Delta, \Delta' \vdash C} 0E$$

Univerzalni kvantifikator

Univerzalni kvantifikator $\forall$ definišemo na sledeći način: $\forall x.A$ je tačno ako je $[a/x]A$ tačno za proizvoljno a.

$$\frac{\Delta \vdash [a/x]A}{\Delta \vdash \forall x.A}\forall I^a$$

Oznaka a u navedenom pravilu predstavlja podsjetnik da je parametar a novi parametar, on ne smije da se pojavljuje u Δ ili $\forall x$.

$$\frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash [t/x]A}\forall E$$

Egzistencijalni kvantifikator

$$\frac{\Delta \vdash [t/x]A}{\Delta \vdash \exists x.A}\exists I$$

$$\frac{\Delta \vdash \exists x.A \qquad \Delta', \omega : [a/x]A \vdash C}{\Delta, \Delta' \vdash C}\exists E^a$$

2.3 Intuicionistička linearna logika

U prvom poglavlju ovog rada date su osnove sekventrnog računa koje je utemeljio Gentzen i koji predstavljaju temelj za izučavanje zakonitosti u logici.

Na osnovu linearne prirodne dedukcije, razvijena je i Intuicionistička linearna logika i njen sekventni račun kao račun dokaza. U ovom dijelu rada daju se osnove Intuicionističke linearne logike, koje omogućavaju da se modeliraju proizvoljne Petri mreže.

U sekventnom računu za intuicionističku linearnu logiku sekvent $A_1 \ldots, A_n \vdash A$ se tumači kao: ,,Formula A je izvediva iz predpostavki (formula) $A_1 \ldots, A_n$". Skup predpostavki $A_1 \ldots, A_n$ označavamo sa Γ.

U sekventnom računu za dodavanje pretpostavki ili uklanjanje duplikata imamo dva strukturna pravila:

1. slabljenje $\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$
2. kontrakcija $\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$

Kao posljedica ova dva pravila, imamo i sledeća dva pravila za konjunkciju:

1. $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}$
2. $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$

Bitno je naglasiti, da se uvijek prvo pravilo može izvesti iz drugog pomoću osobine slabljenja, dok drugo pravilo se može izvesti iz prvog pomoću kontrakcije.

Međutim, ova pravila ne važe u intuicionističkoj linearnoj logici. Šta to znači? To za nas znači da se ne mogu proizvoljno ubaciti pretpostavke u niz pretpostavki, niti duplikati ukloniti. Izostavljanje pomenutih pravila je prouzrokovalo uvođenje dvije vrste konjunkcija $\otimes$ i $\oplus$ za koje je dato detaljno objašnjenje i razjašnjena razlika u poglavlju ,,Veznici u Linearnoj logici".

2.3.1 Pravila u Intuicionističkoj linearnoj logici

Podjsetimo se veznika koji su u Linearnoj logici, oni su takođe i u Intuicionističkoj linearnoj logici:

- $\otimes$ multiplikativna konjunkcija, čija je jedinica 1
- & aditivna konjunkcija, čija je jedinica $\top$ (tačno)
- $\oplus$ disjunkcija, čija je jedinica $\perp$ (netačno)

Što se tiče strukturnih pravila, kod Intuicionističke linearne logike imamo ih tri:

- $\frac{}{A \vdash A}$ identitet
- $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$ sječenje
- $\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$ razmjena

Pored strukturnih pravila imamo i logička, koje navodimo u tabeli 2.2. Izvođenja ovih pravila mogu se naći u [9] i [14].

Tabela 2.2: Logična pravila u Intuicionističkoj linearnoj logici

$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$ $(\vdash \otimes)$	$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}$ $(\otimes \vdash)$
$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$ $(\vdash \&)$	$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C}$ $(L\& \vdash)$
$\frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C}$ $(R\& \vdash)$	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}$ $(\vdash \oplus L)$
$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}$ $(\vdash \oplus R)$	$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \oplus B \vdash C}$ $(\oplus \vdash)$
$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$ $(\vdash \multimap)$	$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, B \Vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}$ $(\multimap \vdash)$
$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, 1 \vdash A}$	

Odsustvo strukturnih pravila sljabljenja i kontrakcije, se nadoknađuje sa logičkim pravilima ,,of course".

Tabela 2.3: ,, Of course rules"

$\dfrac{}{!A \vdash A}$	$\dfrac{}{!A \vdash 1}$
$\dfrac{}{!A \vdash !A \otimes !A}$	$\dfrac{B \vdash A \quad B \vdash 1 \quad B \vdash B \otimes B}{B \vdash !A}$

2.3.2 Kvantali

Kvantal kao algebarska struktura smatra se jednim od modela Intuicionističke linearne logike. Kvantal predstavlja komutativni monoid na kompletnoj semimreži koja imam supremum za svaki konačni neprezana podskup. Kao model naše logike kvantali se definišu na sledeći načnin:

2.3.1 Definicija *Kvantal Q predstavlja kompletnu semi mrežu (koja ima supremum) sa asocijativnom, komutativnom, binarnom operacijom $\otimes$ i konstantom 1 tako da važi:*

1. $q \otimes 1 = q$
2. $q \otimes \bigvee P = \bigvee \{q \otimes p | p \in P\}$

Razmotrimo sada interpretacije u Q, do sada definisanih operacija i kontstantih u intucionističkoj linearnoj logici. Implikacija u ovoj struktruri se tumači kao $\leq$ na mrežama.
Logička operacija $\otimes$ se intepretira kao gore navedena binarna operacija u kvantalu .
Logička konstansa 1, se tumači kao 1 u Q, dok logičke konstante T i F se shvataju kao vrh mreže (element na vrhu) i donji element komplentne mreže, resprektivno.
Disjunkciju $\oplus$ linearne logike, tumačimo kao binarnu najmanju gornju granicu mreže odnosno supremum, dok konjunkciju & kao binarnu najveću donju granicu odnosno infimum.

Linearna implikacija se definiše na sledeći način:

$$p \multimap q \coloneqq \bigvee\{r|r \otimes p \leq q\}$$

Definicija linearne implikacije omogućava i sledeću osobinu: $r \otimes p \leq q \;\; akko \leq p \multimap q$. Sada kad smo definisali interpretaciu logičkih operacija i konstanti u Q strukturi, možemo implikaciju

$$A_1, \ldots A_n \vdash A$$

definisati u Q kao

$$[\![A_1]\!] \otimes \ldots [\![A_n]\!] \leq [\![A]\!]$$

Specijalno, za $n = 0$ imamo:

$$\vdash A \;\; akko \;\; 1 \leq [\![A]\!]$$

Glava 3

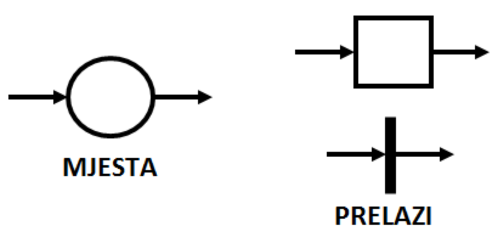
Linearna logika i Petri mreže

Ove glava predstavlja centralni dio rada. U njemu se predstavlja način kako se mogu Petri mreže prikazati u Linearnoj logici. Prije toga, uvedeni su osnovni pojmovi iz teorije Petri mreža.

3.1 Osnove Petri mreža

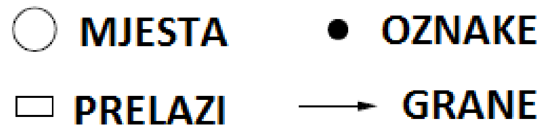
Petri mreže, ime su dobile po matematičaru Carlu Adam Petri[1], koji ih je kreirao 1962. godine. Petri mreže predstavljaju grafički jezik za modelovanje složenih (distribuiranih) sistema. Preciznije, za Petri mreže kažemo da su grafički predstavljene usmjerene mreže sa dvije vrste čvorova:

1. *mjesta* (eng. places) (stanja)
2. *prelazi*(eng. transitions) (prelazi stanja)



Slika 3.1: Vrste čvorova

[1]prof. dr Carl Adam Petri (12.7.1926-2.7.2010.), njemački matematičar i kompjuterski naučnik.



Slika 3.2: Simboli za predstavljanje Petri mreža grafički

Pored čvorova (mjesta i prelaza) u Petri mrežama imamo i direktne *grane* (eng. direcet arcs) koje povezuju mjesta i prelaze. Grane se dijele na ulazne i izlazne grane. Dakle, Petri mreže predstavljaju mreže mjesta i prelaza, u kojima mjesta imaju značenje uslova, a prelazi događaja. Sistem se razvija (inače se koristi izraz okidanje mreže) tako što se oznake (engl. tokens) mijenjaju po različitim mjestima.

Svaka akcija okidanja mreže uklanja oznake iz ulaznih mjesta i dodaje ih jednom ili više izlaznih mjesta. Okidanje se vrši prema sledećim pravilima:

1. Prelaz je omogućen, ako svako mjesto koje je spojeno ulaznom granom, ima najmanje jednu oznaku.

2. Biramo jedan od nedeterminističkih omogućen prelaz u mreži za paljenje.

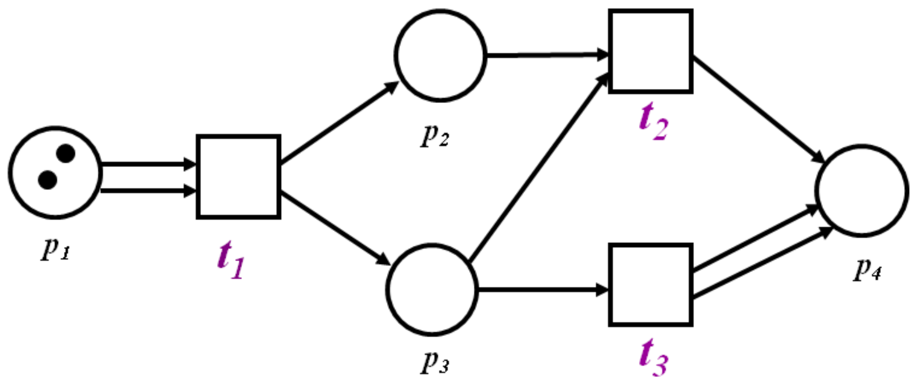
3. Aktiviranje prelaza se vrši uklanjanjem jedne oznake iz svakog ulaznog mjesta i dodavanjem jedne oznake u svako izlazno mjesto odabranog prelaza.

Broj uklonjenih oznakana na ulaznim i broj dodanih oznaka na izlaznim mjestima zavisi od *težine* (engl. weight) ulazećih i izlazećih grana, respektivno. Pitanje se samo nameće, šta predstavljaju težine? Ako predpostavimo da neka grana ima težinu n, to za ulaznu granu predstavlja da mora biti najmanje n oznaka na mjestu da bi se omogućio prelaz. Kada prelaz se realizuje (izvrši se okidanje), n tokena se ukloni sa početnog mjesta grane težine n. Za izlaznu granu, to znači da će n novih oznaka biti dodano na mjesto na njegovom kraju. Važno je napomenuti, ukoliko nije naznačeno podrazumjeva se da je težina grane 1.

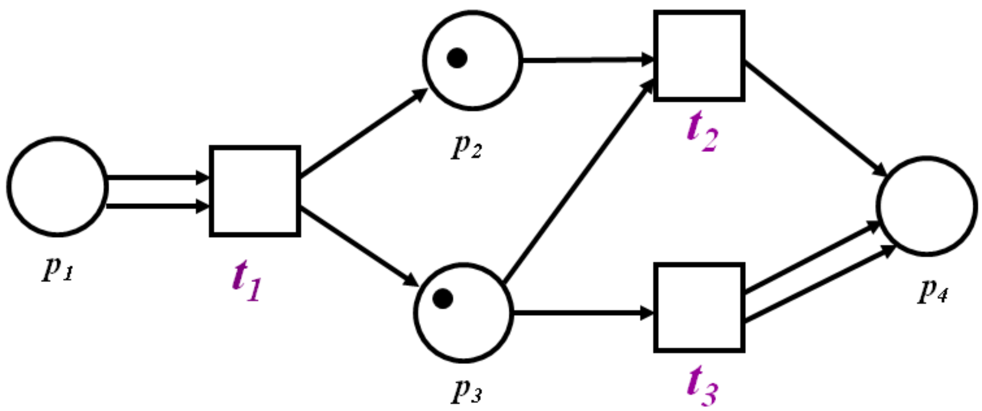
U zavisnosti od težine grana Petri mreže se dijele na sledeći način:

- *ordinarna (obična) Petri mreža* - ako su težine svih grana u Petri mreži jednake 1.

- *neordinarna (otežana) Petri mrža* - ako nisu težine svih grana u Petri mreži jednake 1.



Slika 3.3: Počento stanje Petri mreže.



Slika 3.4: Stanje Petri mreže nakon realizacije prelaza t_1.

Na slikama 3.3 i 3.4 prikazan proces realizacije jednog prelaza u posmatranoj Petri mreži.

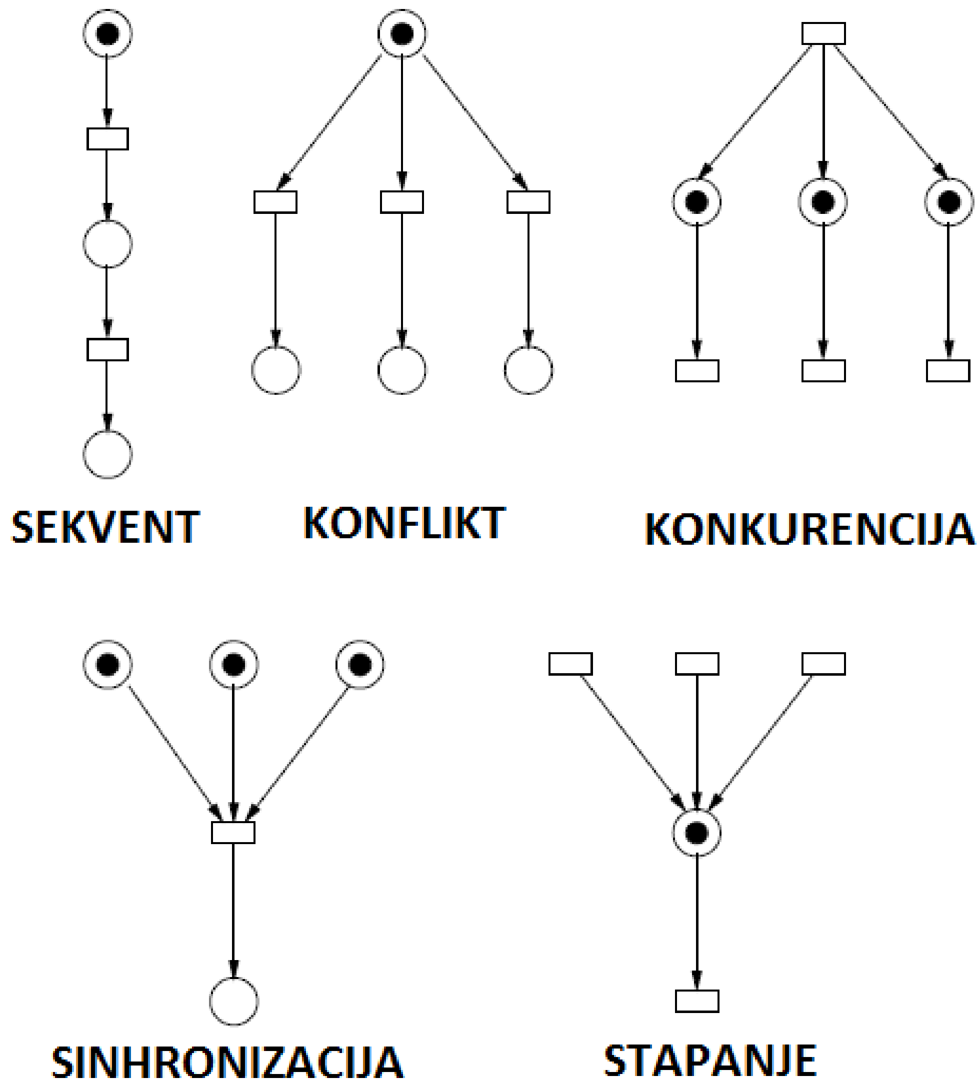
Postoje različite strukture Petri mreža, neke od njih se pominju i objašnjavaju u ovom radu.

- *Sinhronizacija*
- *Konflikt*
- *Sekvent*
- *Konkurencija*
- *Stapanje*

Na slici 3.5 su navedene neke strukture.

Slučaj kada procesi koji međusobno rade nezavisno zatrebaju među rezultat onog drugog nazivamo sinhronizacija. Sinhronizacija se vrši tako što prelaz koji sinhronizuje čeka da svi procesi koje treba sinhronizovati stignu do tačke sinhronizacije. Kada su svi procesi stigli do tačke sinhronizacije ona okidanjem započinje nastavak toka svih procesa u granama.

Ukoliko dvije grane žele nešto učiniti što se međusobno isključuje kažemo da je došlo do konflikta u Petri mreži. Do konflikta područja ispred dolazi kada dva prelaza trebaju istu oznaku da bi okinulii. Na slici 3.5 su navedene neke strukture.



Slika 3.5: Strukture Petri mreža.

3.2 Prikaz Petri mreže u Linearnoj logici

U ovom poglavlju rada, vezan za prikaz Petri mraža u Linearnoj logici, korištena je literatura [17]. Petri mreže su veoma pogodne za predstavljanje u Linearnoj logici. Centralna ideja predstavljanja Petri mreža pomoću Linearne logike je da se topologija mreže predstavi kao skup neograničenih propozicija Γ. Trenutna stanja u mreži, koja su zadata oznakama u mrežama, predstavljaju se kao skup resursa Δ. Kaže se da je moguće doći iz stanja Δ_0 u stanje Δ_1 ako i samo ako važi

$$\Gamma \vdash (\otimes\Delta_0) \multimap (\otimes\Delta_1)$$

Da bi se to postiglo svako mjesto je potrebno posmatrati kao atomički predikat. Ako imamo k oznaka na mjestu p, dodajemo k kopija od p u stanje Δ. Za svaki prelaz u Petri mrežama dodajemo pravilo:

$$p_1 \otimes \cdots \otimes p_m \multimap q_1 \otimes \cdots \otimes q_n$$

u Γ gdje su mjesta $p_1 \dots p_m$ na početku ulaznih grana, a $q_1 \dots q_n$ mjesta na kraju izlaznih grana.

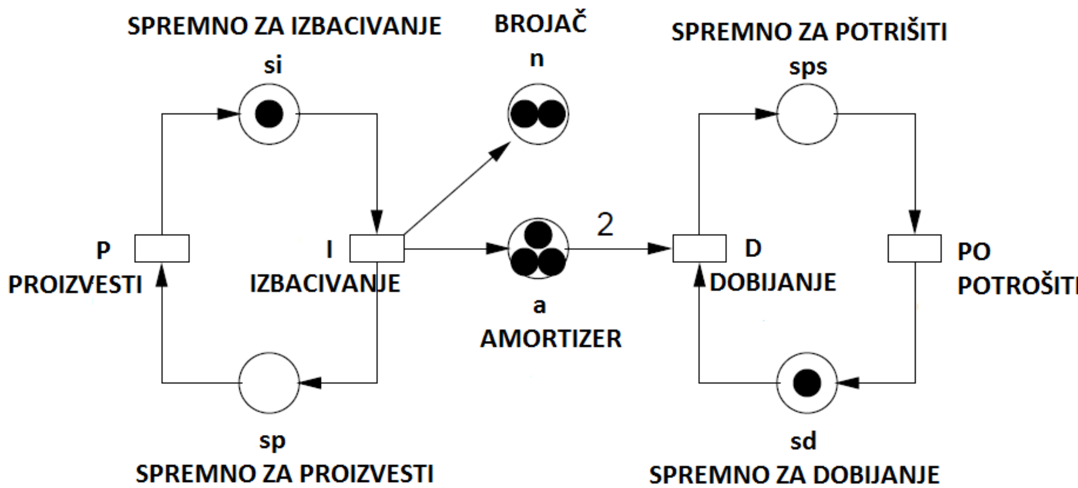
Ako je na grani težina k, mi dodajemo k kopija mjesta p antecedentu ili sukcedentu linearne implikacije koja je odgovarajuća posmatranom prelazu.

Pokažimo sada na jednom primjeru prezentaciju Petri mreže preko sekventnog računa.

3.2.1 Primjer Posmatrajmo sliku 3.6 na kojoj je prikazana šema Petri mreže koja predstavlja mrežu proizvođača - potrošača, te definišimo antecedent i sukcedent.

Prelazi ove Petri mreže čine Γ, dok početna stanja Δ_0.

$$\begin{aligned}
\Gamma = \quad & P:\ sp \multimap si \\
& I:\ si \multimap sp \otimes n \otimes a \\
& D:\ a \otimes a \otimes sd \multimap sps \\
& PO:\ sps \multimap sd \\
\Delta_0 = \quad & si, n, n, a, a, a, sd
\end{aligned}$$

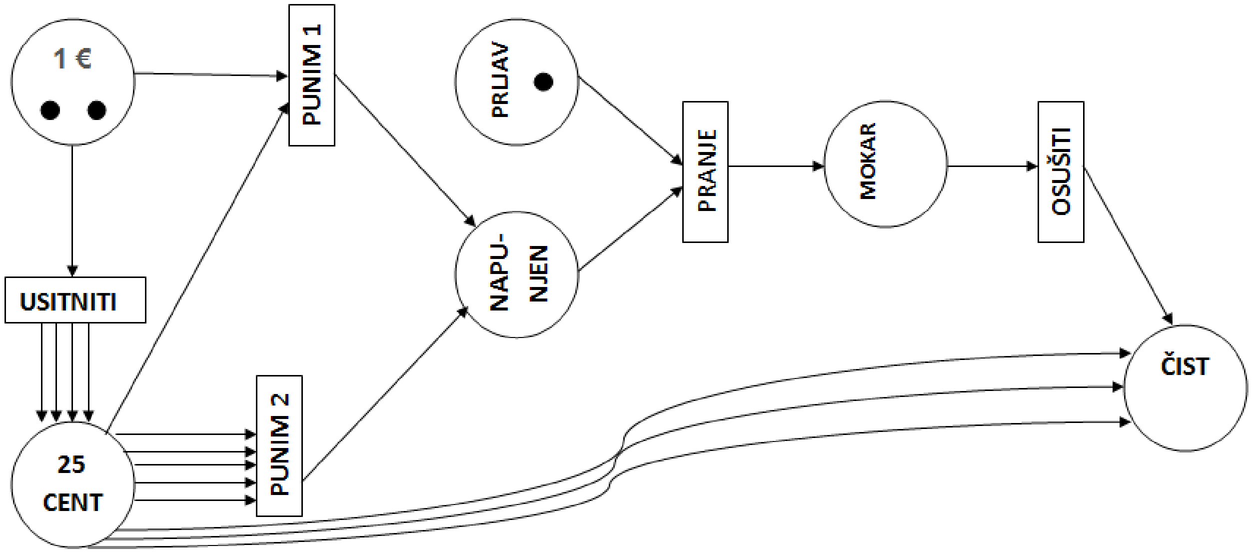


Slika 3.6: Petri mreža: proizvođač - potrošač

Sledeći primjer nam pokazuje kako pomoću formula Linearne logike možemo opisati Petri mrežu.

3.2.2 Primjer Na slici 3.7 je prikazan rad samoposlužne mašine za pranje i sušenje veša u vešeraju pomoću Petri mreže. Treba da se opiše rad samoposlužne veš mašine i pomoću formula linearne logike. To je moguće učiniti jer Petri mreže uvijek možemo predstaviti pomoću linearne logike.

Zašto ovako baš izgleda prikaz Petri mreže mi u ovom radu nećemo zalaziti, jer naš zadatak je da ovu Petri mrežu prikažemo pomoću formula Linearne logike.



Slika 3.7: Samouslužna veš mašina za pranje i šušenje

Na sledeći način definišemo prelaze:

Usitniti: $!(1€ \multimap (25centi)^4)$

Punim 1: $!((25centi)^5 \multimap napunjen)$

Punim 2: $!(1€ \otimes 25centi \multimap napunjen)$

Pranje: $!(napunjen \otimes prljav \multimap mokar)$

Čist $(25centi)^3 \otimes mokar \multimap$ čist

Pod zapisom $(25centi)^4$ se misli $(25centi)\otimes(25centi)\otimes(25centi)\otimes(25centi)$. Formule smo pisali sa eksponencijalnim veznikom ! jer želimo ih više puta upotrebljavati. navedene formule opisuju strukturu mreže, kao metodu koja objašnjava koji se od objekata može izvršiti. Važno je napomenuti da su na slici obilježeni sa oznakama početna stanja i za njih govorimo $1€ \otimes 1€ \otimes prljav$ dok konačno stanje je *čist*.

3.3 Intuicionistička linearna logika i Petri mreže

U ovod dijelu rada prikazuje se veza izmedju Intuicionističke linearne logike, odnosno kvantala i Petri mreža. Kvantali su kao jedan od modela Intuicionističke linearne logike definisani u glavi 2. Sva teorija vezano za interpretaciju Intuicionističke linearne logike u Petri mrežama može se naći u [6].

3.3.1 Petri mreže kao multiskupovi

Petri mreže se mogu posmatrati kao modeli procesa, u pogledu vrste resursa i kako te resurse možemo trošiti. U skladu sa tim Petri mreže se mogu opisati i pomoću multiskup notacije.

3.3.1 Definicija *Multiskup nad skupom P je funkcija $m : P \to \mathbb{N}$, kod koje je operacija $+$ definisana sa $(m + m')(a) = m(a) + m'(a)$ za svako $a \in P$.*

Multiskupovi nad P čine komutativni monoid sa $\underline{0}$, dakle važi $\forall a \in P.\underline{0}(a) = 0$, praznim multiskupom, kao prirodnim elementom. Svaki element od P možemo pretvoriti u singlton tj. jednočlan skup multiskupa na sledeći način:
Neka je $a \in P$ tada sa $\underline{a}$ označavamo jednočlan skup za koji važi $\underline{a}(a) = 1$ i $\underline{a}(b) = 0$ kada je $a \neq b$.

Važno je još naglasiti da su multiskupovi pracijalno uređeni, odnosno važi $m \leq m'$ *ako i samo ako* $\forall a \in P.m(a) \leq m'(a)$.
Definišimo još skalarno množenje:

3.3.2 Definicija *Skalarno moženje za $n \in \mathbb{N}$, za svako $a \in P$ i m kao multiskup je definisan na sledeći način:*

$$(nm)(a) = n \cdot m(a).$$

Sada se može uvesti i novu definiciju Petri mreža:

3.3.3 Definicija *Petri mreža N predstavlja uređenu četvorku $(P, T, \cdot(-), (-)\cdot)$, gdje imamo dva skupa: P skup mjesta, T skup prelaza, koja su praćena oznakama za prevođenje $\cdot(-), (-)\cdot$ na prelazima, koja svakom $t \in T$ pridružuje multiskup od P. Te multiskupove nazivamo prije ili posle multiskupove od t.*

Petri mreže posjeduju pojam stanja, koji intuitivno odgovara podjeli resursa u linearnoj logici, što je u mrežama označeno pomoću oznaka.
Oznaka Petri mreže N je takođe muktiskup nad P. Za skup oznaka u mreži koristi se oznaka M, dok za početnu oznaku koristi se zapis m_0. Generalno, samo ponašanje mreže se izražava tako što se izgovara kako se oznake mijenjaju kada se vrši okidanje. Za oznake m, m' i prelaz $t \in T$, $m\ [t\rangle\ m'$ predstavlja okidanje na prelazu t od m do m', tj kažemo:

$$m[t\rangle m' \ \ ako \ \ i \ \ samo \ \ ako \ \ \exists m'' \in M.m = m'' + \cdot t \ \ i \ \ t \cdot + m'' = m'.$$

Dakle prelaz t je omogućen za m ako postoji $m' \in M$ tako da važi $m\,[t\rangle\, m'$.
Odnosno radi lakšeg zapisa piše se:

$$m \to m' \ \ akko\ \ \exists t_1, \dots, t_n \in T,\ m_1, \dots, m_n \in M, n \geq 0.m[t_1\rangle m_1 \dots [t_n\rangle m_n = m'.$$

Relacija $\to$ je relacija koja je refleksivna i tranzitivna. Oznake koje m može da dostigne nagore čine skup koji se označava sa

$$\uparrow (m) = \{m' \in M | m \to m'\},$$

dok oznake koje m može da dostigne nadole čine skup koji se označava sa

$$\downarrow (m) = \{m' \in M | m' \to m\}.$$

Ovu notaciju se koristiti i za skup oznaka M, tj definiše se:

$$\downarrow (M) = \{m' | \exists m \in M.m' \to m\}.$$

3.3.4 Propozicija *Za svako* $m, m', m'' \in M$ *važi:*

$$m \to m' \implies m + m'' \to m' + m''$$

3.3.2 Kvantali i mreže

Posmatrajmo Petri mrežu N, skup oznaka mreže M i relaciju $\to$. U ovom dijelu rada konstruišu se kvantali pomoću navedenih pojmova. Elementi kvantala Q su sa donje strane zatvoreni podskupovi oznaka.

3.3.5 Definicija *Za podskup* K *skupa* M *kažemo da je sa donje strane zatvoren skup ako i samo ako zadovoljava sledeći uslov:*

$$m' \to m \ \ i\ \ m \in M \implies m' \in M.$$

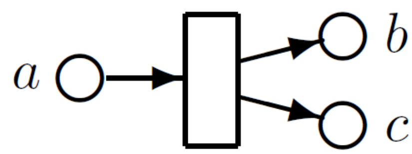
Skup Q je određen inkluzijom $\subseteq$. Što se tiče binarne operacije, koje je navođena i ranije kod Kvantala, $\otimes$ ima jedinicu definisanu sa: $\mathbf{1} = \downarrow (\mathit{0})$, dok ona sama je definisana na sledeći način:

$$p \otimes q = \downarrow (p + q),$$

gdje $p + q = \{m_p + m_q | m_p \in p, m_q \in q\}$. Ili ekvivalentno, može se definisati i ovako¿

$$p \otimes q = \{m | \exists m_p \in p, m_q \in q.m \to m_p + m_q\}.$$

Zatvorenost sa donje strane, $\downarrow$, u definiciji binarne operacije $\otimes$ se postiže dobrim definisanjem operacije, kao što možemo vidjeti u mrezi na slici 3.8.



Slika 3.8

Vidimo da u mreži imamo skup mjesta $P = \{a, b, c\}$, i da važi $\downarrow(\underline{b}) + \downarrow(\underline{c}) = \{m\} \neq \{\underline{a}, m\} = \downarrow \{m\}$ gdje je $m = \underline{b} + \underline{c}$.

3.3.3 Interpretacija Intucionističke linearne logike u Petri mrežama

Da bi se interpretirala Intucionistička linearna logika u Petri mrežama potrebno je atomičke iskaze posmatrati kao elemente asocijatovnog kvantala. Inače, atomičle propozicije odgovaraju mjestima u Petri mrežama. Dakle imamo sledeće formule:

Konstante:	$A ::= T \mid F \mid 1$
Iskazna slova:	a
Multiplikativni veznici:	$A \otimes A \mid A \multimap A$
Aditivni veznici:	$A \& A \mid A \oplus A$

Atomički iskaz a u mrežama označava mjesto a, a kao interpetaciju a uzimamo donje zatvaranje asocijativne oznake $\underline{a}$.

Posmatrajući mrežu N formule linearne logike možemo interpretirati na sledeći način:

1. $[\![T]\!]_N = M$
2. $[\![F]\!]_N = \emptyset$
3. $[\![1]\!]_N = \{m|m \to \underline{0}\}$
4. $[\![a]\!]_N = \{m|m \to \underline{a}\}$
5. $[\![A \otimes B]\!]_N = \{m|\exists m_A \in [\![A]\!]_N, m_B \in [\![B]\!]_N.m \to m_A + m_B\}$
6. $[\![A \multimap B]\!]_N = \{m|\forall m_A \in [\![A]\!]_N, m + m_A \in [\![B]\!]_N\}$
7. $[\![A\&B]\!]_N = [\![A]\!]_N \cap [\![B]\!]_N$
8. $[\![A \oplus B]\!]_N = [\![A]\!]_N \cup [\![B]\!]_N$

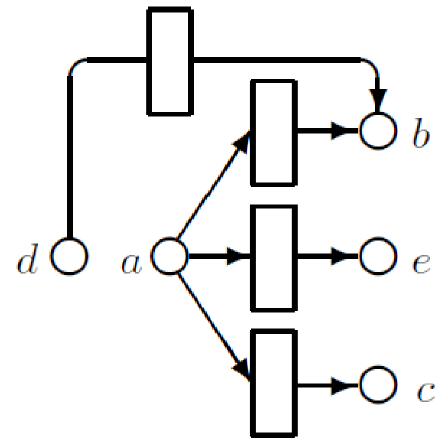
Sada kada su definisane formule Linearne logike, na ovaj način se može navesti i iskaze koji su za ovu notaciju važni.

3.3.6 Propozicija *Neka je A i B tvrđenja posmatrana u mreži N tada važi:*

$$\vdash_N A \quad akko \quad \underline{0} \in [\![A]\!]_N$$

$$A \vdash_N B \quad akko \quad [\![A]\!]_N \subseteq [\![B]\!]_N$$
$$\vdash_N A \multimap B.$$

$N_1 =$



Slika 3.9

3.3.7 Primjer Na slici 3.9 je prikazana jedna Petri mreža, koju ćemo sada analizrati.

Ovde imamo $[\![b]\!] = \{\underline{d}, \underline{a}, \underline{b}\}, \ldots, [\![c]\!] = \{\underline{a}, \underline{c}\}$ i $[\![b \otimes c]\!] = \{\underline{d} + \underline{a}, \underline{d} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{a}, \underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{a}, \underline{b} + \underline{c}\}$.

Tako da važi:

$[\![d \otimes a]\!] \subseteq [\![b \otimes c]\!]$

$\vdash a \otimes a \multimap b \otimes c$

$\vdash a \multimap b \oplus c, \vdash d \oplus a \multimap b, \vdash d \multimap b \oplus c$

$\vdash b \& c \multimap e, \vdash a \multimap b \& c.$

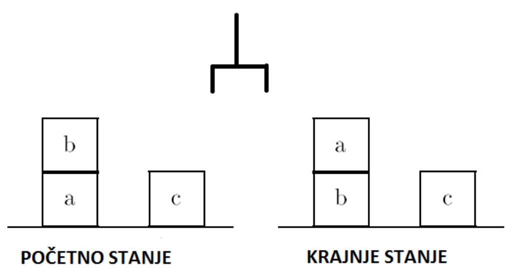
Glava 4

Linearna logika u Coq-u

U četvrtoj glavi rada ukratko je opisan problem pod nazivom ,,Svijet kockica" (Blocks world), jer ga mnogi smatraju kao motivacioni primjer za razvoj Linearne logike. Uvode se i osnovne stvari o Coq dokazivaču, u kojem je implementiran ovaj pomenuti problem. Međutim, u radu se ne opisuje detaljno implementacija u Coq-u, već samo se navode primjeri koji su preuzeti iz [18].

4.1 Svijet kockica

Svijet kockica, predstavlja problem koji zapravo ilustruje problem planiranja u vještačkoj inteligenciji. Ovaj problem se zasniva na tome da imamo različite kockice na stolu i robotsku ruku koja je sposobna da istovremeno podigne i spusti jednu kockicu. Zadatak je naći način da se od početne situacije, u našem slučaju, početnog rasporeda kockica, postigne zadani raspored, tj. cilj. Ovaj problem, pravljenja pravih



Slika 4.1

poteza robotske ruke i problem postizanja zadatog cilja, opisali su u logickom smislu nezavisno jedan od drugog Wolfgang Leonhard Bibel[1] i Jean-Yves Girard[2]

[1]Wolfgang Leonhard Bibel (rođ. 1938. god.) njemački naučnik i jedan od osnivača područja vještačke inteligencije.

[2]Jean-Yves Girard (rođ. 1947. god.) francuski logičar i jedan od začetnika Linearne logike.

Uvode se sledeće oznake:

1. $na(x,y)$ kocka x je na kocki y
2. $ns(x)$ kocka x je na stolu
3. $dr(x)$ ruka robota drži kocku x
4. $prazan$ ruka robota je prazna
5. $vk(x)$ na vrhu kocke x nema ništa

Stanja se opisuju kolekcijom propozicija koje su tačne.

4.1.1 Primjer Opišimo početno stanje sa slike 4.1.

$$\Delta_0 = (prazan, ns(a), na(b,a), vk(b), ns(c), vk(c))$$

Na ovaj način se može opisati i krajnje stanje, tj. cilj koji se odnosi da kockica a i kockica b zamjene svoja mjesta. Ideja je stvoriti logički sistem tako da se može dokazati cilj G od pretpostavki Δ ako i samo ako se cilj G može postići iz početnog stanja Δ_0. Međutim, veći je problem kako opisati prave poteze. Na primjer:

4.1.2 Primjer Opisati kao logicku implikaciju sledeću situaciju.

Neka je ruka robota prazna, na vrhu kocke x nema ništa, i kocka x je na kocki y. Tada se može pomjeriti kocka, tj. može se postići stanje u kojem ruka robota drži kocku x i na vrhu kocke y nema ništa.

$$\forall x \forall y (prazan \wedge vk(x) \wedge na(x,y)) \supset (dr(x) \wedge vk(y))$$

Međutim ovo nismo tačno itepretirali, jer sa ovakvom interpretacijom mi možemo doći u kombinaciju kontradikotrnih propozicija, kao što su $prazan$ i $dr(b)$.

Ovaj problem se može riješiti uvođenjem pojma vremena. Na primjer, ako sa $\bigcirc A$ označi istinitost propozicije A sledećeg puta, tada se ovaj primjer može intepretirati na sledeći način:

$$\forall x \forall y (prazan \wedge vk(x) \wedge na(x,y)) \supset \bigcirc(dr(x) \wedge vk(y))$$

Sada se vidi da je problem iz prethodnog primjera riješen, jer propozicije $prazan$ i $dr(b)$ nisu kontradiktorne.

U centru ovog problema, je što nama ne treba logika vremena, već logika stanja. To se postiže promjenom pravila. i načina upotrebe pretpostavki. Upravo iz tog razloga javlja se zapis

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C$$

za dokaz pretpostavke C iz pretpostavki $A_1, \ldots, A_n$, gdje su pretpostavke $A_1, \ldots, A_n$ sve tačne i koriste se tačno jednom. Gore navedena zakonitost upravo predstavlja temelj linearne logike.

4.2 Coq dokazivač

Coq predstavlja formalni sistem upravljanja dokazima. Ovaj dokazivač obezbjeđuje formalni jezik za pisanje matematičkih definicija, algoritama i teorema. Coq takođe pruža poboljšanja uobičajne konstruktivne logike kao što su:

- Coq implementira konstruktivnu logiku višeg reda, olakšavajući opis logičkih objekata
- Coq ima dvije hijerarhije: Set za konstruktivne tipove i Prop za klasičnu logku.
- Coq podržava i induktivne i ko-induktivne definicije.

Da bi se izvšilo kodiranje u dokazivaču koristi se pretežno ILL sistem. za ovaj sistem potrebno je prvo uvesti tip linearnih predikata, obezbjediti sintaksu za linearne veznike, kao i definisati operacije kodiranjem lijevih i desnih pravila sekventnog računa.

Skup linearnih predikata (ILinProp) se definiše na sledeći način:

- Implikacija : $(IlinProp) \to (IlinProp) \to IlinProp$
- Jedinica: (IlinProp)
- Plus: $(IlinProp) \to (IlinProp) \to IlinProp$
- Puta: $(IlinProp) \to (IlinProp) \to IlinProp$
- Top: IlinProp
- konjunkcija „i" : $(IlinProp) \to (IlinProp) \to IlinProp$
- Nula: IlinProp

Sintaksa je data u sledećoj tabeli [[18]]

Operacija	Simbol	Sintaksta u Coq	Jedinica	Sintaksa jedinice
Puta	$\otimes$	$**$	1	One
Konjunkcija „i"	&	&&	$\top$	Top
Plus	$\oplus$	$++$	0	$Zero$
Implikacija	$\multimap$	$-\circ$		

4.3 Svijet kockica u Coq

Prvi korak je, kao što je rečeno, definisanje skupa predikata. Skup predikata intepretiran u ILL sistemu za ovaj problem dat je u tabeli.

Variable on:	$Block \rightarrow Block \rightarrow ILinProp$
Variable table:	$Block \rightarrow ILinProp$
Variable clear:	$Block \rightarrow ILinProp$
Variable holds:	$Block \rightarrow ILinProp$
Variable empty:	$ILinProp$

Vidimo da su u tabeli dati Coq kodovi za stanja u Svijetu kockica. Prva tri predikata se odnose na opis odnosa između kockica dok poslednja dva se koriste za opis statusa ruke robota.

Sledeći korak je definisanje skupa dozvoljenjih radnjih kao linearno dedukciju, tj. definisanje prije i posle stanja. Osnovna radnja se odnosi na ruku robota, kako uzeti i staviti kockicu. Kod za ovu osnovnu akciju u Coq dat je na slici 4.2 [18].

```
(* The basic actions *)
Axiom get :
  (x,y:Block)
  (`(empty ** (clear x))
|- (holds x) ** (((table x) -o One) && ((on x y) -o (clear y)))).

Axiom put :
  (x,y:Block)
  (`(holds x)
|- empty ** (clear x) **  ((table x) && ((clear y) -o (on x y)))).
```

Slika 4.2

Prednost ovog dokazivača je u tome što se svaki slučaj može definisati kao lema u Coq-u koje se kao alati mogu koristiti za dalje dokazivanje. Na primjer, može se definisati specijalni slučajevi stavljanja i uzimanja kockica, koji se najčešće koriste (slika 4.3).

```
Lemma gettb :
  (x:Block)
  (`(empty ** (clear x) ** (table x))  |- (holds x)).
Lemma puton :
  (x,y:Block)
  (`((holds x) ** (clear y)) |- empty ** (clear x) ** (on x y)).
Lemma puttb :
  (x:Block)
  (`(holds x)  |- empty ** (clear x) ** (table x)).
```

Slika 4.3

Zaključak

Cilj pisanja ovog rada je da se predstave osnovni pojmovi Linearne logike i da se navede neka njena primjena. Linearna logika predstavlja jednu od najpopularnijih supstrukturnih logika, jer je sama njena ideja stvaranja najbliža ljudskom načinu zaključivanja. Osnova teorije o Linearnoj logici zasniva se na sekventnom računu koji je u ovom radu predstavljen. Jednostavnost sistema Linearne logike omogućava široku primjenu i laku implementaciju u nekom od dokazivača. U ovom radu prikazana je primjena u Petri mrežama koje predstavljaju grafički jezik za modelovanje složenih (distribuiranih) sistema.

Literatura

[1] Abramsky, S. Elsevier, 1993. Computational interpretations of linear logic. Journal of Theoretical computer science, 1-2, pages 3-57, Elsevier, 1993.

[2] Alexiev, V. Applications of linear logic to computation: An overview. Journal of Logic Journal of the IGPL, 1, pages 77-107, Oxford University Press, 1994.

[3] Braüner, T. Introduction to linear logic, Computer Science Department, 1996.

[4] Cervesato, I. Petri nets and linear logic: a case study for logic programming, Carnegie Mellon University, 1995.

[5] Dosen, K., Schroeder-Heister, P. Substructural Logics, Oxford University Press, 1993.

[6] Engberg, U., Winskel, G. Linear logic on Petri nets. Journal of A Decade of Concurrency Reflections and Perspectives, pages 176 - 229, Springer, 1994.

[7] Engberg, U., Winskel, G. Petri nets as models of linear logic. Springer, 1990.

[8] Ghilezan, S., Ivetić, J., Lescanne, P., Likavec, S. Structural rules and resource control in logic and computation.

[9] Girard, J. Y. Linear logic. Elsevier, 1987.

[10] Girard, J. Y. Linear logic: its syntax and semantics. Journal of London Mathematical Society Lecture Note Series, 2, pages 1- 42, Cambridge University Press, 1997.

[11] Isaković Ilić, M. O nekim supstrukturnim logikama, doktorska teza, Univerzitet u Beogradu, 2008.

[12] Ivetić, J. Formalni računi za intuicionističku logiku, Magistarski rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2007.

[13] Janičić, P. Matematička logika u računarstvu Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[14] Lafont, Y. Linear logic pages. 1999.

[15] Madarász, R. Matematička logika, Univerzitet u Novom Sadu, 2012.

[16] Paoli, F. Substructural logics: a primer, Springer Science & Business Media, 2013.

[17] Pfenning, F. Linear logic, Carnegie Mellon University, 2002.

[18] Power, J., Webster, C. Working with linear logic in Coq, National University of Ireland Maynooth, 1999.

[19] Restall, G. A useful substructural logic. Journal of Logic Journal of the IGPL, 2, pages 137-148, Oxford University Press, 1994.

[20] Restall, G. An introduction to substructural logics, Routledge, 2002.

[21] Schack-Nielsen, A. Implementing Substructural Logical Frameworks. PhD thesis, IT University of Copenhagen, 2011.

[22] Troelstra, A. S. Lectures on linear logic, 1991.

[23] von Plato, Jan Saved from the Cellar: Gerhard Gentzen's Shorthand Notes on Logic and Foundations of Mathematics, Springer, 2017.

[24] Wadler, P. A taste of linear logic. Journal of Mathematical Foundations of Computer Science 1993, pages 185–210, Springer, 1993.

[25] Walker, D. Substructural type systems. Journal of Advanced Topics in Types and Programming Languages, pages 3 - 44, The MIT Press, 2005.

Biografija

Aleksandar Kršić je rođen 04.11.1992. godine u Doboju, Bosna i Hercegovina. Odrastao je u Doboju, Republika Srpska - BiH, gdje je 2007. godine završio osnovnu školu ,,Sveti Sava" sa prosjkom 5,00 i dobitnik je Vukove diplome. Zatim je upisao opšti smjer Gimnazije ,,Jovan Dučić" u Doboju. Istu je završio 2011. godine, takođe kao vukovac, nakon čega je upisao osnovne akademske studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smjer Diplomirani profesor matematike. Studije je završio zaključno sa junskim rokom 2015. godine sa prosječnom ocjenom 8.65. Master studije upisao je iste godine na Fakultetu tehnički nauka u Novom Sadu, smjer Master matematika u tehnici.

Novi Sad, jul 2017. Aleksandar Kršić