UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U NOVOM SADU

Simona Kašterović

KRIPKEOVE SEMANTIKE ZA INTUICIONISTIČKU LOGIKU I LAMBDA RAČUN

MASTER RAD

Novi Sad, 2017.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:		
Идентификациони број, **ИБР**:		
Тип документације, **ТД**:	Монографски рад	
Тип записа, **ТЗ**:	Штампа	
Врста рада, **ВР**:	Мастер рад	
Аутор, **АУ**:	Симона Каштеровић	
Ментор, **МН**:	др Силвиа Гилезан	
Наслов рада, **НР**:	Крипкеове семантике за интуиционистичку логику и ламбда рачун	
Језик публикације, **ЈП**:	Српски	
Језик извода, **ЈИ**:	Српски/Енглески	
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија	
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина	
Година, **ГО**:	2017.	
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт	
Место и адреса, **МА**:	Факултет Техничких Наука (ФТН), Д. Обрадовића 6, 21000 Нови Сад	
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5/63/23/0/5/0/0	
Научна област, **НО**:	Математика	
Научна дисциплина, **НД**:	Примењена математика	
Предметна одредница/Кqучне речи, **ПО**:	Крипкеове семантике, интуиционистичка логика, ламбда рачун	
УДК		
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека ФТН, Д. Обрадовића 6, 21000 Нови Сад	
Важна напомена, **ВН**:		
Извод, **ИЗ**:	Крикеове семантике су првобитно настале као семантике за модалну логику, а касније су прилагођене интуиционистичкој логици и другим некласичним системима. У системима интуиционистичке логике не важи закон искључења трећег и закон двоструке негације, који представљају основна правила закључивања у класичној логици. У раду смо дефинисали синтаксу, систем природне дедукције и Крипкеове семантике за разне системе интуиционистичке логике. У последњем поглављу представили смо Крипкеове моделе за ламбда рачун са типовима.	
Датум прихватања теме, **ДП**:		
Датум одбране, **ДО**:	04.07.2017.	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	др Јелена Иветић	
Члан:	др Душан Гајић	Потпис ментора
Члан, ментор:	др Силвиа Гилезан	

UNIVERSITY OF NOVI SAD • **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic type
Type of record, **TR**:	Printed text
Contents code, **CC**:	Master thesis
Author, **AU**:	Simona Kašterović
Mentor, **MN**:	Silvia Gilezan, PhD
Title, **TI**:	Kripke semantics for intuitionistic logic and lambda calculus
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian/English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2017.
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Faculty of Technical Sciences, D. Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5/63/23/0/5/0/0
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Applied mathematics
Subject/Key words, **S/KW**:	Kripke semantics, intuitionistic logic, lambda calculus
UC	
Holding data, **HD**:	Library of the Faculty of Technical Sciences, D. Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	Kripke semantics were first conceived for modal logics, and later adapted to intuitionistic logic and other non-classical systems. Systems of intuitionistic logic do not include the law of the excluded middle and double negation elimination, which are fundamental inference rules in classical logic. In this master thesis, we will define the syntax, natural deduction system and Kripke semantics for various systems of intuitionistic logic. In the last chapter, we define Kripke models for typed lambda calculus.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	04. July 2017.
Defended Board, **DB**: President:	Jelena Ivetić, PhD
Member:	Dušan Gajić, PhD
Member, Mentor:	Silvia Ghilezan, PhD

Menthor's sign

	УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА** 21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6	Број:
	ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД	Датум:

(Податке уноси предметни наставник - ментор)

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ:	Математика у техници
РУКОВОДИЛАЦ СТУДИЈСКОГ ПРОГРАМА:	др Маја Недовић

Студент:	Симона Каштеровић	Број индекса:	V1 7/2015
Област:	примењена математика		
Ментор:	Проф. др Силвиа Гилезан		

НА ОСНОВУ ПОДНЕТЕ ПРИЈАВЕ, ПРИЛОЖЕНЕ ДОКУМЕНТАЦИЈЕ И ОДРЕДБИ СТАТУТА ФАКУЛТЕТА ИЗДАЈЕ СЕ ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД, СА СЛЕДЕЋИМ ЕЛЕМЕНТИМА:

- проблем – тема рада;
- начин решавања проблема и начин практичне провере резултата рада, ако је таква провера неопходна;

НАСЛОВ МАСТЕР РАДА:

Крипкеове семантике за интуиционистичку логику и ламбда рачун

ТЕКСТ ЗАДАТКА:

Задатак мастер рада је дати преглед Крипкеових семантика за интуиционистичку логику (исказну, предикатску и модалну) и за ламбда рачун. Потребно је дефинисати основне појмове интуиционистичке логике, тј. дефинисати синтаксу и систем природне дедукције за исказну, предикатску и модалну логику, а затим дефинисати и детаљно описати Крипкеове моделе за наведене системе интуиционистичке логике. Студент треба и да дефинише основне појмове ламбда рачуна, те да представи Крипкеове семантике за ламбда рачун са типовима.

Руководилац студијског програма:	Ментор рада:

Примерак за: О - Студента; О - Ментора

Predgovor

Kripkeove semantike, takođe poznate kao i relacione semantike, glavna su tema ovog rada. Razvile su se 1960-ih godina kada je Kripke ove semantike uveo za modalnu (klasičnu) logiku. Vremenom su prilagođene i za sisteme neklasičnih logika kao npr. za intuicionističku logiku i razne druge logičke sisteme. Bitno je napomenuti da su Kripkeove semantike dovele do velikog pomaka u teoriji neklasičnih logika, jer teorija modela za takve logike skoro da nije postojala. S obzirom da su Kripkeove semantike definisane i za druge sisteme neklasičnih logika one su takođe vrijedne pomena, ali zbog obima ovog rada, nije ih moguće sve detaljno razmatrati, tako da smo se u ovom radu odlučili da detaljno izložimo Kripkeove semantike za intuicionističku logiku (iskaznu, predikatsku i modalnu).

Kao što i sam naslov rada kaže, pored Kripkeovih semantika za intucionističku logiku, razmatraćemo ovu vrstu semantika i za lambda račun. Alonzo Church je 1930-ih godina definisao lambda račun, nakon čega počinje veliki razvoj lambda računa i njegovih primjena. Prvobitni lambda račun [2] poznat je i kao lambda račun bez tipova (eng. untyped lambda calculus), ali veliku pažnju, zbog svoje veze sa logikom i programskim jezicima, privukao je lambda račun sa tipovima. U današnje vrijeme programski jezici su sveprisutni, a samim tim i lambda račun koji predstavlja matematički model funkcionalnih programskih jezika, ima veliku primjenu. Bitna osobina lambda računa sa tipovima jeste veza sa intuicionističkom logikom. Zaista, prema Curry-Howard-ovoj korespondenciji sistem prirodne dedukcije za intuicionističku logiku, koji ćemo vidjeti u Glavi 1, i lambda račun sa tipovima, koji je uveden u Glavi 3, su uzajamno odgovarajući sistemi, što je važan rezultat. Kripkeovi modeli za lambda račun sa osnovnim tipskim sistemom definisani su u [19] i pokazana je njihova potpunost, što je i jedan od glavnih ciljeva ovog rada, a ovaj rezultat izložen je u Potpoglavlju 3.2.1.

U ovom radu predstavili smo Kripkeove semantike za intuicionističku logiku i lambda račun sa tipovima. Predstavili smo osnovne pojmove i rezultate vezane za intuicionističku logiku, kao i Kripkeove semantike za intuicionističku iskaznu, predikatsku i modalnu logiku, redom. Kripkeove semantike za lambda račun predstavljaju jednu koherentnu cjelinu sa prethodnom teorijom i kao takve navedene su na samom kraju ovog rada. Ovaj master rad se sastoji od tri glave.

Prvi dio ovog rada je Uvod. U Uvodu smo dali istorijski pregled razvoja intuicionističke logike, lambda računa ali i logike uopšte. Objasnili smo ključne korake u različitim pristupima logici, tako da smo dali kratak osvrt na razvoj logike od stare Grčke i Aristotela, pa preko Boole-a, Frege-a i Hilbert-a, do Brouwer-a i ranog razvoja intuicionističke logike. Kako bi se formalizovali razni intuicionistički računi, bilo je potrebno pronaći formalnu semantiku koja dobro opisuje te račune. Najpopularnije semantike su Kripkeove semantike, a s obzirom da su i tema ovog rada, nadalje smo dali istorijski razvoj Kripkeovih semantika ali i lambda računa.

U Glavi 1 smo dali osnovne pojmove intuicionističke logike. Glava 1 je podijeljena na tri poglavlja. U prvom poglavlju je definisana sintaksa i predstavljen sistem prirodne dedukcije za intuicionističku iskaznu logiku. Zatim smo u drugom i trećem poglavlju dali definiciju sintakse i predstavili sistem prirodne dedukcije za predikatsku i modalnu logiku.

Glava 2 je posvećena Kripkeovim modelima za navedene sisteme intuicionističke logike. I ova glava je podijeljena na 3 poglavlja, pri čemu su u prvom i drugom poglavlju detaljno definisani Kripkeovi modeli za iskaznu i predikatsku logiku, dok je u trećem poglavlju samo ukratko data ideja Kripkeovih modela za modalnu logiku. U prvom i drugom poglavlju predstavljene su definicije Kripkeovih modela za odgovarajuće sisteme intuicionističke logike i dokazana je osobina monotonosti. Primjeri dati u ovom dijelu pokazuju da za određene tautologije (valjane) formule iz klasične logike postoji model u intuicionističkoj logici u kome one ne važe. Za Kripkeove modele u iskaznoj i predikatskoj logici, formulisana je i dokazana teorema potpunosti. Prije formulisanja date teoreme uvedeni su novi pojmovi kao što su B-maksimalan skup (za iskaznu logiku), C zasićen skup (za predikatsku logiku) i kanonički modeli i pokazane su neke njihove karakteristične osobine, koje su kasnije upotrijebljene prilikom dokazivanja teoreme potpunosti.

Glava 3, koja govori o Kripkeovim semantikama za lambda račun je podijeljena na dva poglavlja. U prvom poglavlju su definisani osnovni pojmovi lambda računa. Data je definicija lambda izraza, slobodnih i vezanih promjenljivih u izrazu i definicija zamjene (supstitucije) promjenljivih u izrazu. Zatim je uveden osnovni tipski sistem, pri čemu smo definisali skup tipova i predstavili pravila izvođenja pomoću kojih se grade dobro tipizirani izrazi. Kripkeovi modeli za lambda račun sa tipovima definisani su u drugom poglavlju. Uveli smo pojmove pomoću kojih definišemo navedeni model, a to su: Kripkeova aplikativna struktura, kombinatori i pojam ekstenzionalnosti. Predstavljen je i sistem aksioma i pravila izvođenja, koji definišu jednačine u λ-računu između izraza istog tipa. Da bismo izrazima dodijeli značenje, najprije smo morali definisati okolinu η za aplikativnu strukturu, a zatim smo indukcijom po strukturi izraza definisali značenje izraza oblika $\Gamma \triangleright M : \sigma$. Na samom kraju navedene su teoreme, koje definišu jaku potpunost Kripkeovih modela za lambda račun sa tipovima zajedno sa njihovim detaljno ispisanim dokazima.

U Zaključku ćemo dati pregled rada.

* * *

Posebno želim da zahvalim mojim roditeljima, Đorđi i Jovanki, sestrama Đurđini i Saški, kao i djedu Cvijetinu i babi Simuni za ljubav, podršku i pomoć koju su mi pružali tokom godina studija. Takođe, zahvaljujem i mojim prijateljima, koji su studentske dane ispunili dragim uspomenama.

Veliku zahvalnost dugujem i svojoj mentorki, prof. dr Silviji Ghilezan kako na razumijevanju i pomoći tokom izrade master rada, tako i na prenesenom znanju, iskustvu i pruženoj prilici da zajedno sarađujemo.

Sadržaj

Uvod

Razvoj logike je počeo još u doba Antičke Grčke i Aristotela[1], gdje je ona posmatrana kao dio filozofije. Prvi pomak u logici kao nauci možemo naći u djelima Decartes-a i Leibniz-a. Decartes[2] je smatrao da se matematički način razmišljanja mora primjenjivati i u ostalim naukama, pri čemu se treba oslanjati samo na sopstveni razum i moć zaključivanja. Leibniz[3] je imao ambicioznije ideju, želio je da stvori univerzalni jezik, pomoću koga bi se mogle opisati sve istine. Logika kao matematička disciplina počela je svoj razvoj u XIX vijeku. Zvaničan razvoj logike kao nauke počeo je u radovima Boole-a[4], koji je u svojim djelima ,,The Mathematical Analysis of Logic" 1847. godine i ,,The Laws of Thought " 1854. godine, potpuno precizno razvio formalni račun pod nazivom Bulova algebra.

Frege[5] se smatra začetnikom moderne logike i formalnih jezika, jer je 1879. godine u svom djelu ,,Begriffsschrift - Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens", po uzoru na Leibniz-ovu ideju univerzalnog jezika, formulisao jezik prvog reda (predikatskog računa). On je precizno formulisao formalni jezik i svojstva kvantifikatora, određen broj aksiomatskih shema i pravila izvođenja (kao što je modus ponens), pojmove izvođenja i dokazivanja.

Nakon Frege-a, aksiomatizacijom matematike se bavio i Hilbert[6]. Hilbert je razvio formalni logički sistem dokazivanja pod nazivom ,,Hilbertov aksiomatski sistem". Međutim, dokazi zasnovani na Hilbertovom aksiomatksom sistemu su uglavnom bili komplikovani, te se javila potreba za razvojem prirodnijeg i jednostavnijeg sistema za formalizaciju logike, tako su nastali Gentzen-ovi[7] sistemi: sistem prirodne dedukcije i sekventni račun.

Dok klasični matematičari smatraju da je cilj matematike otkrivanje već postojećih istina, intuicionisti akcenat stavljaju na *dokaz*, a ne na *istinu*. Osnovna paradigma intuicionizma je da se istinitim smatra samo ono što može biti dokazano. U intuicionističkoj logici, za razliku od klasične logike, gdje se izraz $A \wedge B$ tumači kao ,,A je tačno i B je tačno", navedeni izraz ima značenje ,,postoji dokaz za A i

[1] Aristotle, 384. p. n. e. - 322. p. n. e.
[2] R. Descartes, 1596.-1650.
[3] G. W. Leibniz, 1646.-1716.
[4] G. Boole, 1815.-1864.
[5] G. Frege, 1848.- 1925.
[6] D. Hilbert, 1862.-1943.
[7] G. Gentzen, 1909.-1945.

postoji dokaz za B", dokaz za $A \wedge B$ se sastoji od dokaza za A i dokaza za B.

Rani pokušaji da se razvije zadovoljavajuća matematička teorija za intuicionizam su bili odbačeni, većinom iz razloga što su rani intuicionisti bili strogi anti-formalisti i odbijali su da prihvate da se matematička aktivnost može uprostiti mehaničkim skupom pravila. Filozofima matematike problem je predstavljao nedefinisan pojam *konstrukcije*, odnosno *algoritma*, koji bi transformisao jednu vrstu dokaza u drugu.

U tom pogledu, spisi ranih intuicionista, posebno Brouwer-a[8], bili su izuzetno nerazumljivi, činilo se da su više namijenjeni da učine nerazumljivim, nego da razjasne. Iako su vremenom intuicionisti prihvatili da su sve lambda-izračunljive funkcije i konstruktivne, nisu priznali da su to jedini valjani dokazi transformacija. Njihov stav je bio: *,,Znam konstrukciju, kada je vidim"*. Svaka formula dokaziva u ovom sistemu je intuicionistički valjana, ali su intuicionisti sačuvali mogućnost da postoji formula, koja nije dokaziva u ovom sistemu, ali je ipak intuicionistički valjana. Kako je vrijeme prolazilo i nisu pronalazili takvu formulu, ova ideja se činila sve manje mogućom.

U pokušaju da se intuicionisti vežu za određen logički sistem, predlagane su brojne formalne semantike za razne intuicionističke račune, koje bi takođe formalizovale intuicionistička objašnjenja njihove filozofije. Ovo je dovelo do saznanja da različiti intuicionisti na različite načine dolaze do zaključka i shvataju intuicionizam. Činjenica da različiti načini razmišljanja vode do iste teorije je jak argument za prirodnost i značaj te teorije (intuicionizma).

Najpopularnije semantike su Kripkeove semantike, koje ćemo predstaviti u ovom radu i koje se često opisuju kao ,,temporalno epistemičke", što govori da pokušavaju da objasne intuicionizam u odnosu na to kako matematičari stiču matematička znanja tokom vremena.

Heyting[9] je 1930-ih godina razvio intuicionističku logiku, logiku koja je objašnjavala osnovne principe intuicionističkog zaključivanja. U intuicionističkoj logici ne važi zakon isključenja trećeg, $A \vee \neg A$, što predstavlja osnovnu razliku u odnosu na klasičnu logiku. Intuicionistička logika je naišla na veliki uspjeh, između ostalog zbog duboke povezanosti sa teorijom računarstva.

Saul Kripke[10] je dao značajan doprinos logici, posebno modalnoj logici, jer je kao devetnaestogodišnji student Harvard Univerziteta uveo semantiku modalne (klasične) logike, koja je danas poznata pod nazivom ,,Kripkeova semantika", pogledati [13, 14][11]. Često je nazivana i semantika mogućih svjetova. Ovo otkriće je bilo od velikog značaja i u teoriji neklasičnih logika.

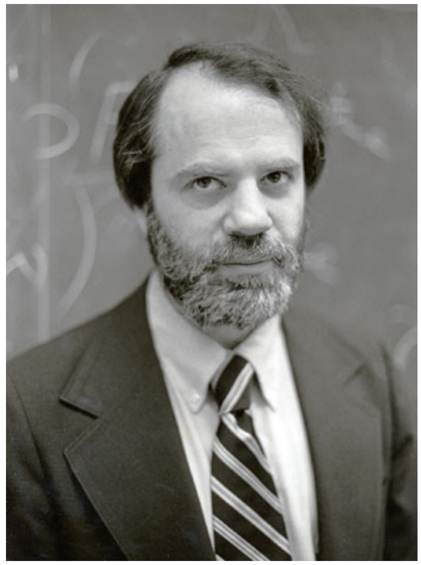
Iako su prvobitno nastale kao semantike za modalnu (klasičnu) logiku, vremenom su prilagođene i za sisteme neklasičnih logika kao npr. za intuicionističku logiku, pogledati [15]. Kripkeove semantike predstavljaju sasvim dobro osnovne intuicioni-

[8]L. E. J. Brouwer, 1981.-1966.

[9]A. Heyting, 1898.-1980.

[10]S. A. Kripke, 1940-

[11]Više o biogafiji Saula Kripkea kao i Slika 1 mogu se naći na `https://www.britannica.com/biography/Saul-Kripke`.



Slika 1: Saul Kripke

stičke ideje, ali sa klasične tačke gledišta (klasične meta-matematike), jer teorema potpunosti za semantike zahtijeva klasično rezonovanje. Bilo je i pokušaja da se stvori verzija Kripkeove teorije modela u kojoj se koriste samo metodi prihvatljivi intuicionističkim matematičarima, ali je bilo i nekoliko drugih uspješnih klasičnih pokušaja u kreiranju intuicionističkih modela, kao što su Beth-ovi[12] modeli, topološki modeli i algebarski modeli.

Početkom XX vijeka zbog potrebe matematičara za formalizacijom matematike, dolazi do razvoja formalnih računa. Matematičari su težili da konstruišu formalni sistem, koji bi se sastojao od konačnog broja aksioma i pravila izvođenja, a pomoću kojeg bi se mogla izgraditi cijela matematika. Ovim problemom su se matematičari bavili sve do Gödel-ove teoreme, kojom je dokazano da je ovakva formalizacija matematike nemoguća. Iako se nije mogla formalizovati cijela matematika, stvorena je ideja formalizacije njenih pojedinih dijelova.

Tada nastaje kombinatorni račun Šchönfinkel-a[13] i Curry-ja[14], a zatim 1930-ih godina Alonzo Church[15] objavljuje formalizam λ-računa. λ-račun je formalni sistem matematičke logike. Ovaj formalni sistem se može nazvati najmanjim univerzalnim jezikom, univerzalan je u smislu da se svaka izračunljiva funkcija može predstaviti u λ-računu. λ-račun predstavlja osnovu funkcionalnog programiranja.

Od prve četvrtine dvadesetog vijeka razvoj matematičke logike isprepletan je sa razvojem računarstva, prije svega sa razvojem teorijskog računarstva. Jedna od bit-

[12]E. W. Beth, 1908.-1964.
[13]M. I. Schönfinkel, 1889.-1942.
[14]H. B. Curry, 1900.-1982.
[15]A. Church, 1903.- 1995.

nijih uloga formalnih sistema jeste njihov uticaj na razvoj računarstva i programskih jezika.

Značaj Kripkeovih semantika se ogleda u širokom dijapazonu upotrebe od formalnih sistema matematičke logike (intuicionistička logika, modalna logika) do formalnih sistema programskh jezika (λ-račun). Zbog navedenog značaja tema ovog rada su upravo Kripkeove semantike za intuicionističku logiku i lambda račun.

Glava 1

Osnovni pojmovi intuicionističke logike

Klasični matematičari smatraju da je cilj matematike otkrivanje već postojećih istina. Sa druge strane, intuicionisti akcenat stavljaju na *dokaz*, a ne na *istinu*. Osnovna osobina intuicionizma je da se istinitim smatra samo ono što može biti dokazano. U intuicionističkoj logici, za razliku od klasične logike, gdje se izraz $A \wedge B$ tumači kao ,,A je tačno i B je tačno", navedeni izraz ima značenje ,,postoji dokaz za A i postoji dokaz za B", dokaz za $A \wedge B$ se sastoji od dokaza za A i dokaza za B. Slično, iskaz $A \vee B$ tumačimo kao ,,postoji dokaz za A ili dokaz za B", što nas dovodi do toga da u intuicionističkoj logici ne važi klasični zakon isključenja trećeg $A \vee \neg A$, kao ni zakon dvostruke negacije $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ i Pirsov zakon $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow A$. Intuicionisti ne prihvataju zakon isključenja trećeg, jer bi se dokaz za $A \vee \neg A$ morao sastojati ili iz dokaza za A ili iz dokaza za $\neg A$, a nijedan od argumenata nije naveden.

Zbog navedenih osobina, intuicionisti prihvataju samo konstruktivne dokaze, smatraju da je matematički tačno samo ono što možemo konstruisati, te odbacuju sve dokaze, koji se zasnivaju na svođenju na kontradikciju.

Svaka logika ima tri aspekta: sintaksu, deduktivni sistem i semantiku. Poznato je da deduktivni sistem može biti aksiomatski (Hilbertov), prirodno dedukcijski ili sekventni. Najpogodniji deduktivni sistem za intuicionističku logiku jeste sistem prirodne dedukcije.

U ovoj glavi dat je pregled iskazne, predikatske i modalne intuicionističke logike, tj. njihove sintakse i sistema prirodne dedukcije, dok o semantici govori naredna glava.

1.1 Iskazna logika

U ovom potpoglavlju data je sintaksa (1.1.1) i sistem prirodne dedukcije (1.1.2) za intuicionističku iskaznu logiku.

1.1.1 Sintaksa

Kada se govori o sintaksnom aspektu iskazne logike misli se na njen jezik, gdje se formule posmatraju samo kao niz simbola, ne uzimajući u obzir bilo kakvo njihovo značenje.

Sintaksa iskazne logike preuzeta je iz [11].

1.1.1. Definicija *Neka je alfabet $\sum$ unija sljedeća četiri skupa:*

1. *prebrojivog skupa iskaznih slova $P = \{p_1, p_2, p_3 \ldots q_1, q_2, q_3, \ldots\}$;*
2. *skupa logičkh veznika $\{\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow\}$, gdje je $\neg$ unarni veznik, a ostali su binarni veznici;*
3. *skupa logičkih konstanti $\{\top,\ \bot\}$;*
4. *skupa pomoćnih simbola $\{(,)\}$.*

Alfabet predstavlja neprazan skup simbola, dok je riječ nad datim alfabetom svaki konačan niz simbola iz tog alfabeta.

1.1.2. Definicija *Skup iskaznih formula (jezik iskazne logike) nad skupom P je najmanji podskup skupa svih riječi nad $\sum$ takav da važi:*

1. *iskazna slova (elementi skupa P) i logičke konstante su iskazne formule, nazivaju se i atomičkim iskaznim formulama;*
2. *ako su A i B iskazne formule, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ i $(A \Leftrightarrow B)$ iskazne formule.*

Iskazna slova nazivaju se još i iskazne promjenljive i označavaju se malim latiničnim slovima $p, q, r, s \ldots$, iskazne formule označavaju se velikim latiničnim slovima $A, B, C, \ldots$. Zbog preglednosti, spoljne zagrade izostavljaju se na osnovu konvencije, zasnovane na prioritetu veznika, pri čemu veznici poređani po prioritetu (od većeg ka manjem) čine sljedeći niz: $\neg\ \wedge\ \vee\ \Rightarrow \Leftrightarrow$.

U intuicionističkoj iskaznoj logici kao primitivni simboli mogu biti uzeti: konstanta $\bot$, konjunkcija $\wedge$, disjunkcija $\vee$ i implikacija $\Rightarrow$. Nijedan od navedenih logičkih veznika u intuicionističkoj logici nije moguće definisati preko ostalih. Pomoću ovih primitivnih veznika definišu se: negacija $\neg A \stackrel{\text{def}}{=} A \Rightarrow \bot$, ekvivalencija $A \Leftrightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ i logička konstanta „tačno" $\top \stackrel{\text{def}}{=} \bot \Rightarrow \bot$. Definicija jezika intuicionističke iskazne logike u Bachus-Naurovom obliku (**BNF**) data je sa:

$$A, B := p \mid \bot \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \Rightarrow B.$$

1.1.3. Definicija *Pojam potformule definiše se na sljedeći način:*

- *Svaka iskazna formula A je potformula same sebe;*

- *Ako je A oblika $\neg B$, onda je svaka potformula formule B istovremeno i potformula formule A. Ako je A oblika $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$, onda je svaka potformula od B i svaka potformula od C istovremeno i potformula od A.*

Stepenom iskazne formule naziva se broj pojavljivanja logičkih veznika u formuli.

1.1.2 Sistem prirodne dedukcije

Dok je teorija modela vezana za semantiku, deduktivni sistemi i teorija dokaza je vezana za sintaksu. Deduktivni sistemi za iskaznu logiku primjenjuju se kroz kombinovanje simbola, ne ulazeći u semantiku formula.

Prvi sistem za formalizaciju logike predložio je David Hilbert. Aksiomatski ili Hilbertov sistem za intuicionističku logiku sastoji se od tri aksiome i pravila izvođenja *modus ponens* (MP). Međutim, dokazi zasnovani na Hilbertovom aksiomatskom sistemu su uglavnom komplikovani čak i za najjednostavnije teoreme, te se javila potreba za pronalaženjem prirodnijeg i jednostavnijeg sistema za formalizaciju logike. Sistem prirodne dedukcije uveo je Gerhard Gentzen 1935. godine, sa namjerom da prirodnije opiše uobičajeno zaključivanje matematičara.

Prije predstavljanja sistema prirodne dedukcije, upoznajmo se sa definicijom formalne teorije.

Sljedeća definicija preuzeta je iz [11].

1.1.4. Definicija *Formalnu teoriju $\mathcal{T}$ čine:*

- *prebrojiv skup $\sum$ simbola, koji predstavlja alfabet teorije;*
- *podskup skupa svih riječi nad alfabetom $\sum$, čiji se elementi nazivaju formulama (dobro zasnovanim formulama) teorije $\mathcal{T}$;*
- *podskup skupa svih formula teorije $\mathcal{T}$ koji predstavlja skup aksioma teorije $\mathcal{T}$; ako je skup aksioma rekurzivan, tj. ako se za svaku formulu može efektivno provjeriti da li pripada tom skupu, onda se teorija $\mathcal{T}$ naziva aksiomatskom teorijom;*
- *konačan skup $R_1,\ R_2, \ldots, R_n$ relacija (ili shema relacija) između formula, koje se nazivaju pravilima izvođenja. Za svako pravilo izvođenja R_i arnosti $k+1$, i svaki skup od $k+1$ formula $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k, \Psi)$ može se efektivno utvrditi da li je prvih k formula u relaciji R_i sa $(k+1)$-om formulom; ako jeste formula Ψ se naziva direktnom posljedicom datog skupa k formula na osnovu pravila R_i, što se zapisuje na sledeći način:*

$$\frac{\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \ldots \quad \Phi_k}{\Psi} \ R_i.$$

1.1.5. Definicija

Dokaz je niz formula (ili skup formula pridruženih stablu) $\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots, \Phi_n$*, takav da za svako* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *važi ili da je* Φ_i *aksioma teorije* $\mathcal{T}$ *ili važi da je direktna posljedica nekih od prethodnih formula u nizu na osnovu nekog pravila izvođenja.*

Dobro zasnovana formula Ψ teorije $\mathcal{T}$ je *teorema* teorije $\mathcal{T}$ ako postoji dokaz, čiji je poslednji član formula Ψ. Taj dokaz naziva se dokazom formule Ψ i za formulu Ψ kaže se da je *dokaziva* u teoriji $\mathcal{T}$. Teorija $\mathcal{T}$ je *odlučiva*, ako postoji efektivna procedura da se za proizvoljnu formulu utvrdi da li je dokaziva u teoriji $\mathcal{T}$, u suprotnom teorija je *neodlučiva*.

Formula Ψ teorije $\mathcal{T}$ je deduktivna posljedica skupa formula Γ ako postoji dokaz formule Ψ, koji pored aksioma može da uključuje i formule iz skupa Γ. Elementi skupa Γ se tada nazivaju hipotezama ili premisama dokaza. Ukoliko je Ψ posljedica skupa Γ to se zapisuje na sljedeći način $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ (simbol $\vdash$ čitamo ,,rampa"). Ako je $\Gamma = \{\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ tada pišemo $\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash \Psi$. Ako je Γ prazan skup, umjesto $\emptyset \vdash \Psi$ pišemo $\vdash \Psi$ i to važi ako i samo ako je Ψ teorema teorije $\mathcal{T}$.

Sistem prirodne dedukcije za intuicionističku iskaznu logiku može se naći u [11, 18, 22].

Sistem prirodne dedukcije za iskaznu logiku sastoji se od jedne aksiome i niza pravila izvođenja.

Aksioma:

$$A \vdash A$$

Pravila izvođenja:

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\,(\Rightarrow E) \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow I)$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E)$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,(\vee E) \qquad \frac{A}{A \vee B}\,(\vee I) \qquad \frac{B}{A \vee B}\,(\vee I)$$

$$\frac{\perp}{A}\,(\perp)$$

Dokazi u sistemu prirodne dedukcije predstavljaju se najčešće u obliku stabla izvođenja, u čijim listovima se nalaze *premise* ili *hipoteze*, a u korijenu izvedena formula. Prilikom izvođenja dokaza u sistemu prirodne dedukcije, mogu se koristiti neke nedokazane pretpostavke, tokom izvođenja one mogu biti eliminisane i označavaju se tako što se stavljaju u uglaste zagrade. Zapis $[A]^u$ znači da je pretpostavka A eliminisana u koraku u, gdje je u prirodan broj. Ako za formulu A postoji dokaz u čijem je korijenu formula A i koji nema neoslobođenih pretpostavki, tada je A teorema i pišemo $\vdash A$. Ako u dokazu ipak ima neoslobođenih pretpostavki i sve pripadaju skupu Γ, tada pišemo $\Gamma \vdash A$ i kažemo da je A deduktivna posljedica skupa formula Γ.

Sljedeći primjer preuzet je iz [11].

1.1.6. Primjer Navodimo stablo izvođenja za formulu $A \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}\,(\vee I) \qquad \dfrac{[A]^1}{A \vee C}\,(\vee I)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,(\wedge I)}{A \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,1\ (\Rightarrow I)$$

Pravila izvođenja i aksioma zajedno sa ranije definisanim pojmovima formalne teorije u potpunosti opisuju sistem prirodne dedukcije za intuicionističku iskaznu logiku.

Naredna lema preuzeta je iz [8].

1.1.7. Lema *Za skupove formula Γ i Δ i formule A i B važi:*

$$\textit{Ako } \Gamma \vdash A \textit{ i } \Delta, A \vdash B \textit{ onda } \Gamma, \Delta \vdash B.$$

1.2 Predikatska logika

U ovom potpoglavlju data je sintaksa (1.2.1) i sistem prirodne dedukcije (1.2.2) za intuicionističku predikatsku logiku.

1.2.1 Sintaksa

Sintaksa predikatske logike preuzeta je iz [11], pri čemu su neke od oznaka preuzete iz [22].

1.2.1. Definicija *Logički dio jezika predikatske logike čine skupovi, čiji se elementi nazivaju logičkim simbolima i to su:*

1. *prebrojiv skup promjenljivih $V = \{x, y, z, \ldots\}$;*
2. *skup logičkih veznika $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, gdje je $\neg$ unarni veznik, a ostali su binarni;*

3. *skup kvantifikatora* $\{\forall, \exists\}$, *gdje se* $\forall$ *naziva univerzalni kvantifikator, a* $\exists$ *egzistencijalni kvantifikator;*

4. *skup logičkih konstanti* $\{\top, \bot\}$;

5. *skup pomoćnih simbola* $\{(,),,\}$.

Alfabet (signatura) $\mathcal{L}$ sastoji se od skupova: $\sum$, skup funkcijskih simbola i $\prod$, skup relacijskih (predikatskih) simbola, koji su najviše prebrojivi i od funkcije $ar : \sum \cup \prod \to \mathcal{N}_0$. Vrijednost $ar(f)$, za $f \in \sum \cup \prod$ naziva se stepen ili arnost simbola f. Navedeni skupovi predstavljaju nelogički dio jezika predikatske logike i njihovi elementi nazivaju se nelogičkim simbolima. Funkcijski simboli arnosti 0 nazivaju se još i konstantama.

Za alfabet $\mathcal{L} = (\sum, \prod, ar)$, riječ nad $\mathcal{L}$ je bilo koji niz simbola iz skupova $\sum$, $\prod$ ili logičkog dijela jezika.

U radu ćemo koristiti sljedeće oznake za simbole:

1. $f, g, h, \ldots$ za funkcijske simbole arnosti već od 0;

2. $P, Q, R, \ldots$ za relacijske simbole;

3. $x, y, z, \ldots$ za promjenljive.

1.2.2. Definicija *Skup termova nad alfabetom* $\mathcal{L}$ *i skupom promjenljivih* V *je najmanji skup za koji važi:*

1. *svaki simbol konstante je term;*

2. *svaki simbol promjenljive je term;*

3. *ako je* f *funkcijski simbol arnosti* k *i* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *termi, onda je i* $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *term.*

1.2.3. Definicija *Skup atomičkih formula nad signaturom* $\mathcal{L}$ *i skupom promjenljivih* V *je najmanji skup za koji važi:*

1. *logičke konstante* $\top$ *i* $\bot$ *su atomičke formule;*

2. *ako je* P *relacijski simbol arnosti* k *i* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *termovi, onda je* $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *atomička formula.*

Atomičke formule ćemo označavati sa $a, b, c, \ldots$.

1.2.4. Definicija *Skup dobro zasnovanih formula (jezik predikatske logike) nad alfabetom* $\mathcal{L}$ *i skupom promjenljivih* V *je najmanji skup za koji važi:*

1. *svaka atomička formula je dobro zasnovana formula;*

2. *ako je* ϕ *dobro zasnovana formula, onda je i* $\neg\phi$ *dobro zasnovana formula;*

3. *ako su ϕ i ψ dobro zasnovane formule. onda su i $(\phi \wedge \psi)$,$(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ i $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ dobro zasnovane formule;*

4. *ako je ϕ dobro zasnovana formula i x promjenljiva, onda su i $((\forall x)\phi)$ i $((\exists x)\phi)$ dobro zasnovane formule.*

Dobro zasnovane formule označavaćemo malim slovima grčkog alfabeta $\phi, \psi, \ldots$. Kao i kod iskaznih formula, usvaja se konvencija da se spoljne zagrade ne pišu, zasnovana na prioritetu veznika, pri čemu kvantifikatori imaju veći prioritet od svih logičkih veznika.

U intuicionističkoj predikatskoj logici kao primitivni simboli mogu biti uzeti: konstanta $\perp$, konjunkcija $\wedge$, disjunkcija $\vee$, implikacija $\Rightarrow$, univerzalni kvantifikator $\forall$ i egzistencijalni kvantifikator $\exists$. Kao i u iskaznoj logici nijedan od navedenih logičkih veznika u intuicionističkoj logici nije moguće definisati preko ostalih. Pomoću ovih primitivnih veznika negacija, ekvivalencija i logička konstanta $\top$ definišu se kao u iskaznoj logici. Definicija jezika intuicionističke predikatske logike u Bachus-Naurovom obliku (**BNF**) data je na sljedeći način:

$$\phi, \psi := a \mid \perp \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \Rightarrow \psi \mid (\forall x)\phi \mid (\exists x)\phi.$$

Promjenljive u formuli mogu se pojavljivati kao slobodne i kao vezane promjenljive, o tome govore sljedeće dvije definicije.

1.2.5. Definicija *Slobodno pojavljivanje i vezano pojavljivane promjenljive u formuli, definiše se na sljedeći način:*

- *svako pojavljivanje promjenljive u atomičkoj formuli je slobodno u toj formuli;*
- *svako pojavljivanje promjenljive koje je slobodno (vezano) u formuli ϕ je takođe slobodno (vezano) i u formuli $\neg\phi$;*
- *svako pojavljivanje koje je slobodno (vezano) u ϕ ili u ψ je slobodno (vezano) i u $(\phi \wedge \psi)$,$(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ i $(\phi \Leftrightarrow \psi)$;*
- *svako slobodno pojavljivanje promjenljive različite od x u formuli ϕ, je takođe slobodno i u formuli $(\forall x)\phi$, svako slobodno pojavljivanje promjenljve x u formuli ϕ je vezano u formuli $(\forall x)\phi$ i kažemo da je x pod dejstvom kvantifikatora $\forall$, svako pojavljivanje promjenljive x u $(\forall x)$ u formuli $(\forall x)\phi$ je vezano; analogno važi za egzistencijalni kvantifikator $\exists$.*

1.2.6. Definicija *Promjenljiva je slobodna (vezana) u formuli ako i samo ako ima slobodno (vezano) pojavljivanje u toj formuli.*

Ako su u formuli ϕ slobodne promjenljve $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onda se za tu formulu često koristi zapis $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Formula koja nema slobodnih promjenljivih naziva se još i zatvorena formula. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jedine slobodne promjenljive u formuli ϕ, onda je formula $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\phi$ njeno univerzalno zatvorenje, a $(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\phi$ njeno egzistencijalno zatvorenje.

Formula $\phi[t/x]$ je formula dobijena od formule ϕ, kada se sva slobodna pojavljivanja promjenljive x u formuli ϕ zamijene termom t.

1.2.2 Sistem prirodne dedukcije

Sistem prirodne dedukcije za intuicionističku predikatsku logiku može se naći u [11, 18, 22].

Sistem prirodne dedukcije za predikatsku logiku, je proširenje sistema prirodne dedukcije za iskaznu logiku. Pored aksiome i pravila izvođenja navedenih u sistemu prirodne dedukcije za iskaznu logiku, ovdje se dodaju još pravila za eliminaciju i uvođenje kvantifikatora.

$$\frac{\phi}{(\forall x)\phi}\,(\forall I) \qquad \frac{\phi[t/x]}{(\exists x)\phi}\,(\exists I)$$

$$\frac{(\forall x)\phi}{\phi[t/x]}\,(\forall E) \qquad \frac{(\exists x)\phi \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\,(\exists E)$$

U pravilu $\forall I$ promjenljiva x ne smije biti slobodna u formuli ϕ kao ni u jednoj pretpostavci prilikom izvođenja formule ϕ. U pravilu $\exists E$ promjenljiva x ne smije biti slobodna u formuli ψ niti u jednoj pretpostavci prilikom izvođenja formule ψ sem eventualno u formuli ϕ. Promjenljiva x u navedenim pravilima se naziva još i *eigenvariable* (karakteristična promjenljiva) pravila.

Sljedeći primjer preuzet je iz [11].

1.2.7. Primjer Pokazaćemo da važi $(\forall x)\phi,\ (\forall x)(\phi \Rightarrow \psi) \vdash (\forall x)\psi$.

Primjenom pravila izvođenja, konstruišemo stablo izvođenja:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\forall x)\phi}{\phi}\,(\forall E) \qquad \cfrac{(\forall x)(\phi \Rightarrow \psi)}{\phi \Rightarrow \psi}\,(\forall E)}{\psi}\,(\Rightarrow E)}{(\forall x)\psi}\,(\forall I)$$

1.3 Modalna logika

Za definisanje modalne logike koristili smo [7, 9, 20, 22].

Tačni iskazi mogu se podijeliti na one koji su uvijek istiniti, koji ne mogu biti pogrešni i na one koji mogu biti istiniti, isto tako netačni iskazi mogu se podijeliti na one koji su uvijek netačni, koji ne mogu biti istiniti i na one za koje se desi da su netačni. Ovakva klasifiacija iskaza dovodi do definisanja novih pojmova: nužnosti, nemogućnosti, kontigentnosti i mogućnosti.

Intuicionistička modalna logika je modalna logika u čijoj osnovi leži intuicionistička iskazna logika. Kao što je klasična modalna logika, klasična u smislu da je njen iskazni dio zapravo klasična iskazna logika, tako je u intuicionističkoj modalnoj logici njen iskazni dio zapravo intuiocionistička iskazna logika.

Kada se govori o intuicionističkoj modalnoj logici, pri čemu se misli na logiku bez kvantifikatora, odnosno iskaznu logiku proširenu modalnim operatorima očekuje se da sve što se može dokazati u intuicionističkoj iskaznoj logici, može dokazati i u intuicionističkoj modalnoj logici. Takođe, očekivano je da sadrži sve izvode teorema iz iskazne logike, odnosno da je formula dobijena zamjenom promjenljivih (formula) u teoremi iz iskazne logike, sa formulama modalne logike, teorema u modalnoj logici.

Kako se intuicionistička modalna logika zasniva na intuicionističkoj iskaznoj, koja dodavanjem *zakona isključenja trećeg* vodi u klasičnu logiku, očekujemo i da dodavanje *zakona isključenja trećeg* $A \vee \neg A$ u intuicionističku modalnu logiku vodi u klasičnu modalnu logiku.

Sljedeća opšta osobina intuicionističke logike je osobina disjunkcije, koja kaže : *Ako je $A \vee B$ teorema, onda je A teorema ili je B teorema*, ova osobina je poznata pod nazivom ,,svojstvo disjunkcije".

U modalnoj logici ćemo posmatrati različite sisteme, odnosno sisteme koji se razlikuju po skupu teorema, koje ih određuju. Međutim, neke osobine će biti prisutne u svim sistemima, te ćemo početi sa uvođenjem definicija osnovnih pojmova i njihovih osobina.

1.3.1 Sintaksa

Uvodimo dva unarna modalna veznika (operatora) $\Box$ i $\Diamond$. Veznik $\Box$ označava ,,nužno je da", dok veznik $\Diamond$ označava ,,moguće je da". U klasičnoj modalnoj logici navedeni veznici mogu se definisati jedan preko drugog, i više, od četiri nova pojma (nužnosti, nemogućnosti, kontigentnosti i mogućnosti) svaka tri mogu se izraziti preko četvrtog. Ipak, najbitnija veza je između nužnosti i mogućnosti.

Ako je p nužan iskaz, to je ekvivalentno tome da nije moguće da je p netačan iskaz, što možemo zapisati formulom

$$\Box p \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg p.$$

Ako je p moguć iskaz (moguće je da je tačan) to je ekvivalentno sa rečenicom ,,nije nužno tačno da je p netačno", što možemo zapisati formulom

$$\Diamond p \Leftrightarrow \neg\Box\neg p.$$

U intuicionističkoj logici ova dva veznika su nezavisna, ne važe navedene ekvivalencije i ne možemo jedan definisati pomoću drugog.

Formule u modalnoj logici se formiraju na isti način kao formule u iskaznoj logici, pri čemu dodajemo i dva pravila za navedene modalne veznike. Ako je A dobro zasnovana formula, onda su i $\Box A$ i $\Diamond A$ dobro zasnovane formule.

Jezik intuicionističke (iskazne) modalne logike možemo definisati Bachus-Naurovom formom na sljedeći način:

$$A, B := p \mid \bot \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \Rightarrow B \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Kada govorimo o klasičnoj logici, razlika između logičkih veznika i modalnih veznika je u tome što istinitost formule koja sadrži samo logičke veznike, može zaključiti na osnovu istinitosnih vrijednosti dodijeljenih iskaznim slovima, koja se pojavljuju u formuli, dok istinitosnu vrijednost iskaza $\Box p$ ne možemo zaključiti na osnovu istinitosne vrijednosti dodijeljene slovu (iskazu) p, zato kažemo da modalni operatori nisu istinitosne-funkcije. Zato je za definisanje značenja modalnih operatora, neophodno uvesti pojam mogućih svjetova, pa će iskaz $\Box p$ biti tačan ako je p tačno u svakom mogućem svijetu, dok će iskaz $\Diamond p$ biti tačan, ako postoji svijet u kome je p tačno. Pojam mogućih svjetova koristimo i u intuicionističkim modelima. Svaki model će biti uređena četvorka $\langle W, \leq R, V \rangle$, gdje je W skup svih mogućih svjetova, R binarna, refleksivna i tranzitivna relacija na W, relacija dostižnosti (vidljivosti) svjetova i V funkcija koja dodjeljuje istinistosne vrijednosti iskazima. Relaciju dostižnosti između svjetova w_1 i w_2 zapisujemo $w_1 R w_2$ i čitamo w_2 je dostižno (vidljivo) svijetu w_1. Sada je moguće definisati istinitosnu vrijednost iskaza $\Box p$ i $\Diamond p$.

1.3.1. Definicija $V_w(\Box p) = \top$ *ako i samo ako za svako* w' *takvo da je* wRw', *važi* $v_{w'}(p) = \top$.

1.3.2. Definicija $V_w(\Diamond p) = \top$ *ako i samo ako postoji* v *takvo da* wRv *i važi* $v_v(p) = \top$.

O modelima će biti riječi u narednoj glavi.

Kako modalni operatori nisu istinitosne funkcije, formula $\Box p \Leftrightarrow p$ neće biti valjana. Iako formula $\Box p \Leftrightarrow p$ neće biti valjana, ipak će jedan smjer implikacije važiti u svim sistemima modalne logike. Vrlo je lako intuitivno zaključiti da važi ,,šta god je nužno tačno, to je i tačno", što predstavlja formulu $\Box p \Rightarrow p$ poznatu pod nazivom **aksioma nužnosti**. Slično, možemo zaključiti da važi ,,ako je nešto tačno, onda je moguće da je to tačno", što se može zapisati formulom $p \Rightarrow \Diamond p$ i poznato je kao **aksioma mogućnosti**.

Sljedeća osobina, koja će biti prisutna u svim sistemima, je da iz nužne istine logički slijedi nužna istina, što predstavljamo formulom

$$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q).$$

Kao što smo rekli, u zavisnosti od toga koje teoreme sadrže, posmatramo različite sisteme modalne logike. Ako je neka formula teorema datog sistema, kažemo da ona pripada tom sistemu. Ako je svaka teorema sistema A ujedno i teorema sistema B, ali sistem B sadrži još neke teoreme reći ćemo da je A slabiji tj. da je B jači sistem. Ako je svaka teorema sistema A ujedno i teorema sistema B (bez obzira da li sistem B sadrži jos neke teoreme) kažemo da sistem B sadrži sistem A.

1.3.2 Sistem prirodne dedukcije

Sistem prirodne dedukcije za intuicionističku modalnu logiku može se naći u [22].

Cilj je da se obezbijedi sistem prirodne dedukcije za intuicionističku logiku, u kome će se iz pravila izvođenja moći zaključiti značenje modaliteta u mogućim svjetovima. Dakle, potrebno je uvesti pravilo za uvođenje i eliminaciju veznika $\Box$ i $\Diamond$, uzimajući u obzir interpretaciju mogućih svjetova. Osnovni pojam u modalnoj logici jeste *relativna istina*. Da bi se izgradio deduktivni sistem za intuicionističku modalnu logiku, za osnovu tog deduktivnog sistema uzimaju se tvrdnje koje dobijamo procjenom relativne istine. Ovdje je nemoguće u potpunosti rastaviti semantiku od sintakse. Ukoliko je cilj da sistem direktno pripisuje značenje modalitetima onda je potrebno konstruisati sistem sa istom idejom kao i semantiku, na taj način dobija se sistem sa osobinama, koje smo naveli kao poželjne u svakom sistemu modalne logike.

Osnovna procjena ovog sistema prirodne dedukcije je oblika $x : A$, gdje je x promjenljiva, koja intuitivno predstavlja svijet u modelu modalne logike. Datu tvrdnju čitamo ,,A važi u x".

Pravilo uvođenja veznika $\Box$ treba da izrazi da ako A važi u svakom svijetu y dostižnom iz x, onda $\Box A$ važi u x. Da bi se formulisalo pravilo potrebna je i tvrdnja xRy koja kaže da je svijet y dostižan svijetu x. Sada, pravilo za uvođenje veznika $\Box$ glasi:

$$\frac{\begin{array}{c}[xRy]\\ \vdots \\ y : A\end{array}}{x : \Box A},$$

gdje promjenljiva y predstavlja proizvoljan svijet dostižan svijetu x i ne pojavljuje se u drugim pretpostavkama sem u xRy, koja je oslobođena.

Na osnovu navedenog, pravilo za eliminaciju veznika $\Box$ glasi:

$$\frac{x : \Box A \quad xRy}{y : A}.$$

Pravilo za uvođenje veznika $\Diamond$ treba da izrazi da ako A važi u nekom svijetu y, koji je dostižan svijetu x, onda $\Diamond A$ važi u svijetu x, tako da pravilo glasi:

$$\frac{y : A \quad xRy}{x : \Diamond A}.$$

Pravilo za eliminaciju veznika $\Diamond$ je nešto komplikovanije. Pretpostavimo da možemo zaključiti da B važi u nekom svijetu z na osnovu pretpostavke da A važi u nekom svijetu y dostižnom iz x, tada zaista iz prepostavke da $\Diamond A$ važi u x možemo zaključiti da B važi u z i pravilo glasi:

$$\frac{x : \Diamond A \qquad \begin{matrix} [y : A]\ [xRy] \\ \vdots \\ z : B \end{matrix}}{z : B},$$

gdje promjenljiva y predstavlja proizvoljan svijet različit od x i z, i ne smije se pojaviti u drugim pretpostavkama sem u $y : A$ i xRy.

Sada ćemo predstaviti sistem prirodne dedukcije za intuicionističku modalnu logiku, predstavljajući pravila za uvođenje i eliminaciju svih logičkih i modalnih veznika, pri čemu su pravila za logičke veznike analogna pravilima u sistemu prirodne dedukcije za iskaznu logiku.

Osnovni sistem prirodne dedukcije za modalnu logiku

$$\frac{\bot}{x : A}\ (\bot E)$$

$$\frac{x : A \quad x : B}{x : A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{x : A \wedge B}{x : A}\ (\wedge E1) \qquad \frac{x : A \wedge B}{x : B}\ (\wedge E2)$$

$$\frac{x : A}{x : A \vee B}\ (\vee I1) \qquad \frac{x : B}{x : A \vee B}\ (\vee I2) \qquad \frac{x : A \vee B \quad \begin{matrix} [x : A] \\ \vdots \\ y : C \end{matrix} \quad \begin{matrix} [x : B] \\ \vdots \\ y : C \end{matrix}}{y : C}\ (\vee E)$$

$$\frac{\begin{matrix} [x : A] \\ \vdots \\ x : B \end{matrix}}{x : A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow I) \qquad \frac{x : A \quad x : A \Rightarrow B}{x : B}\ (\Rightarrow E)$$

$$\frac{\begin{matrix} [xRy] \\ \vdots \\ y : A \end{matrix}}{x : \Box A}\ (\Box I) \qquad \frac{x : \Box A \quad xRy}{y : A}\ (\Box E)$$

$$\frac{y : A \quad xRy}{x : \Diamond A}\ (\Diamond I) \qquad \frac{x : \Diamond A \qquad \begin{matrix} [y : A]\ [xRy] \\ \vdots \\ z : B \end{matrix}}{z : B}\ (\Diamond E)$$

U pravilu $\Box I$ promjenljiva y mora biti različita od x i ne smije se pojaviti u nekoj neoslobođenoj pretpostavci, sem u oslobođenim pojavljivanjima xRy.

U pravilu $\Diamond E$ promjenljiva y mora biti različita od x i z i ne smije se pojavljivati u slobodnim pretpostavkama od kojih zavisi $z : B$, sem u oslobođenim pojavljivanjima $y : A$ i xRy.

Prednost ovako konstruisanog sistema jeste što je relacija dostižnosti R proizvoljna relacija, tako da kada se uvede relacija dostižnosti sa nekim dodatnim osobinama u datom sistemu važiće još neka dodatna izvođenja, odnosno može se nadograditi sistem tako da zadovoljava osobine relacije.

U ovim pravilima promjenljiva y se naziva *eigenvariable* (karakteristična promjenljiva). Kao što je ranije navedeno, ovakav sistem prirodne dedukcije zadovoljava sve osobine, koje važe u svakom sistemu modalne logike, u sljedećem primjeru je pokazana jedna od njih.

1.3.3. Primjer Prikazujemo izvođenje formule $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box A \Rightarrow \Box B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:\Box(A\Rightarrow B)]^3 \quad [xRy]^1}{y:A\Rightarrow B}\,(\Box E) \qquad \dfrac{[x:\Box A]^2 \quad [xRy]^1}{y:A}\,(\Box E)}{y:B}\,(\Rightarrow E)}{x:\Box B}{}^1\,(\Box I)}{x:\Box A\Rightarrow\Box B}{}^2\,(\Rightarrow I)}{x:\Box(A\Rightarrow B)\Rightarrow\Box A\Rightarrow\Box B}{}^3\,(\Rightarrow I)$$

Naredni primjeri prikazuju izvođenja još nekih formula.

1.3.4. Primjer Navodimo izvođenje formule $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:\Diamond A]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:\Box(A\Rightarrow B)]^3 \quad [xRy]^1}{y:A\Rightarrow B} \quad [y:A]^1}{y:B} \quad [xRy]^1}{x:\Diamond B}}{x:\Diamond B}{}^1}{x:\Diamond A\Rightarrow\Diamond B}{}^2}{x:\Box(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\Diamond A\Rightarrow\Diamond B)}{}^3$$

1.3.5. Primjer Navodimo izvođenje formule $(\Diamond A \Rightarrow \Box B) \Rightarrow \Box(A \Rightarrow B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : \Diamond A \Rightarrow \Box B]^3 \quad \dfrac{[y : A]^1 \quad [xRy]^2}{x : \Diamond A}}{x : \Box B} \quad [xRy]^2}{y : B}}{y : A \Rightarrow B}\,{}^{1}}{x : \Box(A \Rightarrow B)}\,{}^{2}}{x : (\Diamond A \Rightarrow \Box B) \Rightarrow \Box(A \Rightarrow B)}\,{}^{3}$$

Osnovni sistem prirodne dedukcije, konstruisan je tako da važi za proizvoljnu relaciju dostižnosti, međutim ta relacija može da ima neke dodatne osobine kao što su simetričnost, tranzitivnost itd. U slučaju da relacija posjeduje neku dodatnu osobinu, sistem se nadograđuje dodavanjem odgovarajućeg pravila izvođenja, koje opisuje datu osobinu.

Ukoliko je relacija dostižnosti refleksivna, odnosno važi $(\forall x)xRx$, sistem prirodne dedukcije se nadograđuje dodavanjem pravila

$$\dfrac{\begin{array}{c}[xRx]\\ \vdots \\ y : A\end{array}}{y : A}.$$

Ako je relacija R simetrična, tj. ako važi $(\forall x)(\forall y)(xRy \Rightarrow yRx)$, tada se sistem nadograđuje dodavanjem pravila

$$\dfrac{xRy \quad \begin{array}{c}[yRx]\\ \vdots \\ z : A\end{array}}{z : A}.$$

U slučaju da je relacija dostižnosti R tranzitivna, odnosno da važi $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$, tada se sistem prirodne dedukcije nadograđuje dodavanjem pravila

$$\dfrac{xRy \quad yRz \quad \begin{array}{c}[xRz]\\ \vdots \\ w : A\end{array}}{w : A}.$$

Detaljnije objašnjenje za nadograđivanje sistema prirodne dedukcije, uzimajući u obzir osobine relacije dostižnosti, može se pronaći u [6].

1.3.3 Sistemi modalne logike

Kao što je već intuitivno opisano, postoje uslovi koje treba da zadovoljava svaki sistem modalne logike. Još jednom dajemo pregled tih uslova, koji predstavljaju osnovu svakog sistema modalne logike. Svaka valjana formula, treba da ispunjava ove uslove, ipak postojaće formule čija valjanost se neće moći odrediti samo na osnovu ovih uslova, te će biti potrebno dodati neke nove uslove, koji će nam dati nove sisteme modalne logike.

Iskazne promjenljive ćemo označavati sa $p, q, r, \ldots$, logički veznici $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ i $\perp$ se mogu posmatrati kao primitivni, dok se negacija, ekvivalencija i logička konstanta $\top$ definišu na sljedeći način:

- $\neg p \stackrel{\text{def}}{=} p \Rightarrow \perp$;
- $p \Leftrightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$;
- $\top \stackrel{\text{def}}{=} \perp \Rightarrow \perp$.

1.3.6. Definicija *Dobro zasnovane formule definišu se na sljedeći način:*

- *svaka promjenljiva p i logička konstanta $\perp(\top)$ je dobro zasnovana formula;*
- *ako je A dobro zasnovana formula, onda su i $\neg A$, $\Box A$ i $\Diamond A$ dobro zasnovane formule;*
- *ako su A i B dobro zasnovane formule, onda su i $A \vee B$, $A \wedge B$, i $A \Rightarrow B$ dobro zasnovane formule.*

Odnosno kako je već ranije navedeno jezik modalne logike u **BNF** notaciji definiše se na sljedeći način:

$$A, B := p \mid \perp \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \Rightarrow B \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Dobro zasnovane formule ćemo označavati sa $A, B, \ldots$.

Kako modalni operatori nisu istinitosne funkcije, formula $\Box A \Leftrightarrow A$ nije valjana. Princip za koji se očekuje da važi u svakom sistemu, jeste da ono što logički slijedi iz nečeg što je nužno tačno, je i samo nužno tačno i možemo ga zapisati pomoću sljedeće implikacije

$$\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B).$$

Sistem intuicionističke modalne logike koji zadovoljava do sada navedene uslove označavaćemo sa **IK** (analogno sistemu klasične modalne logike **K**) i to je sistem kome odgovara ranije naveden osnovni sistem prirodne dedukcije za modalnu logiku. U klasičnoj logici, sistemi modalne logike su dati aksiomatski. Dodavajući nove aksiome sistemu **K** dobijaju se novi sistemi klasične modalne logike **T**, **S4** i **S5**. U ovom radu ćemo posmatrati sisteme intuicionističke modalne logike **IT**, **IS4** i

IS5, koji su analogni navedenim sistemima klasične modalne logike, a dobijaju se nadograđivanjem sistema **IK** i oni će u radu biti predstavljeni sistemom prirodne dedukcije.

U tim sistemima ćemo zahtijevati da budu zadovoljena i sljedeća dva uslova : *aksioma nužnosti* i *aksioma mogućnosti.*

Aksioma nužnosti: $\Box A \Rightarrow A$.
Aksioma mogućnosti: $A \Rightarrow \Diamond A$.

U klasičnoj logici aksioma nužnosti i aksioma mogućnosti su bile ekvivalentne, i bilo je dovoljno dodati jednu u sistem, a druga bi slijedila iz nje. U intuicionističkoj logici ove dvije aksiome nisu ekvivalentne, te ukoliko želimo da važe u nekom sistemu, potrebno je dodati obje.

Sistem IT

Sistem **IT** je najslabiji sistem koji zadovoljava navedene principe. Sistem **T** je prvi predstavio Robert Feys 1937. godine. U klasičnoj logici sistem **T** se dobija tako što skupu aksioma sistema **K** doda aksioma nužnosti, a kako je njoj ekvivalentna aksioma mogućnosti, ona će onda direktno slijediti.

Sistem **IT** na sličan način se dobija iz sistema **IK**. Ako navedene sisteme predstavljamo aksiomatski, da bismo dobili sistem **IT** aksiomatizaciji sistema **IK** dodamo aksiomu nužnosti i aksiomu mogućnosti. Kako je u našem radu sistem **IK** dat sistemom prirodne dedukcije, mi želimo da sistem **IT** predstavimo sistemom prirodne dedukcije u kome će važiti navedene aksiome. Sistem prirodne dedukcije, koji odgovara ovom sistemu je sistem prirodne dedukcije u kome je relacija dostižnosti R *refleksivna*, odnosno kao što smo ranije naveli osnovni sistem prirodne dedukcije proširuje se pravilom :

$$\begin{array}{c} [xRx] \\ \vdots \\ \dfrac{y : A}{y : A}\ (R). \end{array}$$

Sada ćemo pokazati da u ovakvom sistemu prirodne dedukcije zaista važe aksioma nužnosti $\Box A \Rightarrow A$ i aksioma mogućnosti $A \Rightarrow \Diamond A$.

1.3.7. Teorema $\Box A \Rightarrow A$

Dokaz. Kako je relacija R refleksivna, za svaku promjenljivu (svijet) x važi xRx.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : \Box A]^2 \quad [xRx]^1}{x : A}\ (\Box E)}{x : A}\ {}^1(R)}{x : \Box A \Rightarrow A}\ {}^2(\Rightarrow I)$$

$\Box$

1.3.8. Teorema $A \Rightarrow \Diamond A$

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : A]^2 \quad [xRx]^1}{x : \Diamond A}\,(\Diamond I)}{x : \Diamond A}\,{}^1(R)}{x : A \Rightarrow \Diamond A}\,{}^2\,(\Rightarrow I)$$

□

Sada ćemo navesti i dokazati još neke teoreme u sistemu **IT**.

1.3.9. Teorema $\Box A \lor \Box B \Rightarrow \Box(A \lor B)$

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : \Box A \lor \Box B]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[x : \Box A]^3 \quad [xRy]^2}{y : A}\,(\Box E)}{y : A \lor B}\,(\lor I) \quad \dfrac{\dfrac{[x : \Box B]^4 \quad [xRy]^2}{y : B}\,(\Box E)}{y : A \lor B}\,(\lor I)}{y : A \lor B}\,{}^{3,4}(\lor E)}{x : \Box(A \lor B)}\,{}^2(\Box I)}{x : \Box A \lor \Box B \Rightarrow \Box(A \lor B)}\,{}^1(\Rightarrow I)$$

□

1.3.10. Teorema $\Diamond(A \land B) \Rightarrow \Diamond A \land \Diamond B$

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{[x : \Diamond(A \land B)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[y : A \land B]^2 \quad [xRy]^2}{y : A}}{x : \Diamond A} \quad \dfrac{\dfrac{[y : A \land B]^2 \quad [xRy]^2}{y : B}}{x : \Diamond B}}{x : \Diamond A \land \Diamond B}}{x : \Diamond A \land \Diamond B}\,{}^2}{x : \Diamond(A \land B) \Rightarrow \Diamond A \land \Diamond B}\,{}^1$$

□

Sistem IS4

Kao što smo već ranije naveli, sistem **IT** je najslabiji sistem koji zadovoljava navedene uslove. Postoje formule koje nisu teoreme sistema **IT**, jedan primjer takve formule je $\Box A \Leftrightarrow \Box\Box A$. Formule poput ove je teško intuitivno shvatiti, a razlog za to su sekvence modaliteta (modalnih operatora), koji se pojavljuju jedan do drugog. U formuli $\Box A \Leftrightarrow \Box\Box A$ sekvenca koja se pojavljuje je $\Box\Box$. Ovakve sekvence nazivaju se iterirani modaliteti. Ipak, jedan smjer implikacije važi i u sistemu **IT**, a to je $\Box\Box A \Rightarrow \Box A$, koja predstavlja verziju aksiome $\Box A \Rightarrow A$. Dakle, formula koja ne važi u sistemu **IT** je $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$, ova formula neformalno znači „nužno je obavezno nužno", odnosno ako je A nužno tačno, onda je nužno da je A nužno tačno. Kako su mnogi smatrali da je ova formula ipak tačna, javila se potreba da se napravi sistem jači od sistema **IT**. U takvom sistemu, ova formula će biti teorema. Takođe u sistemu **IT** važi formula $\Diamond A \Rightarrow \Diamond\Diamond A$, kao verzija aksiome $A \Rightarrow \Diamond A$, dok obratan smjer $\Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A$ ne važi.

U klasičnoj modalnoj logici iz formule $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ se može izvesti formula $\Diamond\Diamond A \Rightarrow A$, te je bilo dovoljno skupu aksioma sistema **T**, dodati aksiomu $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ pri čemu se dobijao sistem **S4** jači od sistema **T** u kome su važile obje navedene formule. Takođe, formule $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$ i $\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A$ su se mogle izvesti jedna iz druge, i formula $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ se mogla izvesti iz formule $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$. Na taj način dodavanjem u skup aksioma sistema **T** aksiome $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$ dobijao se sistem jači od **S4** i takav sistem nazivamo **S5**.

I u intuicionističkoj modalnoj logici možemo napraviti dva sistema, oba jača od **IT**. Međutim, u intuicionističkoj logici navedene ekvivalencije ne važe, iz formule $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ se ne može izvesti formula $\Diamond\Diamond A \Rightarrow A$, te ako želimo (aksiomatizovan) sistem jači od **IT** u kome će važiti obje formule, pri aksiomatizaciji ih obje moramo dodati kao nove aksiome i dobijamo sistem **IS4**, ovdje ćemo takav sistem u kome će navedene formule važiti dati njegovim sistemom prirodne dedukcije. Isto tako u intuicionističkoj logici formule $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$ i $\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A$ nisu ekvivalentne, te ako želimo (aksiomatizovan) sistem jači od **IT** u kome će važiti obje formule, pri aksiomatizaciji ih obje moramo dodati kao nove aksiome i dobijamo sistem **IS5**, ovdje ćemo i taj sistem dati njegovim sistemom prirodne dedukcije. Sistem prirodne dedukcije koji odgovara sistemu **IS4**, je sistem prirodne dedukcije, gdje je relacija dostižnosti R *refleksivna* i *tranzitivna*, odnosno osnovni sistem proširen pravilima:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[xRx]\\ \vdots \\ y : A\end{array}}{y : A}\ (R), \qquad \dfrac{xRy \quad yRz \quad \begin{array}{c}[xRz]\\ \vdots \\ w : A\end{array}}{w : A}\ (T).$$

Pokazaćemo da se u sistemu prirodne dedukcije sa ovim pravilima mogu dokazati teoreme $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ i $\Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A$.

1.3.11. Teorema $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$.

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[xRy]^3 \quad [yRz]^2 \quad \dfrac{[x : \Box A]^4 \quad [xRz]^1}{z : A}}{z : A}\,1}{y : \Box A}\,2}{x : \Box\Box A}\,3}{x : \Box A \Rightarrow \Box\Box A}\,4$$

$\Box$

1.3.12. Teorema $\Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A$

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{[x:\Diamond\Diamond A]^1 \qquad \dfrac{[y:\Diamond A]^2 \quad [xRy]^2 \quad \dfrac{[z:A]^3 \quad [yRz]^3}{x:\Diamond A}\,{\scriptstyle 3}}{x:\Diamond A}\,{\scriptstyle 2}}{x:\Diamond A}\,{\scriptstyle 1}}{x:\Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A}$$

$\square$

Sve formule koje su teoreme sistema **IT** su i teoreme sistema **IS4**.

Sistem IS5

Sistem prirodne dedukcije koji odgovara sistemu **IS5** je sistem prirodne dedukcije, gdje je relacija dostižnosti R *refleksivna*, *simetrična* i *tranzitivna*, odnosno osnovni sistem prirodne dedukcije proširen pravilima:

$$\begin{array}{c} [xRx] \\ \vdots \\ y:A \\ \hline y:A \end{array}\ (R), \qquad \begin{array}{c} \qquad\quad [yRx] \\ \qquad\quad \vdots \\ xRy \quad z:A \\ \hline z:A \end{array}\ (S), \qquad \begin{array}{c} \qquad\qquad\quad [xRz] \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ xRy \quad yRz \quad w:A \\ \hline w:A \end{array}\ (T).$$

Sve formule koje su teoreme sistema **IS4** su i teoreme sistema **IS5**. Pokazaćemo da u sistemu prirodne dedukcije za modalnu logiku, koji odgovara sistemu modalne logike **IS5** važe teoreme $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$ i $\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A$.

1.3.13. Teorema $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:\Diamond A]^4 \quad [xRy]^3 \quad \dfrac{[xRz]^2 \quad \dfrac{[z:A]^2 \quad [yRz]^1}{y:\Diamond A}\,{\scriptstyle 1}}{y:\Diamond A}\,{\scriptstyle 2}}{y:\Diamond A}\,{\scriptstyle 3}}{x:\Box\Diamond A}\,{\scriptstyle 4}}{x:\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A}$$

$\square$

1.3.14. Teorema $\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A$

Dokaz.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:\Diamond\Box A]^1 \quad [xRz]^4 \quad \dfrac{[xRy]^2 \quad \dfrac{[y:\Box A]^2 \quad [yRz]^3}{z:A}\,{\scriptstyle 3}}{z:A}\,{\scriptstyle 2}}{z:A}\,{\scriptstyle 4}}{x:\Box A}\,{\scriptstyle 1}}{x:\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A}$$

$\square$

Glava 2

Kripkeove semantike za intuicionističku logiku

Rani pokušaji da se razvije zadovoljavajuća matematička teorija za intuicionizam bili se odbačeni, uglavnom iz razloga što su rani intuicionisti bili strogi anti-formalisti i odbijali da prihvate da se matematička aktivnost može uprostiti mehaničkim skupom pravila. Matematičkim filozofima problem je predstavljao nedefinisan pojam *konstrukcije*, odnosno *algoritma*, koji bi transformisao jednu vrstu dokaza u drugu.

U tom pogledu, spisi ranih intuicionista, posebno Brouwer-a, bili su izuzetno nerazumljivi, činilo se da su više namijenjeni da učine nerazumljivim, nego da razjasne. Iako su vremenom intuicionisti prihvatili da su sve lambda-izračunljive funkcije i konstruktivne, nisu priznali da su to jedini valjani dokazi transformacija. Njihov stav bio je: *,,Znam konstrukciju, kada je vidim"*. Svaka formula dokaziva u ovom sistemu je intuicionistički valjana, ali su intuicionisti sačuvali mogućnost da postoji formula, koja nije dokaziva u ovom sistemu, ali je ipak intuicionistički valjana. Kako je vrijeme prolazilo i nisu pronalazili takvu formulu, ova ideja činila se sve manje mogućom.

U pokušaju da se intuicionisti vežu za određen logički sistem, predlagane su brojne formalne semantike za razne intuicionističke račune, koje bi takođe formalizovale intuiocionistička objašnjenja njihove filozofije. Ovo je dovelo do saznanja da različiti intuicionisti na različite načine dolaze do zaključka i shvataju intuicionizam. Činjenica da različiti načini razmišljanja vode do iste teorije je jak argument za prirodnost i značaj te teorije (intuicionizma).

Najpopularnije semantike su Kripkeove semantike, koje ćemo predstaviti u ovom radu i koje se često opisuju kao ,,temporalno epistemičke", što govori da pokušavaju da objasne intuicionizam u odnosu na to kako matematičari stiču matematička znanja tokom vremena.

Kripkeove semantike predstavljaju sasvim dobro osnovne intuicionističke ideje, ali sa klasične tačke gledišta, jer teorema potpunosti za semantike zahtijeva klasično rezonovanje. Bilo je i pokušaja da se stvori verzija Kripkeove teorije modela u kojoj se koriste samo metodi prihvatljivi intuicionističkim matematičarima, ali je bilo i nekoliko drugih uspješnih klasičnih pokušaja u kreiranju intuicionističkih modela, kao što su Beth-ovi modeli, topološki modeli i algebarski modeli.

Kao što smo ranije već naveli svaka logika ima tri aspekta: sintaksu, deduktivni sistem i semantiku. U Glavi 1 predstavili smo sintakse i sisteme prirodne dedukcije za iskaznu, predikatsku i modalnu (intuicionističku) logiku. U ovoj glavi ćemo predstaviti i semantike za navedene logike i to Kripkeove semantike i dokazati teoreme potpunosti za neke od njih. Teorema potpunosti je teorema koja daje vezu između semantičke istine i sintaksne dokazivosti, odnosno povezuje teoriju modela, koja proučava šta je tačno u različitim modelima i teoriju dokaza, koja proučava šta može biti dokazano u određenom formalnom (deduktivnom) sistemu.

2.1 Kripkeove semantike za iskaznu logiku

U ovom dijelu ćemo dati definicije Kripkeovih semantika za intuicionističku iskaznu logiku, navodeći primjere i neke njihove osobine.

2.1.1. Definicija *Kripkeov model za intuicionističku iskaznu logiku je uređena trojka* $\langle W,\ R,\ V\rangle$*, gdje je* W *neprazan skup mogućih svjetova,* R *refklesivna i tranzitivna binarna relacija na skupu* W*,* V *funkcija koja dodjeljuje istinitosnu vrijednost* $\top$ *ili* $\bot$ *svakoj iskaznoj promjenljivoj u svakom mogućem svijetu* $V : W \times Var \to \{\top,\ \bot\}$ *i funkcija* V *je monotona u odnosu na relaciju* R*, to jest važi:*

$$\textit{Ako je } V(w,p) = \top \textit{ i } wRw' \textit{ tada } V(w',p) = \top.$$

Uređen par $\langle W, R\rangle$ sa gore definisanim osobinama, naziva se Kripkeov *okvir* za intuicionističku iskaznu logiku. Relacija R naziva se relacijom dostižnosti i ako važi wRw' kažemo da je svijet w' dostižan svijetu w. Dajemo definiciju relacije zadovoljivosti $\vDash$ na skupu $W \times Form$, gdje je $Form$ skup svih iskaznih formula. Relaciju $\vDash$ čitamo ,,(dvostruka) rampa".

2.1.2. Definicija *Relacija zadovoljivosti* $\vDash$ *definiše se indukcijom po strukturi iskazne formule:*

$w \vDash p$ *ako i samo ako* $V(w,p) = \top$;

$w \nvDash \bot$;

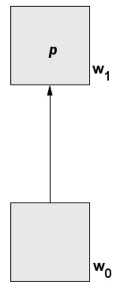
$w \vDash A \wedge B$ *ako i samo ako* $w \vDash A$ *i* $w \vDash B$;

$w \vDash A \vee B$ *ako i samo ako* $w \vDash A$ *ili* $w \vDash B$;

$w \vDash A \Rightarrow B$ *ako i samo ako za svako* w' *takvo da* wRw'*, ako važi* $w' \vDash A$ *tada važi* $w' \vDash B$;

$w \vDash \neg A$ *ako i samo ako za svako* w' *takvo da je* wRw' *važi* $w' \nvDash A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je *tačna u svijetu* w ako i samo ako važi $w \vDash A$, što možemo zapisati i na sljedeći način $V(w, A) = \top$. Formula A je *tačna u modelu* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, pišemo $\mathcal{M} \vDash A$, ako i samo ako je tačna u svakom svijetu $w \in W$. Iskazna formula A je *valjana* (pišemo $\vDash A$) ako i samo ako je tačna u svakom modelu.

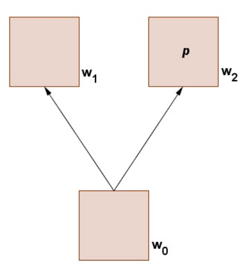


Slika 2.1: Primjer 2.1.3

2.1.3. Primjer Posmatrajmo Kripkeov model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, dat na slici 2.1, gdje je $W = \{w_0, w_1\}$, $R = \{(w_0, w_0),\ (w_0, w_1),\ (w_1, w_1)\}$ i $V(w_1, p) = \top$, odnosno važi $w_1 \vDash p$. Ostalim iskaznim slovima je u svijetu w_1 dodijeljena vijednost $\perp$ funkcijom V, dok je u svijetu w_0 svim iskaznim slovima dodijeljena vrijednost $\perp$. Odredimo vrijednost $V(w_0, p \vee \neg p)$.

Prvo odredimo $V(w_0, \neg p)$. Kako je $w_0 R w_1$ i $V(w_1, p) = \top$, tj. $w_1 \vDash p$, na osnovu definicije 2.1.2 $w_0 \nvDash \neg p$, odnosno $V(w_0, \neg p) = \perp$. Dalje, kako iz konstrukcije modela važi $w_0 \nvDash p$, na osnovu definicije 2.1.2 imamo $V(w_0, p \vee \neg p) = \perp$, tj. $w_0 \nvDash p \vee \neg p$. Kako formula $p \vee \neg p$ nije tačna u svijetu w_0, ona nije tačna u datom modelu, te formula nije valjana i time smo pokazali da zakon isključenja trećeg $p \vee \neg p$ ne važi u intuicionističkoj logici.

Analogno, kako smo došli do zaključka da važi $w_0 \nvDash \neg p$, na osnovu definicije 2.1.2 zaključujemo da važi $w_0 \vDash \neg\neg p$. Pošto iz konstrukcije modela imamo $w_0 \nvDash p$, na osnovu definicije 2.1.2 važi $w_0 \nvDash \neg\neg p \Rightarrow p$. Dakle, zakon dvostruke negacije nije tačan u svijetu w_0, pa nije tačan ni u datom modelu. Time smo pokazali da zakon dvostruke negacije nije valjana formula u intuicionističkoj logici.



Slika 2.2: Primjer 2.1.4

2.1.4. Primjer Posmatrajmo Kripkeov model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, dat na slici 2.2, gdje je $W = \{w_0, w_1, w_2\}$, $R = \{(w_0, w_0),\ (w_0, w_1),\ (w_0, w_2),\ (w_1, w_1),\ (w_2, w_2)\}$ i $V(w_2, p) = \top$, odnosno važi $w_2 \vDash p$. Ostalim iskaznim slovima je u svijetu w_2 dodijeljena vrijednost $\bot$ funkcijom V, dok je u svjetovima w_0 i w_1 svim iskaznim slovima dodijeljena vrijednost $\bot$.

Odredimo vrijednost $V(w_0, \neg p \vee \neg\neg p)$. Kako je w_1, jedini element w' iz W, tako da je $w_1 R w'$, $((w_1, w_1) \in R)$ i $V(w_1, p) = \bot$, na osnovu definicije relacije zadovoljivosti za negaciju (2.1.2), imamo $w_1 \vDash \neg p$, tj. $V(w_1, \neg p) = \top$. Iz činjenice da važi $w_0 R w_2$ i $V(w_2, p) = \top$, zaključujemo da je $V(w_0, \neg p) = \bot$, tj. $w_0 \nvDash \neg p$. Dalje, iz $w_0 R w_1$ i $V(w_1, \neg p) = \top$, što smo malo prije pokazali, zaključujemo da je $V(w_0, \neg\neg p) = \bot$, odnosno $w_0 \nvDash \neg\neg p$. Sada, na osnovu definicije relacije zadovoljivosti za disjunkciju (2.1.2) zaključujemo da je $V(w_0, \neg p \vee \neg\neg p) = \bot$, odnosno $w_0 \nvDash \neg p \vee \neg\neg p$

2.1.5. Teorema *Ako važi wRw' i $w \vDash A$, tada važi $w' \vDash A$.*

Dokaz. Ova teorema govori da je relacija zadovoljivosti $\vDash$ monotona u odnosu na relaciju R. Dokazuje se indukcijom po složenosti formule A.

- Ako je formula $A = p$ iskazno slovo, tada teorema važi, jer ako $w \vDash p$, tada $V(w, p) = \top$ i ako je wRw', na osnovu monotonosti funkcije V, važi $V(w', p) = \top$, tj. $w' \vDash p$.

- Ako je $A = \bot$, kako za svako $w \in W$, $w \nvDash \bot$ tj. $w \nvDash A$, tada implikacija trivijalno važi.

- Neka je $A = B \wedge C$. Pretpostavimo da važi $w \vDash B \wedge C$ i wRw'. Na osnovu definicije 2.1.2 imamo da važi $w \vDash B$ i $w \vDash C$. Kako na osnovu indukcijske hipoteze, teorema važi za svaku formulu manje složenosti od formule A, važi i za formule B i C, te važi $w' \vDash B$ i $w' \vDash C$. Tada na osnovu definicije 2.1.2 važi $w' \vDash B \wedge C$, tj. $w' \vDash A$.

- Pretpostavimo da je $A = B \vee C$. Neka za proizvoljan svijet w važi $w \vDash B \vee C$ i wRw'. Na osnovu definicije 2.1.2 imamo da važi $w \vDash B$ ili $w \vDash C$. Sada na osnovu indukcijske hipoteze, teorema važi za svaku formulu manje složenosti od formule A, te važi i za formule B i C. Ako važi $w \vDash B$ imamo da važi $w' \vDash B$. Tada na osnovu definicije 2.1.2 važi $w' \vDash B \vee C$, tj. $w' \vDash A$. Analogno, ako važi $w \vDash C$, onda na osnovu indukcijske hipoteze važi $w' \vDash C$, pa na osnovu definicije 2.1.2 važi $w' \vDash A$.

- Posmatrajmo slučaj kada je $A = B \Rightarrow C$. Pretpostavimo da važi $w \vDash B \Rightarrow C$ i wRw'. Na osnovu definicije 2.1.2, ako je $w \vDash B \Rightarrow C$, tada je za svako $w_1 \in W$, takvo da je wRw_1, ako važi $w_1 \vDash B$ tada važi i $w_1 \vDash C$. Pretpostavimo da $w' \nvDash B \Rightarrow C$, tada postoji $w'' \in W$, takvo da $w'Rw''$ i $w'' \vDash B$ i $w'' \nvDash C$. Sada zbog tranzitivnosti relacije R, važi wRw'' i imamo da važi $w'' \vDash B$ i $w'' \nvDash C$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da za svako $w_1 \in W$, takvo da je wRw_1, ako važi $w_1 \vDash B$ tada važi i $w_1 \vDash C$. Dakle, pretpostavka $w' \nvDash B \Rightarrow C$ je pogrešna, te važi $w' \vDash B \Rightarrow C$.

- Neka je sada $A = \neg B$. Uzmimo da važi $w \vDash \neg B$ i wRw'. Na osnovu definicije 2.1.2, iz $w \vDash \neg B$, zaključujemo da za svako $w_1 \in W$, takvo da je wRw_1 važi $w_1 \nvDash B$. Pretpostavimo da važi $w' \nvDash \neg B$, tada postoji $w'' \in W$ takvo da $w'Rw''$ i $w'' \vDash B$. Iz tranzitivnosti relacije R imamo wRw'', te iz $w'' \vDash B$ slijedi kontradikcija sa pretpostavkom da za svako $w_1 \in W$, takvo da je wRw_1 važi $w_1 \nvDash B$. Kako nas je pretpostavka $w' \vDash \neg B$ dovela do kontradikcije, ona je pogrešna pa važi $w' \vDash A$.

Ovim smo pokazali da za svaku formulu A važi teorema. □

Teorema potpunosti

Prilikom predstavljanja teoreme potpunosti sa dokazom za Kripkeove modele u intuicionističkoj iskaznoj logici koristili smo [5, 8, 18] . Prije nego što predstavimo teoremu potpunosti sa dokazom, uvešćemo neke nove pojmove i dati dokaze lema, koje ćemo kasnije koristiti.

2.1.6. Definicija *B je semantička posljedica skupa formula Γ ($\Gamma \vDash B$) ako i samo ako za svaki Kripkeov model $\mathcal{M}$ i svaki svijet w iz tog modela važi: ako su sve formule $A \in \Gamma$ tačne u svijetu w ($w \vDash A$) onda je i formula B tačna u svijetu w ($w \vDash B$).*

2.1.7. Teorema *Iz $\Gamma \vdash B$ slijedi $\Gamma \vDash B$.*

Dokaz. Ako pretpostavimo da važi $\Gamma \vdash B$ i hoćemo da pokažemo $\Gamma \vDash B$, onda treba pokazati da ako je u proizvoljnom svijetu w nekog modela $\mathcal{M}$, tačna svaka formula iz skupa Γ, odnosno svaka premisa, tada je u tom svijetu tačna i formula B, odnosno zaključak. Dokazuje se indukcijom po dužini izvođenja $\Gamma \vdash B$. Posmatramo poslednji korak u izvođenju i pretpostavljamo da tvrđenje važi za sve formule koje su dobijene primjenom manjeg broja pravila izvođenja. U zavisnosti od toga koje je poslednje pravilo primijenjeno posmatramo sljedeće slučajeve:

- Pretpostavimo da je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\bot}{A_1}$, dakle ovdje je formula $B = A_1$ izvedena iz $\bot$. Na osnovu definicije 2.1.2 za svaki model $\mathcal{M}$ i svijet w iz tog modela važi $w \nvDash \bot$. Dakle, u svakom proizvoljnom modelu i proizvoljnom svijetu tog modela, premisa je netačna, te je ovaj slučaj trivijalan.

- Neka je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2}$. Ovdje je formula $B = A_1 \wedge A_2$ izvedena iz skupa formula $\Gamma = \{A_1, A_2\}$. Pretpostavimo da su u proizvoljnom Kripkeovom modelu $\mathcal{M}$ i proizvoljnom svijetu tog modela w tačne sve formule iz skupa Γ (sve premise), tj. da su tačne formule A_1 i A_2 i hoćemo da pokažemo da je onda u tom svijetu w tačna i formula B. Iz $w \vDash A_1$ i $w \vDash A_2$ na osnovu definicije 2.1.2 možemo zaključiti da važi $w \vDash A_1 \wedge A_2$ odnosno $w \vDash B$. Dakle, formula B je tačna u svijetu w modela $\mathcal{M}$.

- Ako je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{A_1 \wedge A_2}{A_1}$ formula $B = A_1$ je izvedena iz skupa formula $\Gamma = \{A_1 \wedge A_2\}$. Pretpostavimo da je u proizvoljnom Kripkeovom modelu $\mathcal{M}$ i proizvoljnom svijetu tog modela w tačna premisa $A_1 \wedge A_2$ tj. $w \vDash A_1 \wedge A_2$ i hoćemo da pokažemo da je onda u tom svijetu w tačna i formula $B = A_1$. Iz $w \vDash A_1 \wedge A_2$ na osnovu definicije 2.1.2 slijedi $w \vDash A_1$ i $w \vDash A_2$, pa imamo da važi $w \vDash B$.

- Posmatrajmo slučaj kada je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{A_1}{A_1 \vee A_2}$, ovdje je formula $B = A_1 \vee A_2$ izvedena iz skupa formula $\Gamma = \{A_1\}$. Pretpostavimo da je u proizvoljnom Kripkeovom modelu $\mathcal{M}$ i proizvoljnom svijetu tog modela w tačna premisa A_1, tj. $w \vDash A_1$. Na osnovu definicije 2.1.2 $w \vDash A_1 \vee A_2$ ako i samo ako $w \vDash A_1$ ili $w \vDash A_2$, kako smo pretpostavili da važi $w \vDash A_1$, možemo zaključiti da važi i $w \vDash B$.

- Prepostavimo da je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{A_1 \quad A_1 \Rightarrow A_2}{A_2}$, dakle ovdje je formula $B = A_2$ izvedena iz skupa formula $\Gamma = \{A_1,\ A_1 \Rightarrow A_2\}$. Pretpostavimo da su u proizvoljnom Kripkeovom modelu $\mathcal{M}$ i proizvoljnom svijetu tog modela w tačne premise A_1 i $A_1 \Rightarrow A_2$, tj. $w \vDash A_1$ i $w \vDash A_1 \Rightarrow A_2$, treba pokazati da je onda u tom svijetu w tačna i formula $B = A_2$. Na osnovu definicije 2.1.2 $w \vDash A_1 \Rightarrow A_2$ važi ako i samo ako za svaki svijet w' takav da wRw' iz $w' \vDash A_1$ slijedi $w' \vDash A_2$. Uzimajući u obzir da je relacija R refleksivna, odnosno da važi wRw i pretpostavku $w \vDash A_1$, dobijamo da mora da važi $w \vDash A_2$, odnosno $w \vDash B$.

- Neka je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\begin{matrix}[A_1]\\ \vdots \\ A_2\end{matrix}}{A_1 \Rightarrow A_2}$, ovdje je $B = A_1 \Rightarrow A_2$. U premisi imamo izvođenje formule A_2 iz formule A_1, tj. $A_1 \vdash A_2$. Ovo izvođenje manje je složenosti od izvođenja formule B, te na njega možemo primijeniti indukcijsku hipotezu i važi $A_1 \vDash A_2$, odnosno ako je u nekom svijetu nekog modela tačna formula A_1 onda je u tom svijetu tačna i formula A_2. Uzmimo proizvoljan Kripkeov model $\mathcal{M}$ i proizvoljan svijet u tom modelu w, ispitajmo kada je formula B tačna u svijetu w. $w \vDash A_1 \Rightarrow A_2$ važi ako i samo ako za svaki svijet w' takav da wRw' iz $w' \vDash A_1$ slijedi $w' \vDash A_2$, a ovo važi na osnovu prethodno izvedenog zaključka. Dakle, $w \vDash B$.

- Za kraj, posmatrajmo slučaj kada je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{A_1 \vee A_2 \quad \begin{matrix}[A_1]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_2]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$. Ovdje je $B = C$, dok u premisi imamo formulu $A_1 \vee A_2$

i izvođenja $A_1 \vdash C$ i $A_2 \vdash C$ koja su manje složenosti od izvođenja formule B pa za njih važi indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da u proizvoljnom Kripkeovom modelu $\mathcal{M}$ i proizvoljnom svijetu tog modela w važi $w \vDash A_1 \vee A_2$, sada na osnovu definicije 2.1.2 važi $w \vDash A_1$ ili $w \vDash A_2$. Na osnovu indukcijske hipoteze iz $A_i \vdash C$ $(i = 1, 2)$ možemo zaključiti iz $w \vDash A_i$ slijedi $w \vDash C$. Kako iz pretpostavke imamo da važi $w \vDash A_1$ ili $w \vDash A_2$, zaključujemo da važi $w \vDash C$, tj. $w \vDash B$.

Ovim smo dokazali teoremu, koja je poznata pod nazivom **teorema saglasnosti**. □

Sljedeće definicije preuzete su iz [5].

2.1.8. Definicija *Teorija je deduktivno zatvoren skup, odnosno skup formula koji je zatvoren u odnosu na pravila izvođenja sistema prirodne dedukcije.*

2.1.9. Definicija *Skup formula Γ ima svojstvo disjunkcije ako iz $A \vee B \in \Gamma$ slijedi $A \in \Gamma$ ili $B \in \Gamma$.*

Sljedeće definicije i leme preuzete su iz [5, 8] .

2.1.10. Definicija *Za formulu B i skup formula Γ kažemo da je Γ B-maksimalan skup formula, ako $\Gamma \nvdash B$ i za svaku formulu $A \notin \Gamma$ važi $\Gamma, A \vdash B$.*

2.1.11. Lema *Za svaku formulu B i svaki skup Γ takav da $\Gamma \nvdash B$, postoji B-maksimalan skup Γ' koji sadrži skup Γ.*

Dokaz. Neka je B proizvoljna formula i Γ proizvoljan skup takav da važi $\Gamma \nvdash B$. Numerišimo sve formule $A_1, A_2, A_3, \ldots$ i definišimo rekurzivno:

- $\Gamma_0 = \Gamma$;
- $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup A_{n+1}$ ako važi $\Gamma,\ A_{n+1} \nvdash B$;
- $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ ako važi $\Gamma,\ A_{n+1} \vdash B$.

Uzmimo $\Gamma' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. Jasno je da važi $\Gamma \subseteq \Gamma'$, jer je $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \Gamma'$. Takođe, nijedno Γ_n pa ni samo Γ' ne dokazuje B tj. važi $\Gamma' \nvdash B$. Ostaje još da pokažemo da je Γ' zaista B-maksimalan skup, odnosno da pokažemo da za svaku formulu $A \notin \Gamma'$ važi $\Gamma, A \vdash B$. Zbog konstrukcije skupa Γ' za svaku formulu A takvu da $\Gamma', A \nvdash B$, važi $A \in \Gamma'$, te smo time pokazali da je Γ' zaista B-maksimalan skup. □

Skup Γ koji je B-maksimalan skup ima sljedeća svojstva:

- Za svaku formulu A važi ili $A \in \Gamma$ ili $\Gamma,\ A \vdash B$;
- Za svaku formulu A, ako $A \notin \Gamma$ tada $\Gamma, A \vdash B$.

2.1.12. Lema *Za svaku formulu A, ako važi $\Gamma \vdash A$ tada $A \in \Gamma$.*

Dokaz. Ova osobina slijedi iz leme 1.1.7, gdje uzmemo $\Delta = \Gamma$. Ako bi bilo $A \notin \Gamma$ onda bismo imali $\Gamma, A \vdash B$, što zajedno sa $\Gamma \vdash A$ daje $\Gamma \vdash B$, a to je kontradikcija. □

Da bi se dokazala potpunost, potrebno je definisati specijalne Kripkeove modele.

2.1.13. Definicija *Kanonički model intuicionističke iskazne logike je Kripkeov model $\mathcal{U} = \langle W, R, V \rangle$ gdje važi:*

- *svijet $w \in W$ je uređeni par (Γ, B), gdje je Γ B-maksimalan skup formula;*
- *relacija R definisana je na sljedeći način $(\Gamma, B)R(\Gamma', B') := \Gamma \subseteq \Gamma'$;*
- *kanonička valuacija V definisana je sa $(\Gamma, B) \vDash p$ ako i samo ako $p \in \Gamma$ (gdje je p iskazno slovo).*

2.1.14. Lema *Za svaku formulu A u svakom svijetu (Γ, B) kanoničkog modela $\mathcal{U}$ važi:*

$$A \in \Gamma \Leftrightarrow (\Gamma, B) \vDash A.$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Slučajevi gdje je formula A iskazno slovo p ili $\perp$ su trivijalni. Slučaj kada je $A = p$ slijedi iz definicije kanoničke valuacije. Ako je $A = \perp$, tada za svaki svijet (Γ, B) važi $(\Gamma, B) \nvDash \perp$ i kako je Γ B-maksimalan skup, iz definicije skupa lako je zaključiti da važi $\perp \notin \Gamma$. Sada, u zavisnosti od složenosti formule razlikujemo sljedeće slučajeve:

- Neka je $A = A_1 \wedge A_2$. Pokazujemo da važi $A_1 \wedge A_2 \in \Gamma \Leftrightarrow (\Gamma, B) \vDash A_1 \wedge A_2$, pri čemu ćemo odvojeno pokazivati smjerove ekvivalencije.

  (⇐) Neka je $(\Gamma, B) \vDash A_1 \wedge A_2$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $A_1 \wedge A_2 \notin \Gamma$, tada na osnovu leme 2.1.12 važi $\Gamma \nvdash A_1 \wedge A_2$. Sada na osnovu leme 2.1.11 imamo da postoji skup Γ' takav da je $A_1 \wedge A_2$-maksimalan skup i $\Gamma \subseteq \Gamma'$, pa je $(\Gamma', A_1 \wedge A_2)$ svijet kanoničkog modela $\mathcal{U}$. Kako je $\Gamma \subseteq \Gamma'$ na osnovu definicije 2.1.13 imamo da važi $(\Gamma, B)R(\Gamma', A_1 \wedge A_2)$. Uzimajući u obzir monotonost relacije zadovoljivosti i pretpostavku $(\Gamma, B) \vDash A_1 \wedge A_2$ dobijamo $(\Gamma', A_1 \wedge A_2) \vDash A_1 \wedge A_2$ što je kontradikcija, jer je Γ' $A_1 \wedge A_2$-maksimalan skup. Dakle, pretpostavka $A_1 \wedge A_2 \notin \Gamma$ je pogrešna, te važi $A_1 \wedge A_2 \in \Gamma$.

  (⇒) Krenimo od pretpostavke da važi $A_1 \wedge A_2 \in \Gamma$ i $(\Gamma, B) \nvDash A_1 \wedge A_2$. Sada na osnovu definicije 2.1.2 imamo da važi $(\Gamma, B) \nvDash A_1$ ili $(\Gamma, B) \nvDash A_2$, kako su formule A_1 i A_2 manje složenosti od formule A, na osnovu indukcijske hipoteze za njih važi tvrđenje pa imamo da važi $A_1 \notin \Gamma$ ili $A_2 \notin \Gamma$. Dalje, na osnovu osobina Γ skupa važi $\Gamma, A_1 \vdash B$ ili $\Gamma, A_2 \vdash B$, iz oba slučaja zaključujemo $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash B$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom $A_1 \wedge A_2 \in \Gamma$, na osnovu osobina skupa Γ. Dakle, pretpostavka $(\Gamma, B) \nvDash A_1 \wedge A_2$ je pogrešna, te važi $(\Gamma, B) \vDash A_1 \wedge A_2$.

- Posmatrajmo slučaj kada je $A = A_1 \vee A_2$. Treba pokazati da važi $A_1 \vee A_2 \in \Gamma \Leftrightarrow (\Gamma, B) \vDash A_1 \vee A_2$.

  ($\Leftarrow$)Pretpostavimo suprotno, tj. da je $(\Gamma, B) \vDash A_1 \vee A_2$. i $A_1 \vee A_2 \notin \Gamma$. Sada na osnovu leme 2.1.12 važi $\Gamma \nvDash A_1 \vee A_2$. Zatim na osnovu leme 2.1.11 postoji $A_1 \vee A_2$-maksimalan skup Γ' takav da je $\Gamma \subseteq \Gamma'$, pa je $(\Gamma', A_1 \vee A_2)$ svijet kanoničkog modela $\mathcal{U}$. Na osnovu definicije 2.1.13 i osobine $\Gamma \subseteq \Gamma'$ imamo da važi $(\Gamma, B)R(\Gamma', A_1 \vee A_2)$. Iz monotonost relacije zadovoljivosti i pretpostavke $(\Gamma, B) \vDash A_1 \vee A_2$ slijedi da važi $(\Gamma', A_1 \vee A_2) \vDash A_1 \vee A_2$ što je kontradikcija, jer je Γ' $A_1 \vee A_2$-maksimalan skup. Kako nas je pretpostavka $A_1 \vee A_2 \notin \Gamma$ dovela do kontradikcije, ona je pogrešna, pa zaključujemo da važi $A_1 \vee A_2 \in \Gamma$.

  ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da važi $A_1 \vee A_2 \in \Gamma$ i $(\Gamma, B) \nvDash A_1 \vee A_2$. Tada na osnovu definicije 2.1.2, važi $(\Gamma, B) \nvDash A_1$ i $(\Gamma, B) \nvDash A_2$. Na osnovu indukcijske hipoteze tvrđenje važi za sve formule manje složenosti od formule A. Kako su formule A_1 i A_2 manje složenosti, imamo da važi $A_1 \notin \Gamma$ i $A_2 \notin \Gamma$. Iz konstrukcije skupa Γ možemo zaključiti da važi $\Gamma, A_1 \vdash B$ i $\Gamma, A_2 \vdash B$, odakle dalje slijedi $\Gamma, A_1 \vee A_2 \vdash B$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $A_1 \vee A_2 \in \Gamma$. Kako smo došli do kontradikcije, zaključujemo da mora da važi $A_1 \vee A_2 \in \Gamma$.

- Neka je sada formula A oblika $A_1 \Rightarrow A_2$. Dokazujemo da važi $A_1 \Rightarrow A_2 \in \Gamma \Leftrightarrow (\Gamma, B) \vDash A_1 \Rightarrow A_2$

  ($\Leftarrow$) Pretpostavimo suprotno, odnosno da važi $(\Gamma, B) \vDash A_1 \Rightarrow A_2$ i $A_1 \Rightarrow A_2 \notin \Gamma$. Na osnovu leme 2.1.12 važi $\Gamma \nvDash A_1 \Rightarrow A_2$. Sada na osnovu leme 2.1.11 imamo da postoji skup Γ' takav da je $A_1 \Rightarrow A_2$-maksimalan skup i $\Gamma \subseteq \Gamma'$, te je po definiciji kanoničkog modela $(\Gamma', A_1 \Rightarrow A_2)$ svijet kanoničkog modela $\mathcal{U}$. Iz osobine $\Gamma \subseteq \Gamma'$, na osnovu definicije kanoničkog modela imamo da važi $(\Gamma, B)R(\Gamma', A_1 \Rightarrow A_2)$. Pretpostavka $(\Gamma, B) \vDash A_1 \Rightarrow A_2$ zajedno sa osobinom monotonosti relacije zadovoljivosti nas dovodi do zaključka da važi $(\Gamma', A_1 \Rightarrow A_2) \vDash A_1 \Rightarrow A_2$. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je Γ' $A_1 \Rightarrow A_2$-maksimalan skup. Zaključujemo da je pretpostavka $A_1 \Rightarrow A_2 \notin \Gamma$ pogrešna i da važi $A_1 \Rightarrow A_2 \in \Gamma$.

  ($\Rightarrow$) Neka je $A_1 \Rightarrow A_2 \in \Gamma$. Pretpostavimo suprotno, da $(\Gamma, B) \nvDash A_1 \Rightarrow A_2$. Na osnovu definicije 2.1.2 imamo da postoji svijet (Γ', B') takav da je $(\Gamma, B)R(\Gamma', B')$, $(\Gamma', B') \vDash A_1$ i $(\Gamma', B') \nvDash A_2$. Formule A_1 i A_2 su manje složenosti od formule A, te na osnovu indukcijske hipoteze za njih važi tvrđenje, odnosno možemo zaključiti da važi $A_1 \in \Gamma'$ i $A_2 \notin \Gamma'$. Iz $A_1 \in \Gamma'$ zaključujemo $\Gamma' \vdash A_1$. Iz pretpostavke $A_1 \Rightarrow A_2 \in \Gamma$ i osobine $\Gamma \subseteq \Gamma'$, zaključujemo da važi $A_1 \Rightarrow A_2 \in \Gamma'$, te možemo zaključiti da važi $\Gamma' \vdash A_1 \Rightarrow A_2$, što nam zajedno sa već pokazanim $\Gamma' \vdash A_1$ daje $\Gamma' \vdash A_2$. Sa druge strane iz $A_2 \notin \Gamma'$ na osnovu toga što je Γ' B'- maksimalan skup imamo da važi $\Gamma', A_2 \vdash B'$, što zajedno sa $\Gamma' \vdash A_2$ daje $\Gamma' \vdash B'$, a to je kontradikcija sa pretpostavkom da je Γ' B'- maksimalan skup. Pretpostavka $(\Gamma, B) \nvDash A_1 \Rightarrow A_2$ je pogrešna, tj. važi $(\Gamma, B) \vDash A_1 \Rightarrow A_2$.

Razmatranjem svih mogućih oblika formule A dokazali smo tvrđenje. □

2.1.15. Teorema *Ako* $\Gamma \vDash B$ *onda* $\Gamma \vdash B$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da važi $\Gamma \vDash B$ i $\Gamma \nvdash B$. Tada, na osnovu leme 2.1.11 postoji skup Γ' koji je nadskup skupa Γ i B-maksimalan skup, te na osnovu definicije 2.1.10 $\Gamma' \nvdash B$. Uređeni par (Γ', B) je onda svijet u kanoničkom Kripkeovom modelu $\mathcal{U}$ u kome je svaki član iz Γ tačan, odnosno $(\Gamma', B) \vDash A$ za svaku formulu $A \in \Gamma \subseteq \Gamma'$, na osnovu leme 2.1.14. Kako formula B nije tačna u (Γ', B), tj. $(\Gamma', B) \nvDash B$, zaključujemo da je u svijetu (Γ', B) tačan skup formula Γ, a nije tačna formula B, što je kontradikcija sa pretpostavkom $\Gamma \vDash B$. Ako važi $\Gamma \vDash B$, to znači da je svaki model skupa Γ ujedno i model formule B, a svijet (Γ', B) ne zadovoljava to svojstvo. Dakle, naša pretpostavka $\Gamma \nvdash B$ je pogrešna, jer nas je dovela do kontradikcije, te važi $\Gamma \vdash B$. Time smo dokazali teoremu potpunosti. □

2.1.16. Teorema $\Gamma \vDash B$ *ako i samo ako* $\Gamma \vdash B$.

Dokaz. Na osnovu 2.1.7 i 2.1.15 . □

2.2 Kripkeove semantike za predikatsku logiku

U ovom dijelu ćemo dati definiciju Kripkeovih semantika za intuicionističku predikatsku logiku, navodeći primjere i neke njihove osobine. Koristili smo [18].

Svaki intuicionistički model ima domen $\mathbb{D}$ i sa $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ označavamo jezik modela nad domenom $\mathbb{D}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{D}$ neprazan skup.

2.2.1. Definicija *Kripkeov okvir za intuicionističku predikatsku logiku je uređena trojka* $\langle W,\ R,\ D\rangle$*, gdje je* $\langle W,\ R\rangle$ *Kripkeov okvir za iskaznu logiku, tj.* W *je neprazan skup mogućih svjetova, a* R *binarna, refleksivna i tranzitivna relacija na* W*.* D *je funkcija koja svakom svijetu* $w \in W$ *dodjeljuje neprazan skup* D_w*, podskup skupa* $\mathbb{D}$ *i ima sljedeću osobinu u odnosu na relaciju* R*:*

$$\text{Iz } wRw' \text{ slijedi } D_w \subseteq D_{w'}.$$

2.2.2. Definicija *Kripkeov model za intuicionističku predikatsku logiku nad domenom* $\mathbb{D}$ *je uređena četvorka* $\mathcal{M} = \langle W,\ R,\ D,\ V\rangle$*, gdje je* $\langle W,\ R,\ D\rangle$ *Kripkeov okvir za intuicionističku predikatsku logiku, a* V *funkcija koja svakom funkcijskom simbolu* f *dodjeljuje funkciju* $V(f)$ *i svakom relacijskom (predikatskom) simbolu* P *dodjeljuje relaciju* $V(P)$*, tako da su sljedeći uslovi zadovoljeni:*

- *Za svako $w \in W$ i $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D_w$ i funkcijski simbol f, arnosti n, takav da $V(f)(w, d_1, d_2, \ldots, d_n) \in D_w$ važi:*

  Iz wRw' slijedi $V(f)(w', d_1, d_2, \ldots, d_n) = V(f)(w, d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

- *Za svako $w \in W$ i $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D_w$ i relacijski simbol P, arnosti n, takav da $V(P)(w, d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \{\top, \bot\}$ važi:*

  Iz wRw' i $V(P)(w, d_1, d_2, \ldots, d_n) = \top$ slijedi $V(P)(w', d_1, d_2, \ldots, d_n) = \top$.

Prvo dajemo definiciju funkcije V na skupu konstantnih termova (bez promjenljivih) i atomičkih formula.

2.2.3. Definicija *Za konstantan term $t \in D_w$ vrijednost $V(w,t)$ definiše se na sljedeći način:*

- *$V(w, d) := d$ ako za konstantu d važi $d \in D_w$;*
- *$V(w, f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := V(f)(w, t_1, t_2, \ldots, t_n)$.*

Za atomičku formulu vrijednost se definiše na sljedeći način:

$$V(w, P(t_1, \ldots, t_n)) := V(P)(w, V(w, t_1), \ldots, V(w, t_n)).$$

Sada se definicija relacije zadovoljivosti $\vDash$ može proširiti za sve formule intuicionističke predikatske logike.

2.2.4. Definicija *Relacija zadovoljivosti $\vDash$ definiše se indukcijom po složenosti formule ϕ.*

$w \nvDash \bot$;

$w \vDash \phi \wedge \psi$ ako i samo ako $w \vDash \phi$ i $w \vDash \psi$;

$w \vDash \phi \vee \psi$ ako i samo ako $w \vDash \phi$ ili $w \vDash \psi$;

$w \vDash \phi \Rightarrow \psi$ ako i samo ako za svako w' takvo da wRw', ako važi $w' \vDash \phi$ tada važi $w' \vDash \psi$;

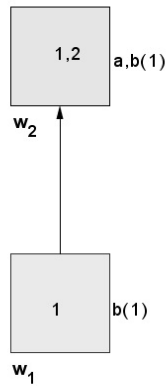
$w \vDash \neg\phi$ ako i samo ako za svako w' takvo da je wRw' važi $w' \nvDash \phi$;

$w \vDash (\exists x)\phi$ ako i samo ako za neko $d \in D_w$ važi $w \vDash \phi[d/x]$;

$w \vDash (\forall x)\phi$ ako i samo ako za sve $w' \in W$ takve da wRw' i sve $d \in D_{w'}$ važi $w' \vDash \phi[d/x]$.

Primijetimo da je za formule koje sadrže samo iskazne veznike relacija zadovoljivosti definisana analogno kao za iskaznu logiku.

Ako važi $w \vDash \phi$, kažemo da je formula ϕ *tačna u svijetu* w modela $\mathcal{M}$, pišemo još i $V(w, \phi) = \top$. Za skup formula S važi $w \vDash S$ ako i samo za svaku formulu $\phi \in S$ važi $w \vDash \phi$. Ukoliko je formula tačna u svakom svijetu $w \in W$ modela $\mathcal{M} = \langle W,\ R,\ D,\ V \rangle$, kažemo da je formula *tačna u modelu* $\mathcal{M}$. Formulu koja je tačna u svakom modelu nazivamo *valjanom formulom.*



Slika 2.3: Primjer 2.2.5

2.2.5. Primjer Posmatrajmo model $\mathcal{M} = \langle W, R, D, V \rangle$, dat na slici 2.3, gdje je $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$, $D_{w_1} = \{1\}$, $D_{w_2} = \{1, 2\}$ i važi $w_1 \vDash b(1)$, $w_1 \nvDash a$, $w_2 \vDash a$ i $w_2 \vDash b(1)$. Pokazaćemo da formula $(\forall x)(a \vee b(x)) \Rightarrow (a \vee (\forall x)b(x))$ nije tačna u ovom modelu.

Iz primjera imamo da važi $w_1 \vDash b(1)$, te važi i $w_1 \vDash a \vee b(1)$. Zatim na osnovu pretpostavki $w_2 \vDash a$ i $w_2 \vDash b(1)$ i definicije za zadovoljivost disjunkcije (2.2.4) možemo zaključiti $w_2 \vDash a \vee b(1)$ i $w_2 \vDash a \vee b(2)$. Sada imamo da za svako w' takvo da $w_1 R w'$ i svako $d \in D_{w'}$ važi $w' \vDash a \vee b(d)$, te zaključujemo na osnovu definicije relacije zadovoljivosti u slučaju univerzalnog kvantifikatora (2.2.4) $w_1 \vDash (\forall x)(a \vee b(x))$. Kako imamo da $w_2 \nvDash b(2)$, možemo zaključiti $w_1 \nvDash (\forall x)b(x)$ i iz postavke primjera imamo $w_1 \nvDash a$, te na osnovu definicije 2.2.4 zaključujemo $w_1 \nvDash a \vee (\forall x)b(x)$. Odatle slijedi $w_1 \nvDash (\forall x)(a \vee b(x)) \Rightarrow (a \vee (\forall x)b(x))$. Dakle, posmatrana formula nije tačna u svijetu w_1, pa nije tačna u posmatranom modelu, te samim tim nije ni valjana.

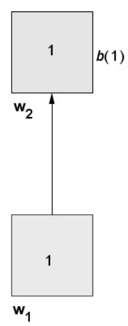
2.2.6. Teorema *Ako važi wRw' tada iz $w \vDash \phi$ slijedi $w' \vDash \phi$.*

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ. Slučajevi kada je formula dobijena od potformula primjenom iskaznih veznika su analogni kao u teoremi 2.1.5, te ih ovdje nećemo ispisivati ponovo, nego posmatramo sljedeće slučajeve:

- Ako je formula oblika $\phi = (\exists x)\psi$, formula ψ je manje složenosti, te za nju važi indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da važi $w \vDash \phi$, tj. $w \vDash (\exists x)\psi$ i wRw'. Iz definicije relacije zadovoljivosti zaključujemo da postoji $d \in D_w$ tako da važi $w \vDash \psi[d/x]$, ali kako iz wRw' slijedi $D_w \subseteq D_{w'}$, imamo da onda $d \in D_w \subseteq D_{w'}$, tj. $d \in D_{w'}$. Kako za formulu ψ važi indukcijska hipoteza, važi $w' \vDash \psi[d/x]$ te važi i $w' \vDash (\exists x)\psi$, odnosno $w' \vDash \phi$.

- Neka je $\phi = (\forall x)\psi$, opet je formula ψ manje složenosti, te za nju važi indukcijska hipoteza, odnosno važi dato tvrđenje. Pretpostavimo da važi $w \vDash \phi$, tj. $w \vDash (\forall x)\psi$ i wRw'. Treba da pokažemo $w' \vDash \phi$. Uzmimo proizvoljno w'' takvo da $w'Rw''$ i proizvoljno $d \in D_{w''}$. Sada zbog tranzitivnosti relacije R važi wRw''. Kako je $w \vDash (\forall x)\psi$, na osnovu definicije 2.2.4 slijedi da važi $w'' \vDash \psi[d/x]$. Kako smo w'' i d birali proizvoljno, važi za sve elemente sa tim osobinama, te možemo zaključiti da važi $w' \vDash (\forall x)\psi$, odnosno $w' \vDash \phi$.

Time smo pokazali da za relaciju zadovoljivosti $\vDash$ važi monotonost u odnosu na relaciju R. $\square$



Slika 2.4: Primjer 2.2.7

2.2.7. Primjer Posmatrajmo model $\mathcal{M} = \langle W, R, D, V \rangle$, dat na slici 2.4, gdje je $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_1),\ (w_1, w_2),\ (w_2, w_2)\}$, $D_{w_1} = D_{w_2} = \{1\}$, i za atomičku formulu $b(1)$, važi $w_2 \vDash b(1)$ i $w_1 \nvDash b(1)$. Pokazaćemo da u ovom modelu formula $\neg(\exists x)\neg b(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$ nije tačna. Kako $w_1 \nvDash b(1)$, $1 \in D_{w_1}$ i $w_1 R w_1$, na osnovu definicije 2.2.4 zaključujemo $w_1 \nvDash (\forall x)b(x)$. Iz postavke imamo da važi $w_2 \vDash b(1)$, te zaključujemo da onda $w_2 \nvDash \neg b(1)$, a kako je 1 jedini elemenat skupa D_{w_2}, na osnovu definicije 2.2.4 zaključujemo $w_2 \nvDash (\exists x)\neg b(x)$. Sada, kako je $w_1 R w_2$ mora da važi $w_1 \nvDash (\exists x)\neg b(x)$, jer bi u suprotnom na osnovu teoreme 2.2.6 važilo $w_2 \vDash (\exists x)\neg b(x)$, što je u kontradikciji sa pokazanim. Kako je za svako $w' \in W$ takvo da je $w_1 R w'$ (takvi elementi iz W su w_1 i w_2) važi $w' \nvDash (\exists x)\neg b(x)$, na osnovu definicije relacije $\vDash$ (2.2.4) zaključujemo $w_1 \vDash \neg(\exists x)\neg b(x)$. Ako uzmemo u obzir prethodno pokazano $w_1 \nvDash (\forall x)b(x)$, možemo zaključiti $w_1 \nvDash \neg(\exists x)\neg b(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$. Dakle, posmatrana formula $\neg(\exists x)\neg b(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$ nije tačna u svijetu w_1, pa nije tačna u datom modelu $\mathcal{M}$, te nije ni valjana.

Teorema potpunosti

Prilikom predstavljanja teoreme potpunosti sa dokazom za Kripkeove modele u intuicionističkoj predikatskoj logici koristili smo literaturu [18, 23] . Najprije dajemo definiciju pojmova, te formulacije i dokaze lema koje ćemo koristiti da bismo dokazali potpunost.

Za skup formula Γ i formulu ϕ, semantičku posljedicu definišemo analogno kao u definiciji 2.1.6. Za zamjenu σ (zamjena slobodnih pojavljivanja promjenljive nekim termom) i formulu ϕ, formulu koja se dobija primjenom navedene zamjene na formulu označavaćemo sa $\phi\sigma$.

2.2.8. Teorema *Iz* $\Gamma \vdash \phi$ *slijedi* $\Gamma \vDash \phi$.

Dokaz. Ova lema je analogna lemi 2.1.7 u iskaznoj logici. Dakle, mi hoćemo da pokažemo da pravila izvođenja u sistemu prirodne dedukcije očuvavaju zadovoljivost, tj. ako je $\Gamma \vdash \phi$ i ako je u proizvoljnom Kripkeovom modelu $\mathcal{M}$ i proizvoljnom svijetu w iz tog modela tačna svaka formula iz skupa Γ onda je u tom svijetu tačna i formula ϕ. Dokazuje se indukcijom po dužini izvođenja $\Gamma \vdash \phi$, pri čemu posmatramo poslednji korak u izvođenju i pretpostavljamo da tvrđenje važi za sva izvođenja sa manje koraka od posmatranog. Kako smo u lemi 2.1.11 pokazali da sva pravila uvođenja i eliminacije logičkih veznika očuvavaju zadovoljivost, ostaje nam ovdje da pokažemo za pravila koja sadrže kvantifikatore.

- Pretpostavimo da je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\psi[t/x]}{(\exists x)\psi}$, ovdje je $\phi = (\exists x)\psi$. Uzmimo proizvoljan Kripkeov model $\mathcal{M} = \langle W, R, D, V\rangle$, proizvoljan svijet w i proizvoljnu zamjenu $\sigma \equiv [d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]$, gdje su $d_1, \ldots, d_n$ elementi skupa D_w, a $x_1, \ldots, x_n$ slobodne promjenljive u formuli $(\exists x)\psi$ iz zaključka. Proširimo tu zamjenu σ sa zamjenom σ' gdje ćemo sve promjenljive $y \in FV(t)$ (promjenljive slobodne u termu t) koje nisu slobodne u zaključku zamijeniti sa proizvoljnim elementima iz D_w. Pretpostavimo da je premisa tačna u svijetu w, tj. $w \vDash \psi[t/x]$, tada kada u formuli ψ slobodne promjenljive zamijenimo prozivoljnim elementima iz D_w dobijamo tačnu rečenicu, te je formula tačna i za navedenu zamjenu σ'. Dakle imamo $w \vDash_{\sigma'} \psi[t/x]$, tj. $V(w, \psi[t/x]\sigma') = \top$ pa je onda $V(w, \psi[V(w, t\sigma')/x]\sigma) = \top$. Element $d = V(w, t\sigma')$ je element iz D_w takav da važi $V(w, \psi[d/x]\sigma) = \top$ pa zaključujemo da je $w \vDash_\sigma (\exists x)\psi$ za proizvoljnu zamjenu σ, tj. $w \vDash (\exists x)\psi$.

- Neka je sada poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\psi}{(\forall x)\psi}$, pri čemu x nije slobodna promjenljiva u ψ, tada je $\phi = (\forall x)\psi$. Uzmimo proizvoljan Kripkeov model $\mathcal{M} = \langle W, R, D, V\rangle$ i proizvoljan svijet w iz tog modela. Pretpostavimo da je formula ψ tačna u svijetu w, tj. $w \vDash \psi$. Tada svakom zamjenom slobodnih promjenljvih u ψ elementima iz D_w dobijamo tačnu rečenicu. Dalje, ako je $w \vDash \psi$ i wRw' zbog monotonosti relacije zadovoljvosti $\vDash$ u odnosu na relaciju R, važi i $w' \vDash \psi$. Posmatrajmo sada formulu $\phi = (\forall x)\psi$, ona će biti tačna u svijetu w, tj. važiće $w \vDash (\forall x)\psi$ ako i samo ako za svako w' takvo da je wRw' i svako $d \in D_{w'}$ važi $w' \vDash \psi[d/x]$, a to zaista važi na osnovu prethodnog zaključka, jer x nije slobodna promjenljva u ψ pa je $\psi[d/x] = \psi$.

- Posmatrajmo slučaj kada je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{(\forall x)\psi}{\psi[t/x]}$, tada je $\phi = \psi[t/x]$. Uzmimo proizvoljan Kripkeov model $\mathcal{M} = \langle W, R, D, V\rangle$ i proizvoljan svijet w iz tog modela. Pretpostavimo da je $w \vDash (\forall x)\psi$, na osnovu definicije 2.2.4 to znači da za svako $w' \in W$ takvo da wRw' i svako $d \in D_{w'}$ važi $w \vDash \psi[d/x]$, kako je relacija R refleksivna važi wRw te na osnovu navedenog imamo da za svako $d \in D_w$ važi $w \vDash \psi[d/x]$. Za formulu $\psi[t/x]$ važi $w \vDash \psi[t/x]$ ako i samo ako za svaku zamjenu (supstituciju) $\sigma \equiv [d_1/y_1, \ldots, d_n/y_n]$, gdje su $y_1, \ldots, y_n$ slobodne promjenljve u $\psi[t/x]$ i $d_1, \ldots, d_n \in D_w$ važi $w \vDash \psi[t/x]\sigma$, a to je tačno jer smo zaključili da za svako $d \in D_w$ važi $w \vDash \psi[d/x]$.

- Pretpostavimo da je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{(\exists x)\varphi \quad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi}$, pri čemu x nije slobodna promjenljiva u ψ, ovdje je $\phi = \psi$. Uzmimo proizvoljan Kripkeov model $\mathcal{M} = \langle W, R, D, V\rangle$ i proizvoljan svijet w iz tog modela. Pretpostavimo da važi $w \vDash (\exists x)\varphi$ i izvođenje $\varphi \vdash \psi$ je kraće dužine nego posmatrano, pa za njega važi tvrđenje, na osnovu indukcijske hipoteze. Iz $w \vDash (\exists x)\varphi$ zaključujemo na osnovu definicije 2.2.4 da postoji $d \in D_w$ tako da važi $w \vDash \varphi[d/x]$. Sada iz pretpostavke $\varphi \vdash \psi$ i indukcijske hipoteze slijedi $w \vDash \psi[d/x]$, a kako x nije slobodna promjenljva u formuli ψ, to znači $w \vDash \psi$.

Time je dokazana teorema saglasnosti. $\square$

Sljedeće definicije preuzete su iz [23].

2.2.9. Definicija *Neka su Γ i Δ skupovi rečenica (dobro zasnovanih formula) jezika $\mathcal{L}$. Uređeni par (Γ, Δ) je konzistentan ako i samo ako ne postoje konačni podskupovi $\Gamma_0 \subset \Gamma$ i $\Delta_0 \subset \Delta$ takvi da je $\vdash \bigwedge \Gamma_0 \Rightarrow \bigvee \Delta_0$, uzima se da je $\bigwedge \emptyset = \top$ i $\bigvee \emptyset = \bot$. Skup Γ je konzistentan ako i samo ako je uređeni par $(\Gamma, \emptyset)$ konzistentan.*

Sa $\bigwedge \Gamma$ označavamo konjunkciju svih formula iz skupa Γ, a sa $\bigvee \Delta$ disjunkciju svih formula iz skupa Δ.

2.2.10. Definicija *Neka je C skup konstanti. Skup rečenica (dobro zasnovanih formula) Γ jezika $\mathcal{L}$ je C-zasićen ako i samo ako važi:*

1. *Γ je konzistentan;*
2. *$\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \phi \in \Gamma$;*
3. *$\Gamma \vdash \phi \vee \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi$ ili $\Gamma \vdash \psi$;*
4. *$\Gamma \vdash (\exists x)\phi(x) \Rightarrow \phi(c) \in \Gamma$, za neko $c \in C$.*

Sljedeća lema kaže da za svaki konzistentan skup Γ jezika $\mathcal{L}$ i skup konstanti C postoji njegov nadskup, koji je C-zasićen.

2.2.11. Lema *Neka su skup Γ i formula ϕ iz jezika $\mathcal{L}$, takvi da $\Gamma \nvdash \phi$, $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ prebrojiv skup konstanti koji nije u jeziku $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{L}(C)$ jezik $\mathcal{L}$ proširen skupom C. Postoji C-zasićen skup Γ^ω, takav da $\Gamma \subset \Gamma^\omega$ i $\Gamma^\omega \nvdash \phi$.*

Dokaz. Za Γ^ω uzimamo $\bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\ \}$; $\Gamma_0 = \Gamma$. Skup $\Gamma^k \setminus \Gamma_0$ je konačan. Skup Γ^k definiše se induktivno. Označimo sa $g(n)$, prvi parametar i takav da se c_i ne pojavljuje u $\Gamma^n \setminus \Gamma$ i numerišimo sve disjunktivne i egzistencijalne formule u jeziku $\mathcal{L}(C)$ sa beskonačnim ponavljanjem $\langle \chi_{i,1} \vee \chi_{i,2} \rangle_i$ i $\langle (\exists x)\psi_i(x) \rangle_i$. Pretpostavimo da je Γ^k definisan.

- Ako je $k = 2n$ i $\Gamma^k \vdash (\exists x)\psi_n(x)$, definišemo
$$\Gamma^{k+1} = \Gamma^{2n+1} := \Gamma^k \cup \{\psi_n(c_{g(k)})\};$$
- Ako je $k = 2n+1$ i $\Gamma^k \vdash \chi_{n,1} \vee \chi_{n,2}$, tada definišemo
$$\Gamma^{k+1} = \Gamma^{2n+2} := \Gamma^k \cup \{\chi_{n,i}\},$$
gdje je i najmanji element skupa $\{1, 2\}$ takav da $\Gamma^{k+1} \cup \{\chi_{n,i}\} \nvdash \phi$;
- Ako ni prvi ni drugi slučaj ne važe, definišemo
$$\Gamma^{k+1} = \Gamma^k.$$

Sada treba pokazati da je Γ^ω zasićen i $\Gamma^\omega \nvdash \phi$. Pokažimo prvo da $\Gamma^\omega \nvdash \phi$. Iz konstrukcije skupova Γ^k vidi se da $\phi \notin \Gamma^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, jer $\phi \notin \Gamma_0$, a svaki skup Γ^k konstruišemo ili dodavanjem formule χ takve $\Gamma^{k-1} \cup \{\chi\} \nvdash \phi$, te formula χ ne može biti ϕ ili dodavanjem formule $\psi(c) \in \mathcal{L}(c)$, za $c \notin \mathcal{L}$, pa ni takva formula ne može biti $\phi \in \mathcal{L}$. Pretpostavimo sada suprotno, tj. $\Gamma^\omega \vdash \phi$. Tada postoji niz formula $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \in \Gamma^\omega$, koji predstavljaju dokaz za ϕ, te važi $\phi = \psi_n$. Kako je $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \in \Gamma^\omega = \bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\}$, za svaku formulu ψ_i, postoji Γ^{j_i} tako da $\psi_i \in \Gamma^{j_i}$. Uzmimo sada $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, kako su skupovi konstruisani tako da $\Gamma^k \subseteq \Gamma^{k+1}$ važi $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \in \Gamma^m$. Sada, kako znamo da je $\phi = \psi_n$, imamo $\phi \in \Gamma^m$, što je kontradikcija sa prethodno izvedenim zaključkom da $\phi \notin \Gamma^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokažimo sada da je Γ^ω zasićen skup. Treba pokazati da važe četiri osobine iz definicije 2.2.10.

1. Pokažimo da je Γ^ω konzistentan. Pretpostavimo suprotno, da nije konzistentan, tada na osnovu definicije konzistentnog skupa 2.2.9 imamo da postoji konačan skup $\Gamma_0 = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ takav da važi $\vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n \Rightarrow \bot$, što je na osnovu pravila izvodjenja u sistemu prirodne dedukcije ekvivalentno sa $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n \vdash \bot$. Kako iz $\bot$ možemo

izvesti bilo koju formulu zaključujemo da važi $\perp \vdash \phi$, što zajedno sa prethodnim zaključkom daje $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n \vdash \phi$, tj. $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \phi$, a kako je $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma^\omega$ dobijamo da važi $\Gamma^\omega \vdash \phi$, što je kontradikcija sa prethodno pokazanim $\Gamma^\omega \nvdash \phi$.

2. Pokažimo sada da za proizvoljnu formulu ψ važi $\Gamma^\omega \vdash \psi \Rightarrow \psi \in \Gamma^\omega$. Pretpostavimo da važi $\Gamma^\omega \vdash \psi$, tada postoji niz formula $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^\omega$ takvih da je dati niz dokaz za formulu ψ ($\psi = \chi_n$). Sada, kako $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^\omega = \bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\}$ zaključujemo da za svako χ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ postoji Γ^{j_i} tako da $\chi_i \in \Gamma^{j_i}$. Uzmimo $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, tada $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^m$, tj.
$$\psi = \chi_n \in \Gamma^m \subseteq \bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\} = \Gamma^\omega,$$
time smo pokazali da $\psi \in \Gamma^\omega$.

3. Pokažimo sada da za proizvoljne formule ψ_1, ψ_2 važi $\Gamma^\omega \vdash \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \Gamma^\omega \vdash \psi_1$ ili $\Gamma^\omega \vdash \psi_2$. Pretpostavimo da važi $\Gamma^\omega \vdash \psi_1 \vee \psi_2$. Tada, postoji niz $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^\omega$ koji predstavlja dokaz za formulu $\psi_1 \vee \psi_2$, te je $\chi_n = \psi_1 \vee \psi_2$. Kako $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^\omega = \bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\}$ za svako χ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, postoji Γ^{j_i}, tako da $\chi_i \in \Gamma^{j_i}$. Uzmimo sada $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ ili $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} + 1$ tako da m bude neparno. Tada $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^m$, tj. $\psi_1 \vee \psi_2 = \chi_n \in \Gamma^m$, te $\Gamma^m \vdash \psi_1 \vee \psi_2$. Ako bi važilo $\Gamma^m \cup \{\psi_1\} \vdash \phi$ i $\Gamma^m \cup \{\psi_2\} \vdash \phi$, na osnovu pravila izvođenja u sistemu prirodne dedukcije dobili bi $\Gamma^m \cup \{\psi_1 \vee \psi_2\} \vdash \phi$. Kako je $\psi_1 \vee \psi_2 \in \Gamma^m$ to bi onda značilo da $\Gamma^m \vdash \phi$, odakle bi slijedilo $\Gamma^\omega \vdash \phi$, a to je kontradikcija sa prethodno pokazanim. Dakle, pretpostavka je pogrešna, te važi $\Gamma^m \cup \{\psi_1\} \nvdash \phi$ ili $\Gamma^m \cup \{\psi_2\} \nvdash \phi$. Na osnovu konstrukcije imamo da važi $\Gamma^{m+1} = \Gamma^m \cup \{\psi_1\}$ ili $\Gamma^{m+1} = \Gamma^m \cup \{\psi_2\}$, tada $\psi_1 \in \Gamma^{m+1}$ ili $\psi_2 \in \Gamma^{m+1}$. Kako je $\Gamma^{m+1} \subseteq \Gamma^\omega$ dobijamo $\psi_1 \in \Gamma^\omega$ ili $\psi_2 \in \Gamma^\omega$, odakle slijedi $\Gamma^\omega \vdash \psi_1$ ili $\Gamma^\omega \vdash \psi_2$, što je i trebalo dokazati.

4. Pokažimo da važi $\Gamma^\omega \vdash (\exists x)\psi(x) \Rightarrow \psi(c) \in \Gamma^\omega$, za neko $c \in C$. Pretpostavimo da važi $\Gamma^\omega \vdash (\exists x)\psi(x)$. Tada postoji niz formula $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^\omega$, koji je dokaz za formulu $(\exists x)\psi(x)$, te važi $\chi_n = (\exists x)\psi(x)$. Kako $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^\omega = \bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\}$, za svako χ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji Γ^{j_i} tako da $\chi_i \in \Gamma^{j_i}$. Uzmimo $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ ili $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} + 1$ tako da m bude parno, tada $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \Gamma^m$, odnosno $(\exists x)\psi(x) = \chi_n \in \Gamma^m$ te važi $\Gamma^m \vdash (\exists x)\psi(x)$. Sada, po konstrukciji skupova $\Gamma^k, k \in \mathbb{N}$, imamo da je $\Gamma^{m+1} = \Gamma^m \cup \{\psi(c)\}$ za neko $c \in C$, te važi $\psi(c) \in \Gamma^{m+1} \subseteq \bigcup\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\} = \Gamma^\omega$, za neko $c \in C$, što je trebalo dokazati.

□

Sada ćemo slično kao u iskaznoj logici dati definiciju posebne klase Kripkeovih modela, kanoničkih modela, koja je preuzeta iz [23].

2.2.12. Definicija *Neka je $C_0, C_1, C_2, \ldots$ prebrojiv niz disjunktnih prebrojivih skupova konstanti, koji nisu u jeziku $\mathcal{L}$, označimo sa C_n^* uniju $C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$. Neka je Γ_0 skup rečenica u jeziku $\mathcal{L}$. Tada definišemo kanonički Kripkeov model $\mathcal{K} = \langle K, \subset, D, \vDash \rangle$ tako da:*

1. *K se sastoji iz svih skupova Γ takvih da $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L} \cup C_n^*$ i Γ je C_n^*-zasićen za neko n;*
2. *ako je Γ C_n^*-zasićen i $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L} \cup C_n^*$ tada je $D(\Gamma) = C_n^*$;*
3. *za atomičku formulu $a \in \mathcal{L}(D(\Gamma))$ važi $\Gamma \vDash a$ ako i samo ako $a \in \Gamma$.*

2.2.13. Lema *U kanoničkom modelu $\mathcal{K}$, za svako $\Gamma \in K$ i svaku formulu $\phi \in \mathcal{L}(D(\Gamma))$ važi*

$$\Gamma \vDash \phi \text{ ako i samo ako } \phi \in \Gamma.$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ovaj smjer je trivijalan za svaku formulu ϕ. Neka formula ϕ pripada skupu Γ ($\phi \in \Gamma$), pretpostavimo da je $\mathcal{K}$ proizvoljan kanonički Kripkeov model, koji je model skupa Γ, tj. svaka formula iz Γ je tačna u tom modelu, pa je i formula ϕ tačna u tom modelu. Dakle, svaki model skupa Γ je i model formule ϕ, te važi $\Gamma \vDash \phi$.

($\Rightarrow$) Ovaj smjer dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ.

- Ako je $\phi = a$ atomička formula, tvrđenje važi po definiciji kanoničkog modela 2.2.12.

- Pretpostavimo da je $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$ i da važi $\Gamma \vDash \phi$ tj. $\Gamma \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$, tada važi $\Gamma \vDash \psi_1$ i $\Gamma \vDash \psi_2$, na osnovu indukcijske hipoteze svaka formula manje složenosti od formule ϕ zadovoljava tvrđenje, a formule ψ_1 i ψ_2 su manje složenosti, te važi $\psi_1 \in \Gamma$ i $\psi_2 \in \Gamma$. Odatle važi i $\Gamma \vdash \psi_1$ i $\Gamma \vdash \psi_2$, jer iz skupa formula se može izvesti svaka formula, koja pripada tom skupu. Na osnovu pravila izvođenja u sistemu prirodne dedukcije možemo da zaključimo da $\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$, te na osnovu definicije 2.2.10 slijedi da važi $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma$.

- Neka je $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$ i pretpostavimo da važi $\Gamma \vDash \phi$ tj. $\Gamma \vDash \psi_1 \vee \psi_2$. Na osnovu definicije relacije zadovoljivosti zaključujemo da važi $\Gamma \vDash \psi_1$ ili $\Gamma \vDash \psi_2$. Formule ψ_1 i ψ_2 su manje složenosti od formule ϕ, a kako na osnovu indukcijske hipoteze svaka formula manje složenosti zadovoljava tvrđenje, zaključujemo da važi $\psi_1 \in \Gamma$ ili $\psi_2 \in \Gamma$. Dalje, važi i $\Gamma \vdash \psi_1$ ili $\Gamma \vdash \psi_2$, jer se svaka formula koja pripada nekom skupu, može izvesti iz tog skupa. Sada na osnovu izvođenja u sistemu prirodne dedukcije, zaključujemo da važi $\Gamma \vdash \psi_1 \vee \psi_2$. Na osnovu definicije 2.2.10 dobijamo da važi $\psi_1 \vee \psi_2 \in \Gamma$.

- Posmatrajmo slučaj kada je formula ϕ oblika $\psi \Rightarrow \chi$ i kada važi $\Gamma \vDash \phi$, tj. $\Gamma \vDash \psi \Rightarrow \chi$. Sada, za svaki zasićen skup $\Gamma' \supset \Gamma$ važi $\Gamma' \vDash \psi \Rightarrow \Gamma' \vDash \chi$. Pretpostavimo da važi $\Gamma \nvdash \psi \Rightarrow \chi$, tada $\Gamma \cup \{\psi\} \nvdash \chi$, te na osnovu leme 2.2.11 postoji zasićen skup $\Gamma' \supset \Gamma \cup \{\psi\}$, takav da $\Gamma' \nvdash \chi$. Tada, važi $\Gamma' \vDash \psi$, ali na osnovu indukcijske hipoteze važi $\Gamma' \nvDash \chi$, što nas dovodi do kontradicije sa pretpostavkom $\Gamma \vDash \psi \Rightarrow \chi$, dakle pretpostavka $\Gamma \nvdash \psi \Rightarrow \chi$ je pogrešna, te važi $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \chi$ i na osnovu 2.2.12 zaključujemo $\psi \Rightarrow \chi \in \Gamma$.

- Pretpostavimo da je $\phi = (\exists x)\psi(x)$ i $\Gamma \vDash \phi$, tj. $\Gamma \vDash (\exists x)\psi(x)$, tada na osnovu definicije 2.2.4, važi $\Gamma \vDash \psi(c)$ za neko $c \in D(\Gamma)$. Na osnovu indukcijske hipoteze imamo da $\psi(c) \in \Gamma$ za neko $c \in D(\Gamma)$, a to je na osnovu osobina zasićenog skupa ekvivalentno sa $(\exists x)\psi(x) \in \Gamma$.

- Neka je $\phi = (\forall x)\psi(x)$. Pretpostavimo da važi $\Gamma \vDash \phi$, odnosno $\Gamma \vDash (\forall x)\psi(x)$. Dakle, za svako $\Gamma' \supset \Gamma$ i svako $c \in D(\Gamma)$ važi $\Gamma' \vDash \psi(c)$. Pretpostavimo sada da je $\Gamma \nvdash (\forall x)\psi(x)$ i Γ C_n^*-zasićen. Sada za svako $c \in C_{n+1}$, važi $\Gamma \nvdash \psi(c)$, te na osnovu leme 2.2.11 postoji C_{n+1}^*-zasićen skup $\Gamma' \supset \Gamma$, takav da $\Gamma' \nvdash \psi(c)$, te važi $\psi(c) \notin \Gamma'$. Na osnovu indukcijske hipoteze, imamo da važi $\Gamma' \nvDash \psi(c)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $\Gamma \vDash (\forall x)\psi(x)$. Pretpostavka $\Gamma \nvdash (\forall x)\psi(x)$ nas je dovela do kontradikcije, te je pogrešna. Dakle, imamo da važi $\Gamma \vdash (\forall x)\psi(x)$ i na osnovu definicije 2.2.10 slijedi da važi $(\forall x)\psi(x) \in \Gamma$.

Time smo pokazali naše tvrđenje. □

2.2.14. Teorema *Iz* $\Gamma \vDash \phi$ *slijedi* $\Gamma \vdash \phi$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $\Gamma \vDash \phi$ i $\Gamma \nvdash \phi$. Na osnovu leme 2.2.11 postoji zasićen skup Γ_0 takav da $\Gamma \subset \Gamma_0$ i $\phi \notin \Gamma$. Sada na osnovu leme 2.2.13 važi $\Gamma_0 \nvDash \phi$. Skup Γ predstavlja svijet kanoničkog modela $\mathcal{K}$. Kako je $\Gamma \subset \Gamma_0$, svaka formula ψ iz skupa Γ je u skupu Γ_0, te na osnovu leme 2.2.13 slijedi $\Gamma_0 \vDash \psi$. Dalje, kako je svaka formula iz Γ tačna u svijetu Γ_0 modela $\mathcal{K}$, a formula ϕ nije tačna u svijetu Γ_0 ($\Gamma_0 \nvDash \phi$), zaključujemo da važi $\Gamma \nvDash \phi$. Ako bi važilo $\Gamma \vDash \phi$ onda je svaki model skupa Γ i model za formulu ϕ, a svijet Γ_0 ne zadovoljava to svojstvo, pa zaključujemo da važi $\Gamma \nvDash \phi$, što je u kontradikciji pretpostavkom $\Gamma \vDash \phi$. Dakle, naša pretpostavka $\Gamma \nvdash \phi$ je pogrešna, jer nas je dovela do kontradikcije, te važi $\Gamma \vdash \phi$, što je trebalo dokazati. □

2.2.15. Teorema $\Gamma \vDash \phi$ *ako i samo ako* $\Gamma \vdash \phi$.

Dokaz. Na osnovu 2.2.8 i 2.2.14. □

2.3 Kripkeove semantike za modalnu logiku

U ovom dijelu ćemo dati kratak uvod u Kripkeove semantike za intuicionističku modalnu logiku, navodeći neke njihove osobine. Modalna logika koju ovdje posmatramo, je modalna iskazna logika, odnosno iskazna logika proširena modalnim operatorima.

Za definisanje Kripkeovih modela u intuicionističkoj modalnoj logici koristili smo [21].

2.3.1. Definicija *Kripkeov okvir za intuicionističku modalnu logiku je uređena trojka* $\langle W,\ \leq,\ R\rangle$*, gdje je* W *neprazan skup svjetova,* $\leq$ *refleksivna i tranzitivna relacija na skupu* W *i* R *binarna relacija na skupu* W*, relacija dostižnosti svjetova.*

Možemo primijetiti da u iskaznoj i predikatskoj logici, u Kripkeovom okviru figuriše samo jedna relacija na skupu W, dok su ovdje neophodne dvije. Može se pretpostaviti da će ove dvije relacije biti povezane i ta njihova povezanost je iskazana sa sljedeće dvije osobine, koje će važiti u Kripkeovom okviru za intuicionističku modalnu logiku (sistem **IK**):

1. Ako je $w \leq w'$ i wRv tada postoji v' tako da je $w'Rv'$ i $v \leq v'$.

2. Ako je $v \leq v'$ i wRv tada postoji w' tako da je $w'Rv'$ i $w \leq w'$.

Ovdje je relacija R definisana kao binarna relacija, bez dodatnih osobina. Ako se prisjetimo, kad smo definisali sisteme modalne logike, osnovni sistem **IK** smo predstavili sistemom prirodne dedukcije, gdje je relacija dostižnosti R bila proizvoljna binarna relacija, bez dodatnih osobina. Ukoliko je relacija imala određene osobine, dobijali smo sisteme modalne logike jače od **IK**. Ukoliko je relacija R bila refleksivna dobijali smo sistem **IT**, za refleksivnu i tranzitivnu relaciju smo dobijali sistem **IS4**, a za refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju R dobijali smo sistem **IS5**. Na sličan način se definišu i Kripkeovi modeli. Definiše se Kripkeov model za osnovni sistem intuicionističke modalne logike **IK**, a zatim dodavanjem navedenih osobina relaciji dostižnosti svjetova R i još nekih osobina koje povezuju relaciju R i relaciju $\leq$, dobijaju se Kripkeovi modeli za sisteme intuiocionističke modalne logike **IT**, **IS4** i **IS5**.

2.3.2. Definicija *Kripkeov model za intuicionističku modalnu logiku (**IK**) je uređena četvorka* $\mathcal{M} = \langle W,\ \leq,\ R,\ V\rangle$*, gdje je* $\langle W,\ \leq,\ R\rangle$ *Kripkeov okvir za intuicionističku modalnu logiku (**IK**), a* V *funkcija* $V : W \times Var \to \{\top, \bot\}$*, koja svakom svijetu i iskazu dodjeljuje vrijednost iz skupa* $\{\top, \bot\}$ *i ima sljedeću osobinu:*

$$\textit{Ako je } V(w,p) = \top \textit{ i } w \leq w' \textit{ tada važi } V(w',p) = \top.$$

Sa $V(w,p) = \top$ označavamo da je iskaz p tačan u svijetu w, odnosno sa $V(w,p) = \bot$ da iskaz p nije tačan u svijetu w. Sada ćemo dati definiciju relacije zadovoljivosti $\vDash$ na skupu $W \times Form$, gdje je $Form$ skup svih formula modalne logike. Ako je formula A tačna u svijetu w, tj. ako je $V(w,A) = \top$ pisaćemo $w \vDash A$.

2.3.3. Definicija *Relacija zadovoljivosti* $\vDash$ *definiše se indukcijom po složenosti formule:*

$w \vDash p$ *ako i samo ako je* $V(w,p) = \top$;

$w \nvDash \bot$;

$w \vDash A \wedge B$ *ako i samo ako* $w \vDash A$ *i* $w \vDash B$;

$w \vDash A \vee B$ *ako i samo ako* $w \vDash A$ *ili* $w \vDash B$;

$w \vDash A \Rightarrow B$ *ako i samo ako za svako* w' *takvo da* wRw', *ako važi* $w' \vDash A$ *tada važi* $w' \vDash B$;

$w \vDash \Diamond A$ *ako samo ako postoji* $w' \in W$ *takvo da* wRw' *važi* $w' \vDash A$;

$w \vDash \Box A$ *ako i samo ako za svako* $w' \in W$ *takvo da* $w \leq w'$ *i svako* $u \in W$ *ako je* $w'Ru$ *tada važi* $u \vDash A$.

Kao što smo već ranije naveli, ovako definisan Kripkeov model je model za osnovni sistem intuicionističke modalne logike **IK**.

Ako je formula A tačna u svakom svijetu modela $\mathcal{M}$ onda je $\mathcal{M}$ model za formulu A i pišemo $\mathcal{M} \vDash A$. Ako postoji model u kome je formula tačna onda je ona zadovoljiva. Formula koja je tačna u svakom modelu je valjana.

I u intuicionističkoj modalnoj logici, kao i u iskaznoj i predikatskoj relacija zadovoljivosti je monotona u odnosu na relaciju $\leq$ o čemu govori sljedeća lema.

2.3.4. Lema *Ako važi* $w \vDash A$ *i* $w \leq w'$ *tada važi i* $w' \vDash A$.

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Slučajevi kada je formula dobijena od formula manje složenosti pomoću logičkih veznika se pokazuju analogno kao u potpoglavlju 2.1 u lemi 2.1.5. Tako da ovdje razmatramo samo slučajeve sa modalnim operatorima.

- Neka je $A = \Diamond B$. Pretpostavimo da $w \vDash \Diamond B$ i $w \leq w'$. Na osnovu definicije 2.3.3 iz $w \vDash \Diamond B$ slijedi da postoji $v \in W$ takvo da wRv i $v \vDash B$. Kako imamo da važi $w \leq w'$ i wRv, na osnovu prve osobine koja povezuje ove dvije relacije možemo zaključiti da postoji v' tako da $w'Rv'$ i $v \leq v'$. Dalje, kako je $v \vDash B$ i $v \leq v'$ na osnovu indukcijske hipoteze tvrđenje važi za svaku formulu manje složenosti od formule A, pa važi za formulu B, odnosno možemo zaključiti $v' \vDash B$. Ako uzmemo u obzir da važi $w'Rv'$ na osnovu definicije 2.3.3 imamo da važi $w' \vDash \Diamond B$ što je i trebalo dokazati.

- Neka je $A = \Box B$. Pretpostavimo da $w \vDash \Box B$ i $w \leq w'$. Na osnovu definicije 2.3.3 iz $w \vDash \Box B$ slijedi da za svako v takvo da $w \leq v$ svako u takvo da vRu važi $u \vDash B$. Treba pokazati $w' \vDash \Box B$ odnosno da za svako v' takvo da $w' \leq v'$ i svako u' takvo da $v'Ru'$ važi $u' \vDash B$. Uzmimo proizvoljno v' takvo da važi $w' \leq v'$ i proizvoljno u' takvo da $v'Ru'$. Kako je $w \leq w'$ i $w' \leq v'$ i $\leq$ tranzitivna relacija slijedi da je $w \leq v'$, sada iz $w \vDash \Box B$ i 2.3.3 zaključujemo $u' \vDash B$, čime je pokazano da važi $w' \vDash \Box B$.

Time smo pokazali lemu. $\Box$

I ovdje važi teorema potpunosti i mi ćemo je samo navesti bez dokaza.

2.3.5. Teorema *Iz* $\Gamma \vDash A$ *slijedi* $\Gamma \vdash A$.

Ovdje ćemo stati sa proučavanjem Kripkeovih modela za intuicionističku modalnu logiku. U ovom radu je akcenat ipak na Kripkeovim modelima za intuicionističku iskaznu i predikatsku logiku, dok smo za modalnu logiku dali samo kratak pregled. Ukoliko su čitaoci zainteresovani da se detaljnije upoznaju sa Kripkeovim semantikama u intuicionističkoj modalnoj logici mogu pogledati [1, 12, 17, 21, 22].

Glava 3

Kripkeove semantike za lambda račun

Razvoj formalnih računa počeo je početkom XX vijeka, jer se pojavila težnja matematičara za formalizacijom matematike. Matematičari su težili da konstruišu formalni sistem, koji bi se sastojao od konačnog broja aksioma i pravila izvođenja, a pomoću kojeg bi se mogla izgraditi cijela matematika. Ovim problemom su se matematičari bavili sve do Gödel-ove teoreme, kojom je dokazano da je ovakva formalizacija matematike nemoguća. Iako se nije mogla formalizovati cijela matematika, stvorena je ideja formalizacije njenih pojedinih dijelova.

λ-račun je formalni sistem matematičke logike, [2]. Formalizam λ-računa je razvio Alonzo Church 1930-ih godina. Ovaj formalni sistem se može nazvati najmanjim univerzalnim jezikom, univerzalan je u smislu da se svaka izračunljiva funkcija može predstaviti u λ-računu. Veza λ-računa i intuicionističke logike je u tome što su prema Curry-Howard-ovoj korespodenciji, prirodna dedukcija za intuicionističku logiku i λ-račun sa tipovima uzajamno odgovarajući sistemi, tako da pojednostavljivanje dokaza odgovara redukciji λ-izraza, odnosno izvršavanju programa.

Jedna od bitnijih uloga formalnih sistema jeste njihov uticaj na razvoj računarstva i programskih jezika. λ-račun predstavlja osnovu za funkcionalno programiranje. Funkcionalni programski jezici spadaju u grupu deklarativnih programskih jezika koji imaju jasnu vezu sa matematičkom logikom. Funkcionalno programiranje predstavlja vezu između formalnih matematičkih metoda i praktične primjene. Čitaoci koj žele detaljnije da se upoznaju sa lambda računom i njegovom ulogom u funkcionalnom programiranju mogu pogledati [4, 10].

3.1 Osnovni pojmovi lambda računa

Najprije ćemo uvesti osnovne pojmove λ-računa. Definisaćemo sintaksu λ-računa, predstaviti λ-račun bez tipova, a zatim i λ-račun sa tipovima. Tipskih sistema ima više, mi ćemo predstaviti samo osnovni tipski sistem. Za predstavljanje osnovnih pojmova lambda računa koristili smo [2, 3].

Izrazi u λ-računu nazivaju se λ-izrazi (λ-termi). Osnovni izrazi su promjenljive $V = \{x, y, z, \ldots\}$. Na promjenljve djelujemo operatorima apstrakcije i aplikacije.

Apstrakciju definišemo λ-izrazom $\lambda x.M$, gdje je M izraz koji zavisi od promjenljive x, tj. $M \equiv M[x]$. Apstrakcija od izraza M pravi unarnu funkciju, tj. ovako definisana apstrakcija predstavlja funkciju $x \to M[x]$.

3.1.1. Napomena Simbol $\equiv$ označava da je nešto sintaksno ekvivalentno.

Aplikaciju definišemo λ-izrazom MN, gdje su M i N λ-izrazi. M možemo posmatrati kao funkciju, koju primjenjujemo na argument N. U aplikaciji prvi λ-izraz se naziva operator, a drugi operand. Svaki λ-izraz može da bude operator ili operand u aplikaciji, što pruža veliku slobodu u modelovanju.

Skup λ-izraza obilježava se sa Λ. Promjenljive ćemo označavati sa $x, y, z, \ldots$, a λ-izraze sa $M, N, L, \ldots$. Predstavljamo formalnu definiciju λ-izraza.

3.1.2. Definicija *Skup λ-izraza Λ definiše se induktivno:*

1. $x \in \Lambda$;
2. $M \in \Lambda \Rightarrow \lambda x.M \in \Lambda$;
3. $M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda$;

pri čemu je x u tačkama 1. i 2. proizvoljna promjenljiva.

Definicija λ-izraza u Bachus-Naurovoj formi je data na sljedeći način:

$$M ::= x|\lambda x.M|MM.$$

Koristićemo sljedeće skraćene zapise:

- $\lambda x_1.(\lambda x_2.(\ldots(\lambda x_n.M)\ldots)) \equiv \lambda x_1 x_2 \ldots x_n.M$;
- $(\ldots((M_1 M_2)M_3)\ldots M_n) \equiv M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$.

Sada dajemo definiciju slobodnih i vezanih promjenljivih. Promjenljiva x je vezana ukoliko se nalazi pod dejstvom operatora apstrakcije u suprotnom je slobodna. Ista promjenljiva se u jednom izrazu može pojaviti i kao slobodna i kao vezana.

3.1.3. Definicija *Skup slobodnih promjenljivih u izrazu M označava se sa $FV(M)$ i definiše se induktivno:*

- $FV(x) = \{x\}$;
- $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$;
- $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$.

3.1.4. Definicija *λ-izraz koji nema slobodnih promjenljivih naziva se zatvoren izraz ili kombinator. Skup svih zatvorenih λ-izraza označava se sa Λ^0.*

3.1.5. Primjer Navodimo primjere nekih kombinatora:

- $I \equiv \lambda x.x;$
- $K \equiv \lambda xy.x;$
- $S \equiv \lambda xyz.xz(yz).$

Sa $[N/x]M$ označavamo izraz, koji se dobije od izraza M, gdje su sva slobodna pojavljivanja promjenljve x zamijenjena izrazom N.

3.1.6. Definicija *Pojam zamjene (supstitucije) definiše se na sljedeći način:*

- $[N/x]x \equiv N;$
- $[N/x]y \equiv y, x \not\equiv y;$
- $(\lambda y.[N/x]M) \equiv \lambda y.([N/x]M),\ x \not\equiv y,\ y \notin FV(N);$
- $[N/x](M_1 M_2) \equiv ([N/x]M_1)([N/x]M_2).$

Jednakost λ-izraza definiše se na sljedeći način.

3.1.7. Definicija *Formule oblika*

$$M = N,$$

gdje su M, N λ-izrazi, definišu se pomoću sljedećih aksioma i pravila:

1. $(\lambda x.M)N = [N/x]M$ *β-redukcija (β pravilo);*
2. $M = M;$
3. $M = N \Longrightarrow N = M;$
4. $M = N, N = L \Longrightarrow M = L;$
5. $M = N \Longrightarrow MZ = NZ;$
6. $M = N \Longrightarrow ZM = ZN;$
7. $M = N \Longrightarrow \lambda x.M = \lambda x.N.$

Sada ćemo predstaviti osnovni tipski sistem.

Osnovni tipski sistem označavaćemo sa $\lambda_{\rightarrow}$. Jedini operator ovog sistema je $\rightarrow$ pomoću kojeg se od tipskih primjenjivih grade tipovi. Glavna ideja ovog sistema je da ako je izraz M ima tip $\sigma \rightarrow \tau$ ($M : \sigma \rightarrow \tau$) i izraz N ima tip σ ($N : \sigma$), tada je aplikacija MN definisana i ima tip τ ($MN : \tau$), pri čemu M posmatramo kao funkciju iz skupa izraza tipa σ u skup izraza tipa τ.

3.1.8. Definicija *Neka je $\mathbb{A} = \{\alpha, \beta, \dots\}$ neprazan skup tipskih promjenljvih (atomičkh tipova). Skup osnovnih tipova nad $\mathbb{A}$, u oznaci $\mathbb{T} = \mathbb{T}^{\mathbb{A}}$ definiše se induktivno:*

1. *svaka tipska promjenljva je tip (atomički)*

$$\alpha \in \mathbb{A} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{T};$$

2. *ako su σ i τ tipovi, onda je i $\sigma \to \tau$ tip*

$$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow \sigma \to \tau \in \mathbb{T}.$$

Definicija tipova u Bachus-Naurovoj formi data je na sljedeći način:

$$\sigma ::= \alpha | \sigma \to \sigma.$$

3.1.9. Definicija

- *Dodjela tipa je izraz oblika $M : \sigma$, gdje je M λ-izraz, a σ tip.*
- *Dodjela tipa u kojoj je izraz promjenljiva, $x : \sigma$, naziva se deklaracija.*
- *Skup $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$ u kome je svaka promjenljiva x_i deklarisana najviše jednom, predstavlja bazu dodjele tipova.*

U izrazu oblika $M : \sigma$, izraz M je **subjekat**, a tip σ **predikat** i čitamo ga ,,izraz M ima tip σ". Koristićemo sljedeću skraćenicu $\Gamma, x : \sigma \equiv \Gamma \cup \{x : \sigma\}$, pri čemu pretpostavljamo da se x ne pojavljuje u Γ. Kada kažemo dodjela tipova Γ, mislimo na dodjelu tipova čija je baza Γ.

3.1.10. Definicija *Izraz $M : \sigma$ se može izvesti iz Γ, ako se $\Gamma \triangleright M : \sigma$ može izvesti pomoću sljedeće aksiome i pravila izvođenja.*

$$(aksioma) \qquad x : \sigma \triangleright x : \sigma$$

$$(\to E) \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright MN : \tau}$$

$$(\to I) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau}{\Gamma \triangleright (\lambda x.M) : \sigma \to \tau}$$

$$(add\ var) \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \tau}{\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau}$$

Kažemo da je izraz dobro tipiziran ako je dobijen na osnovu navedenih pravila.

Izraz napisan u formi $\Gamma \triangleright M : \tau$ znači da je izraz M tipa τ u odnosu na bazu Γ. Ako je $\Gamma \triangleright M : \tau$ dobro tipiziran izraz onda se sve slobodne promjenljve iz M pojavljuju u Γ.

Možemo primijetiti da u sklopu sintakse λ-izraza imamo Kripkeovu strukturu. Dodjelu tipova Γ možemo tumačiti kao ,,mogući svijet", tada izraz $\Gamma \triangleright M : \sigma$ interpretiramo na sljedeći način ,,M je definisano i ima tip σ u svijetu Γ". Prirodni poredak na dodjelama tipova jeste sadržanost (inkluzija), što nam zajedno sa pravilom izvođenja (*add var*) obezbjeđuje da ako je izraz M definisan i ima tip σ u svijetu Γ, tada on ostaje definisan sa tipom σ u svakom svijetu Γ', takvom da je $\Gamma' \geq \Gamma$. Dakle, možemo zaključiti da ćemo u svakom svijetu $\Gamma' \geq \Gamma$ imati bar elemente od Γ, ali Γ' može i da sadrži izraze koji nisu u Γ.

Definisali smo pojam kombinatora i naveli neke primjere, sada ćemo predstaviti izvođenje tipa kombinatora **K** odnosno pokazaćemo da je navedeni kombinator tipa $\sigma \to \tau \to \sigma$.

3.1.11. Primjer $\mathbf{K} : \sigma \to \tau \to \sigma$

$$\dfrac{\dfrac{[x:\sigma]^1}{\lambda y.x : \tau \to \sigma}}{\lambda xy.x : \sigma \to \tau \to \sigma}\,1$$

3.2 Kripkeovi lambda modeli

Slično kao kod Kripkeovih modela u prethodnoj glavi, Kripkeov model će se sastojati od skupa svjetova W, koji će biti parcijalno uređen relacijom $\leq$. Za svaki svijet $w \in W$ i tip σ postojaće skup elemenata, koji su u svijetu w tipa σ. Modeli će imati osobinu da ako je neki element tipa σ u svijetu w, tada za svaki svijet $w' \in W$ takav da važi $w \leq w'$, navedeni element ostaje tipa σ u svijetu w'.

Prije nego navedemo definiciju Kripkeovih lambda modela, odnosno modela za lambda račun sa osnovnim tipskim sistemom, uvešćemo neke nove pojmove i osobine, koji će pomoći pri definisanju i razumijevanju navedenih modela i koji su preuzeti iz [19].

Kripkeovi lambda modeli se definišu koristeći pomoćni pojam aplikativne strukture.

Sljedeću definiciju smo preuzeli iz [19].

3.2.1. Definicija *Kripkeova aplikativna struktura je uređena petorka*

$$A = \langle W, \leq, \{A_w^\sigma\}, \{App_w^{\sigma,\tau}\}, \{i_{w,w'}^\sigma\}\rangle$$

koja se sastoji iz:

- *skupa mogućih svjetova W, koji je parcijalno uređen relacijom $\leq$;*

- *familije* $\{A^\sigma_w\}$ *skupova indeksiranih tipovima* σ *i svjetovima* $w \in W$*;*
- *famlije* $\{App^{\sigma,\tau}_w\}$ *,,aplikativnih funkcija"* $App^{\sigma,\tau}_w : A^{\sigma\to\tau}_w \times A^\sigma_w \to A^\tau_w$*, indeksiranih parovima tipova* σ, τ *i svjetovima* $w \in W$*;*
- *familije* $\{i^\sigma_{w,w'}\}$ *,,funkcija prelaza"* $i^\sigma_{w,w'} : A^\sigma_w \to A^\sigma_{w'}$ *indeksiranih tipovima* σ *i parovima svjetova* $w \leq w'$*.*

Navedeni pojmovi treba da zadovoljavaju određene osobine, koje ćemo ovdje predstaviti.

Funkcija prelaza iz A^σ_w u A^σ_w je identitet.

(id) $$i^\sigma_{w,w} : A^\sigma_w \to A^\sigma_w \text{ je identitet.}$$

Na funkcije prelaza može se primijeniti kompozicija na sljedeći način:

(comp) $$i^\sigma_{w',w''} \circ i^\sigma_{w,w'} = i^\sigma_{w,w''} \text{ za sve } w \leq w' \leq w''.$$

Na osnovu prethodne osobine iz A^σ_w u $A^\sigma_{w'}$ postoji samo jedna funkcija prelaza za sve $w \leq w'$.

U datoj strukturi važi komutativnost aplikacije i funkcije prelaza.

(nat) $$(\forall f \in A^{\sigma\to\tau}_w)(\forall a \in A^\sigma_w)$$

$$i^\tau_{w,w'}(App^{\sigma,\tau}_{w'}(f,a)) = App^{\sigma,\tau}_w((i^{\sigma\to\tau}_{w,w'} f)(i^\sigma_{w,w'} a))$$

Kada pravimo model na osnovu Kripkeove aplikativne strukture, možemo naići na dva problema. Može da se desi da je tip $\sigma \to \sigma$ prazan, te je nemoguće identifikovati funkciju $\lambda x : \sigma.x$. Drugi problem na koji možemo naići jeste da dva različita elementa funkcionalnog tipa imaju isto funkcionalno ponašanje, tj. da aplikacija nije ekstenzionalna, što bi nas dovelo do toga da λ-izraz $\lambda x : \sigma.M$ nije jednoznačno određen. Ova dva moguća problema se rješavaju uvođenjem dodatna dva uslova za Kripkeovu aplikativnu strukturu.

Jedan od dodatnih uslova je da aplikacija bude ekstenzionalna. Uobičajeni uslov za ekstenzionalnost jeste da iz $fx = gx$ (gdje je x odgovarajućeg tipa) slijedi da važi $f = g$. Kod Kripkeovih aplikativnih struktura elemente $f, g \in A^{\sigma\to\tau}_w$ ne posmatramo samo kao funkcije iz A^σ_w u A^τ_w, nego i kao funkcije iz $A^\sigma_{w'}$ u $A^\tau_{w'}$ za sve $w' \geq w$. Ekstenzionalnost aplikacije se definiše na sljedeći način:

$$\text{Za svako } f, g \in A^{\sigma\to\tau}_w \text{ važi } ((\forall w' \geq w)(\forall a \in A^\sigma_{w'})((i^{\sigma\to\tau}_{w,w'} f)a = (i^{\sigma\to\tau}_{w,w'} g)a)) \Rightarrow f = g.$$

Da bi Kripkeova aplikativna struktura imala dovoljno elemenata da interpretiramo svaki λ-izraz, dovoljno je definisati kombinatore K i S. Globalni element

$a : \sigma$ od A se definiše kao preslikavanje $w \mapsto a_w$, koje svijetu w dodjeljuje element $a_w \in A^\sigma_w$, tako da za sve $w' \geq w$ važi $i^\sigma_{w,w'}(a_w) = a_{w'}$. Na primjer, u logičkim formulama konstante predstavljaju globalne elemente. Kripkeova aplikativna struktura ima kombinatore ako za sve tipove ρ, σ, τ postoji globalni element K, tipa $\sigma \to \tau \to \sigma$ i globalni element S, tipa $(\rho \to \sigma \to \tau) \to (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau$, tako da važi

(K) $$A \vDash K\ x\ y\ =\ x$$

(S) $$A \vDash S\ x\ y\ z\ = x\ z\ (y\ z).$$

U navedenim uslovima pretpostavljamo da su x, y, z odgovarajućeg tipa.

3.2.2. Definicija *Kripkeov lambda model $\mathcal{A}$ je Kripkeova aplikativna struktura koja je ekstenzionalna i ima kombinatore.*

Izrazi i njihovi tipovi definisani su dodjelom tipova definisanoj u 3.1.9 i pravilima izvođenja datim u 3.1.10.

Sada kada smo definisali Kripkeov model, koji sadrži skup mogućih svjetova, izraz $x : \sigma \triangleright M : \tau$ tumačimo na sljedeći način ,,u svakom svijetu w ako je x tipa σ u svijetu w, onda je izraz M tipa τ u datom svijetu”.

U lambda računu sa tipovima, pažnju ćemo posvetiti jednačinama između izraza istog tipa. Jednačine pišemo u formi $\Gamma \triangleright M = N : \tau$, gdje pretpostavljamo da su izrazi $\Gamma \triangleright M : \tau$ i $\Gamma \triangleright N : \tau$ dobro tipizirani izrazi. Navedene jednačine u potpunosti definiše sistem aksioma i pravila izvođenja, koji smo preuzeli iz [19] i koji ovdje predstavljamo.

Aksiome:

(α) $$\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M = \lambda y : \sigma.[y/x]M, \text{ gdje } y \notin FV(M)$$

(β) $$\Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M)N = [N/x]M$$

(η) $$\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.Mx = M, \text{ gdje } x \notin FV(M)$$

(ref) $$\Gamma \triangleright M = M : \sigma$$

Pravila izvođenja:

(sym) $$\frac{\Gamma \triangleright M = N : \sigma}{\Gamma \triangleright N = M : \sigma}$$

($trans$) $$\frac{\Gamma \triangleright M = N : \sigma, \quad \Gamma \triangleright N = P : \sigma}{\Gamma \triangleright M = P : \sigma}$$

($cong$) $$\frac{\Gamma \triangleright M_1 = M_2 : \sigma \to \tau, \quad \Gamma \triangleright N_1 = N_2 : \sigma}{\Gamma \triangleright M_1 N_1 = M_2 N_2 : \tau}$$

(ξ) $$\frac{\Gamma, x : \sigma \triangleright M = N : \tau}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M = \lambda x : \sigma.N : \sigma \to \tau}$$

($add\ var$) $$\frac{\Gamma \triangleright M = N : \sigma}{\Gamma, x : \tau \triangleright M = N : \sigma}$$

Neka je $\mathcal{E}$ skup jednačina, ako se izraz $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$ može izvesti iz skupa $\mathcal{E}$ na osnovu navedenih aksioma i pravila izvođenja, tada pišemo $\mathcal{E} \vdash \Gamma \triangleright M = N : \sigma$.

3.2.3. Definicija *Okolina η za Kripkeovu aplikativnu strukturu A je parcijalno preslikavanje promjenljivih i svjetova u elemente skupa A, takvo da važi*
(env) *Ako je $\eta x w \in A_w^\sigma$ i $w' \geq w$ tada važi $\eta x w' = i_{w,w'}^\sigma(\eta x w)$.*

Ako je η okolina i $a \in A_w^\sigma$, sa $\eta[a/x]$ se označava okolina, koja se od η razlikuje samo na mjestu promjenljive x, odnosno dobijena od η supstitucijom promjenljive x sa elementom a i za sve $w' \geq w$ važi

$$(\eta[a/x])xw' = i_{w,w'}^\sigma a.$$

Za w' za koje ne važi relacija $w' \geq w$ uzimamo da je $(\eta[a/x])xw'$ nedefinisano.

Neka je η okolina aplikativne strukture A i Γ dodjela tipova, ako za svako $x : \sigma \in \Gamma$ važi $\eta x w \in A_w^\sigma$, kažemo da w zadovoljava Γ u η i pišemo $w \vDash \Gamma[\eta]$. Primijetimo da iz $w \vDash \Gamma[\eta]$ i $w \leq w'$ slijedi da važi $w' \vDash \Gamma[\eta]$.

3.2.4. Definicija *Za Kripkeovu aplikativnu strukturu A i okolinu η takvu da $w \vDash \Gamma[\eta]$, definiše se značenje izraza $\Gamma \triangleright M : \sigma$ u okolini η i svijetu w, u oznaci $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w$, indukcijom po strukturi izraza.*

- $[\![\Gamma \triangleright x : \sigma]\!]\eta w = \eta x w$;
- $[\![\Gamma \triangleright MN : \tau]\!]\eta w = App_w^{\sigma,\tau}([\![\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau]\!]\eta w)([\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w)$;
- $[\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!]\eta w =$ *jedinstveno* $d \in A_w^{\sigma\to\tau}$ *takvo da za sve* $a \in A_{w'}^\sigma$ *i* $w' \geq w$ *važi* $App_{w'}^{\sigma,\tau}(i_{w,w'}^{\sigma\to\tau} d)a = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta[a/x]w'$.

3.2.5. Definicija

1. *Ako iz $w \vDash \Gamma[\eta]$ slijedi $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$, kažemo da jednačina $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$ važi u svijetu w i okolini η i pišemo $w \vDash (\Gamma \triangleright M = N : \sigma)[\eta]$.*
2. *Model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačinu $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$, pišemo $\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright M = N : \sigma$, ako je jednačina zadovoljena za svaki svijet w i okolinu η.*

3.2.1 Teorema potpunosti

Leme tranzicije i supstitucije preuzete su iz [19].

3.2.6. Lema *(Lema tranzicije).* *Neka je $\mathcal{A}$ Kripkeov lambda model i η okolina, koja zadovoljava Γ u w. Tada za svako $w' \geq w$ važi*

$$[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w' = i_{w,w'}^\sigma([\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w).$$

3.2.7. Lema ***(Lema supstitucije).*** *Neka je $\mathcal{A}$ Kripkeov lambda model η okolina, koja zadovoljava Γ u w. Za sve dobro tipizirane izraze $\Gamma \triangleright N : \sigma$ i $\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau$ važi*

$$[\![\Gamma \triangleright [N/x]M : \tau]\!]\eta w = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!](\eta[[\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w/x])w.$$

Teorema saglasnosti može se naći u [19] bez dokaza.

3.2.8. Teorema *Neka je $\mathcal{E}$ skup dobro tipiziranih jednačina. Ako $\mathcal{E} \vdash \Gamma \triangleright M = N : \sigma$, tada svaki model koji zadovoljava $\mathcal{E}$ takođe zadovoljava i $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$, tj. $\mathcal{E} \vDash \Gamma \triangleright M = N : \sigma$.*

Dokaz. Lemu dokazujemo indukcijom po dužini izvođenja $\mathcal{E} \vdash \Gamma \triangleright M = N : \sigma$. Posmatramo poslednji korak u izvođenju. Bazni slučajevi su ako je izvođenje nastalo primjenom aksiome, dok u ostalim slučajevima posmatramo poslednje primijenjeno pravilo, pretpostavljamo da model zadovoljava hipotezu i pokazujemo da zadovoljava i formulu u zaključku. Uzimamo proizvoljan Kripkeov model $\mathcal{A}$. U zavisnosti od toga koje je poslednje pravilo (ili aksioma) primijenjeno, posmatramo sljedeće slučajeve.

- Počnimo sa slučajem kada je primijenjena aksioma $\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M = \lambda y : \sigma.[y/x]M$, $y \notin FV(M)$. Treba pokazati da svaki model zadovoljava datu jednačinu, tj. $\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M = \lambda y : \sigma.[y/x]M$. Za svaki svijet w iz modela $\mathcal{A}$ i okolinu η treba da važi $[\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright \lambda y : \sigma.[y/x]M]\!]\eta w$. Kako aksioma (α) samo vrši preimenovanje vezane promjenljive, tj. navedeni izrazi se razlikuju samo u imenu promjenljve, vrlo je jasno da oni imaju isto značenje i da važi navedena jednakost.

- Neka je sada primijenjena aksioma $\Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M)N = [N/x]M$. Treba pokazati da model zadovoljava datu jednačinu, tj. $\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M)N = [N/x]M$. Uzmimo proizvoljan svijet w iz modela $\mathcal{A}$ i okolinu η treba pokazati $[\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M)N : \tau]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright [N/x]M : \tau]\!]\eta w$.

  Koristićemo definiciju $[\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!] \stackrel{\text{def}}{=} d$ gdje je $d \in A_w^{\sigma\to\tau}$ jedinstveno tako da važi za svako $w' \geq w$ i $a \in A_{w'}^{\sigma}$,

  $$App_{w'}^{\sigma;\tau}(i_{w,w'}^{\sigma\to\tau} d)a = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta[a/x]w'$$

  pri čemu navedenu jednakost koristimo za $w \geq w$ i $a = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$. Primijetimo da je $i_{w,w}^{\sigma\to\tau}(d) = d$, jer je funkcije $i_{w,w}^{\sigma}$ identitet.

  $[\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau)(N : \sigma)]\!]\eta w \stackrel{\text{def}}{=}$
  $App_w^{\sigma;\tau}([\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!]\eta w, [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w) \stackrel{\text{def}}{=}$
  $App_w^{\sigma;\tau}(d, [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w) =$
  $([\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta[[\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w/x]w,) \stackrel{3.2.7}{=}$
  $[\![\Gamma \triangleright [N/x]M : \tau]\!]\eta w$

- Pretpostavimo da je primijenjena aksioma $\Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M)x = M$, $x \notin FV(M)$. Treba pokazati da model zadovoljava datu jednačinu, tj. $\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M)x = M$. Uzmimo proizvoljan svijet w iz modela $\mathcal{A}$ i okolinu η, treba pokazati $[\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau)(x : \sigma)]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright M : \tau]\!]\eta w$. Pokazuje se slično kao prethodni slučaj za $N = x$.

- Posmatrajmo slučaj kada je primijenjena aksioma $\Gamma \triangleright M = M$. Treba pokazati da model zadovoljava datu jednačinu, tj. $\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright M = M$. Uzmimo proizvoljan svijet w iz modela $\mathcal{A}$ i okolinu η treba pokazati $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w$. Ovaj slučaj je trivijalan, jasno je da važi jednakost.

- Neka je sada poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\Gamma \triangleright M = N : \sigma}{\Gamma \triangleright N = M : \sigma}$ i da model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačinu $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$. Dakle, za proizvoljan svijet w iz modela i proizvoljnu okolinu η imamo da važi $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$. Jasno je da na osnovu simetričnosti relacije jednakosti važi i $[\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!] = [\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]$, tj. za proizvoljan svijet w i okolinu η važi $w \vDash (\Gamma \triangleright N = M : \sigma)[\eta]$, što nam govori da model $\mathcal{A}$ zadovoljava i zaključak, odnosno jednačinu $\Gamma \triangleright N = M : \sigma$.

- Pretpostavimo da je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\Gamma \triangleright M = N : \sigma \quad \Gamma \triangleright N = P : \sigma}{\Gamma \triangleright M = P : \sigma}$ i da model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačine $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$ i $\Gamma \triangleright N = P : \sigma$. Dakle, za proizvoljan svijet w iz modela i proizvoljnu okolinu η imamo da važi $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$ i $[\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright P : \sigma]\!]\eta w$. Jasno je da na osnovu tranzitivnosti relacije jednakosti važi i $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright P : \sigma]\!]\eta w$, tj. za proizvoljan svijet w i okolinu η važi $w \vDash (\Gamma \triangleright M = P : \sigma)[\eta]$, što nam govori da model $\mathcal{A}$ zadovoljava i zaključak, odnosno jednačinu $\Gamma \triangleright M = P : \sigma$.

- Posmatrajmo slučaj kada je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\Gamma \triangleright M_1 = M_2 : \sigma \to \tau \quad \Gamma \triangleright N_1 = N_2 : \sigma}{\Gamma \triangleright M_1 N_1 = M_2 N_2 : \tau}$ i model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačine $\Gamma \triangleright M_1 = M_2 : \sigma \to \tau$ i $\Gamma \triangleright N_1 = N_2 : \sigma$. Dakle, za proizvoljan svijet w iz modela i proizvoljnu okolinu η imamo da važi $[\![\Gamma \triangleright M_1 : \sigma \to \tau]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright M_2 : \sigma \to \tau]\!]\eta w$ i $[\![\Gamma \triangleright N_1 : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N_2 : \sigma]\!]\eta w$. Sada na osnovu definicije značenja izraza (3.2.4) i navedenih jednakosti imamo da važi $[\![\Gamma \triangleright M_1 N_1 : \tau]\!]\eta w = App_w^{\sigma,\tau}([\![\Gamma \triangleright M_1 : \sigma \to \tau]\!]\eta w, [\![\Gamma \triangleright N_1 : \sigma]\!]\eta w) = App_w^{\sigma,\tau}([\![\Gamma \triangleright M_2 : \sigma \to \tau]\!]\eta w, [\![\Gamma \triangleright N_2 : \sigma]\!]\eta w) = [\![\Gamma \triangleright M_2 N_2 : \tau]\!]\eta w$, tj. za proizvoljan svijet w i okolinu η važi $w \vDash (\Gamma \triangleright M_1 N_1 = M_2 N_2 : \tau)[\eta]$, što nam govori da model $\mathcal{A}$ zadovoljava i zaključak, odnosno jednačinu $\Gamma \triangleright M_1 N_1 = M_2 N_2 : \tau$.

- Neka je sada poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \triangleright M = N : \tau}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M = \lambda x : \sigma.N : \sigma \to \tau}$ i neka model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačinu $\Gamma, x : \sigma \triangleright M = N : \tau$. Dakle, za proizvoljan svijet w iz modela i proizvoljnu okolinu η imamo da važi

$$[\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta w = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright N : \tau]\!]\eta w.$$

Treba pokazati da važi

$$[\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.N : \sigma \to \tau]\!]\eta w.$$

Na osnovu definicije značenja izraza imamo da je

$$[\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!]\eta w = d_1,$$

gdje je $d_1 \in A_w^{\sigma\to\tau}$ jedinstveno tako da za svako $w' \geq w$ i svako $a \in A_{w'}^{\sigma}$ važi $App_{w'}^{\sigma,\tau}(i_{w,w'}^{\sigma\to\tau} d_1)a = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta[a/x]w'$.
Slično, $[\![\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.N : \sigma \to \tau]\!]\eta w = d_2$, gdje je $d_2 \in A_w^{\sigma\to\tau}$ jedinstveno tako da za svako $w' \geq w$ i svako $a \in A_{w'}^{\sigma}$ važi $App_{w'}^{\sigma,\tau}(i_{w,w'}^{\sigma\to\tau} d_2)a = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright N : \tau]\!]\eta[a/x]w'$.
Sada, na osnovu jednakosti
$[\![\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta w = [\![\Gamma, x : \sigma \triangleright N : \tau]\!]\eta w$ i jedinstvenosti elemenata d_1 i d_2 možemo zaključiti da važi $d_1 = d_2$. Dakle, model $\mathcal{A}$ zadovoljava i zaključak, odnosno jednačinu $\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.M = \lambda x : \sigma.N : \sigma \to \tau$.

- Pretpostavimo da je poslednje primijenjeno pravilo $\dfrac{\Gamma \triangleright M = N : \sigma}{\Gamma, x : \tau \triangleright M = N : \sigma}$ i da model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačinu $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$. Dakle, za proizvoljan svijet w iz modela i proizvoljnu okolinu η imamo da važi $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$. Treba pokazati da važi $[\![\Gamma, x : \tau \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma, x : \tau \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$, za proizvoljan svijet w modela $\mathcal{A}$ i okolinu η. Na osnovu aksiome (η) iz jednakosti $[\![\Gamma \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright N : \sigma]\!]\eta w$ slijedi da važi

$$[\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \tau.M)x : \tau \to \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \tau.N)x : \tau \to \sigma]\!]\eta w.$$

Sada na osnovu definicije 3.2.4 imamo da važi.

$[\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \tau.M)x : \tau \to \sigma]\!]\eta w = d_1$ jedinstveno tako da za svako $w' \geq w$ i svako $a \in A_{w'}^{\tau}$ važi

$$App_{w'}^{\tau,\sigma}(i_{w,w'}^{\tau\to\sigma} d_1)a = [\![\Gamma, x : \tau \triangleright M : \sigma]\!]\eta[a/x]w'.$$

$[\![\Gamma \triangleright (\lambda x : \tau.N)x : \tau \to \sigma]\!]\eta w = d_2$ jedinstveno tako da za svako $w' \geq w$ i svako $a \in A_{w'}^{\tau}$ važi

$$App_{w'}^{\tau,\sigma}(i_{w,w'}^{\tau\to\sigma} d_2)a = [\![\Gamma, x : \tau \triangleright N : \sigma]\!]\eta[a/x]w'.$$

Kako je $d_1 = d_2$, imamo da za svako $w' \geq w$ i svako $a \in A_{w'}^{\tau}$ važi

$$[\![\Gamma, x : \tau \triangleright M : \sigma]\!]\eta[a/x]w' = [\![\Gamma, x : \tau \triangleright N : \sigma]\!]\eta[a/x]w'.$$

Za $w \geq w$ i $a = x$ dobijamo jednakost

$$[\![\Gamma, x : \tau \triangleright M : \sigma]\!]\eta w = [\![\Gamma, x : \tau \triangleright N : \sigma]\!]\eta w.$$

Dakle, model $\mathcal{A}$ zadovoljava i zaključak, odnosno jednačinu $\Gamma, x : \tau \triangleright M = N : \sigma$.

Time je završen dokaz leme. □

Naredna teorema nam daje jaču osobinu od potpunosti jednakosti λ-izraza i može se naći u [19] sa idejom dokaza, mi ovdje dajemo detaljno ispisan dokaz.

3.2.9. Teorema *Neka je $\mathcal{E}$ skup jednačina zatvoren nad $\vdash$. Postoji Kripkeov model $\mathcal{A}$ takav da važi*

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright M = N : \sigma \text{ ako i samo ako } \Gamma \triangleright M = N : \sigma \in \mathcal{E}.$$

Dokaz. Da bismo dokazali lemu kontruišemo Kripkeov lambda model na sljedeći način. Neka je $\mathcal{A} = \langle W, \leq, \{A^\sigma_w\}, \{App^{\sigma,\tau}_w\}, \{i^{\sigma\to\tau}_{w,w'}\}\rangle$ tako da važi :

- W je parcijalno uređen skup dodjela tipova (tipiziranja), uređen inkluzijom. Proizvoljan element iz W označavaćemo sa Γ;
- A^σ_Γ je skup svih klasa ekvivalencije $[\Gamma \triangleright M : \sigma]$ u odnosu na $\mathcal{E}$, tj.
$$[\Gamma \triangleright M : \sigma] = \{\Gamma \triangleright N : \sigma | \mathcal{E} \vdash \Gamma \triangleright M = N : \sigma\};$$
- $App^{\sigma,\tau}_\Gamma([\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau], [\Gamma \triangleright N : \sigma]) = [\Gamma \triangleright MN : \tau]$;
- $i^\sigma_{\Gamma,\Gamma'}([\Gamma \triangleright M : \sigma]) = [\Gamma' \triangleright M : \sigma]$ za $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Pokazujemo da je ovako definisan model, zaista Kripkeov lambda model, odnosno da je Kripkeova aplikativna struktura, koja je ekstenzionalna i ima kombinatore. Pokažimo prvo da zadovoljava sve osobine aplikativne strukture. Direktno iz definicije imamo da je W parcijalno uređen skup, da važi $App^{\sigma,\tau}_\Gamma : A^{\sigma\to\tau}_\Gamma \times A^\sigma_\Gamma \to A^\tau_\Gamma$ i $i^\sigma_{\Gamma,\Gamma'} : A^\sigma_\Gamma \to A^\sigma_{\Gamma'}$. Kako je $\Gamma \subseteq \Gamma$ i iz definicije modela imamo $i^\sigma_{\Gamma,\Gamma}([\Gamma \triangleright M : \sigma]) = [\Gamma \triangleright M : \sigma]$, te je funkcija tranzicije $i^\sigma_{\Gamma,\Gamma} : A^\sigma_\Gamma \to A^\sigma_\Gamma$ identitet. Dalje, za $\Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma''$ imamo da važi
$(i^\sigma_{\Gamma',\Gamma''} \circ i^\sigma_{\Gamma,\Gamma'})([\Gamma \triangleright M : \sigma]) = i^\sigma_{\Gamma',\Gamma''}(i^\sigma_{\Gamma,\Gamma'}([\Gamma \triangleright M : \sigma])) = (i^\sigma_{\Gamma',\Gamma''}([\Gamma' \triangleright M : \sigma]) = [\Gamma'' \triangleright M : \sigma] = i^\sigma_{\Gamma,\Gamma''}([\Gamma \triangleright M : \sigma])$.

Ostalo je još da pokažemo komutativnost aplikacije i funkcije tranzicije. Uzmimo proizvoljne $[\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau] \in A^{\sigma\to\tau}_\Gamma$ i $[\Gamma \triangleright N : \sigma] \in A^\sigma_\Gamma$. Tada važi

$$i^{\tau}_{\Gamma,\Gamma'}(App^{\sigma,\tau}_{\Gamma}([\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau], [\Gamma \triangleright N : \sigma])) = i^{\tau}_{\Gamma,\Gamma'}([\Gamma \triangleright MN : \tau]) = [\Gamma' \triangleright MN : \tau]$$

$$App^{\sigma,\tau}_{\Gamma'}((i^{\sigma\to\tau}_{\Gamma,\Gamma'}[\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau]), (i^{\sigma}_{\Gamma,\Gamma'}[\Gamma \triangleright N : \sigma])) = App^{\sigma,\tau}_{\Gamma'}([\Gamma' \triangleright M : \sigma \to \tau], [\Gamma' \triangleright N : \sigma])$$

$= [\Gamma' \triangleright MN : \tau]$.

Time smo pokazali komutativnost aplikacije i funkcije tranzicije, te je data stuktura Kripkeova aplikativna struktura. Globalni elementi K i S definišu se na sljedeći način

$$K = [\lambda x : \sigma.\lambda y : \tau.x],$$

$$S = [\lambda x : \sigma \to (\tau \to \rho).\lambda y : \sigma \to \tau.\lambda z : \sigma.xz(yz)].$$

Da bi struktura $\mathcal{A}$ bila Kripkeov lambda model treba još pokazati ekstenzionalnost. Pretpostavimo da elementi $[\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau]$ i $[\Gamma \triangleright N : \sigma \to \tau]$ imaju isto funkcionalo ponašanje, tj. da za sve $\Gamma' \geq \Gamma$ i $[\Gamma' \triangleright P : \sigma]$ važi

$$[\Gamma' \triangleright MP : \tau] = [\Gamma' \triangleright NP : \tau].$$

Sada za $\Gamma' = \Gamma \cup x : \sigma$, pri čemu x nije u Γ imamo da važi

$$[\Gamma, x : \sigma \triangleright Mx : \tau] = [\Gamma, x : \sigma \triangleright Nx : \tau].$$

Na osnovu pravila ξ i aksiome η slijedi $[\Gamma \triangleright M : \sigma \to \tau] = [\Gamma \triangleright N : \sigma \to \tau]$. Pošto smo pokazali sa su zadovoljeni svi uslovi, zaključujemo da je struktura $\mathcal{A}$ Kripkeov lambda model. Pokazujemo da $\mathcal{A}$ zadovoljava samo jednačine iz $\mathcal{E}$. Za proizvoljnu dodjelu tipa Γ definišimo okolinu η na sljedeći način :

$$\eta x \Gamma' = \begin{cases} [\Gamma' \triangleright x : \sigma], & \text{ako } x : \sigma \in \Gamma \subseteq \Gamma' \\ \text{nedefinisano}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Indukcijom po strukturi izraza pokazujemo da za sve $\Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma''$ važi

$$[\![\Gamma' \triangleright M : \sigma]\!]\eta\Gamma'' = [\Gamma'' \triangleright M : \sigma].$$

Sa $\overset{IH}{=}$ označavaćemo kada nešto zaključujemo na osnovu indukcijske hipoteze. Indukcijska hipoteza je pretpostavka da tvrđenje važi za sve izraze koji su po strukturi manje složenost od posmatranog. U zavisnosti od strukture izraza M imamo sljedeće slučajeve.

- $[\![\Gamma' \triangleright x : \sigma]\!]\eta\Gamma'' \overset{\text{def}}{=} \eta x \Gamma'' \overset{\text{def}}{=} [\Gamma'' \triangleright x : \sigma]$
- $[\![\Gamma' \triangleright MN : \tau]\!]\eta\Gamma'' \overset{\text{def}}{=} App^{\sigma,\tau}_{\Gamma''}([\![\Gamma' \triangleright M : \sigma \to \tau]\!]\eta\Gamma'', [\![\Gamma' \triangleright N : \sigma]\!]\eta\Gamma'') \overset{\text{IH}}{=}$
  $App^{\sigma,\tau}_{\Gamma''}([\Gamma'' \triangleright M : \sigma \to \tau], [\Gamma'' \triangleright N : \sigma]) \overset{\text{def}}{=} [\Gamma'' \triangleright MN : c\tau]$

- $[\![\Gamma' \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!]\eta\Gamma'' \stackrel{\text{def}}{=}$ jedinstveno $d \in A^{\sigma\to\tau}_{\Gamma''}$ takvo da važi za svako $a \in A^{\sigma}_{\Gamma'''}$ i $\Gamma'' \subseteq \Gamma'''$ važi

$$App^{\sigma,\tau}_{\Gamma'''}(i^{\sigma\to\tau}_{\Gamma'',\Gamma'''}d)a = [\![\Gamma', x : \sigma \triangleright M : \tau]\!]\eta[a/x]\Gamma'''$$

Pokazaćemo da je traženo d baš $d = [\Gamma'' \triangleright \lambda x : \sigma.M\sigma \to \tau]$. Kako je $a \in A^{\sigma}_{\Gamma'''}$ ono je oblika $a = [\Gamma''' \triangleright P : \sigma]$. Pokažimo da ovako izabrano d zadovoljava uslov.
$App^{\sigma,\tau}_{\Gamma'''}(i^{\sigma\to\tau}_{\Gamma'',\Gamma'''}d)a = App^{\sigma,\tau}_{\Gamma'''}(i^{\sigma\to\tau}_{\Gamma'',\Gamma'''}[\Gamma'' \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau], [\Gamma''' \triangleright P : \sigma]) \stackrel{\text{def}}{=}$
$App^{\sigma,\tau}_{\Gamma'''}([\Gamma''' \triangleright \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau], [\Gamma''' \triangleright P : \sigma]) \stackrel{def}{=} [\Gamma''' \triangleright (\lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau)P : \sigma] \stackrel{\beta}{=}$
$[\Gamma''' \triangleright [P/x]M : \tau] \stackrel{IH}{=} [\![\Gamma' \triangleright [P/x]M : \tau]\!]\eta\Gamma''' \stackrel{3.2.7}{=}$
$[\![\Gamma', x : \sigma \triangleright M : \tau]\!](\eta[[\![\Gamma' \triangleright P : \sigma]\!]\eta\Gamma'''/x])\Gamma''' \stackrel{def}{=} [\![\Gamma', x : \sigma \triangleright M : \tau]\!](\eta[a/x])\Gamma'''$
Time smo pokazali da $d = [\Gamma'' \triangleright \lambda x : \sigma.M\sigma \to \tau]$ zadovoljava uslov.

Pokažimo sada da za ovako konstruisan model $\mathcal{A}$ važe oba smjera tvrđenja.
($\Rightarrow$) Ako $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačinu $\Gamma \triangleright M = N : \sigma$, po konstrukciji okoline η imamo da važi $\Gamma \vDash \Gamma[\eta]$, te na osnovu pokazane osobine koja povezuje elemente aplikativne strukture i značenje izraza imamo da važi

$$[\Gamma \triangleright M : \sigma] = [\Gamma \triangleright N : \sigma].$$

Kako izvedeni zaključak važi za svako Γ, svaka formula (jednačina), koju zadovoljava model $\mathcal{A}$ mora biti dokaziva iz skupa $\mathcal{E}$, na osnovu konstrukcije modela $\mathcal{A}$. Pokazali smo da važi $\mathcal{A} \vDash \Gamma \triangleright M = N : \sigma \Rightarrow \mathcal{E} \vdash \Gamma \triangleright M = N : \sigma$. Kako smo pretpostavili da je skup $\mathcal{E}$ zatvoren nad $\vdash$ formula koja je dokaziva iz $\mathcal{E}$, takođe i pripada skupu $\mathcal{E}$, time smo pokazali jedan smjer tvrđenja.
($\Leftarrow$) Treba pokazati da svaku jednačinu iz skupa $\mathcal{E}$ zadovoljava model $\mathcal{A}$. Posmatraćemo samo zatvorene izraze iz skupa $\mathcal{E}$. Prilikom ove restrikcije ne gubimo opštost jer se na osnovu aksiome η i pravila izvođenja ξ jednačine
$\emptyset \triangleright \lambda x_1 : \sigma_1. \ldots \lambda x_k : \sigma_k.M = \lambda x_1 : \sigma_1. \ldots \lambda x_k : \sigma_k.N$ i $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \triangleright M = N$ mogu izvesti jedna iz druge. Uzmimo zatvorenu jednačinu $\emptyset \triangleright M = N : \tau \in \mathcal{E}$. Na osnovu pravila (*add var*) za svako Γ imamo da važi $\mathcal{E} \vdash \Gamma \triangleright M = N : \tau$. Sada, za svaki svijet Γ iz modela $\mathcal{A}$ dvije klase ekvivalencije $[\Gamma \triangleright M : \tau]$ i $[\Gamma \triangleright N : \tau]$ su jednake, na osnovu konstrukcije modela $\mathcal{A}$. Na osnovu definicije značenja izraza u modelu $\mathcal{A}$, imamo da je značenje izraza $\emptyset \triangleright M : \tau$ u svakoj okolini η i svijetu Γ dato sa $[\Gamma \triangleright M : \tau]$, dok je značenje izraza $\emptyset \triangleright N : \tau$ u okolini η i svijetu Γ dato sa $[\Gamma \triangleright N : \tau]$. Sada na osnovu jednakosti $[\Gamma \triangleright M : \tau] = [\Gamma \triangleright N : \tau]$, slijedi da navedeni izrazi za svaku okolinu η i svijet Γ imaju isto značenje, te model $\mathcal{A}$ zadovoljava jednačinu $\emptyset \triangleright M = N : \tau$. Dakle, možemo zaključiti da model $\mathcal{A}$ zadovoljava svaku jednačinu iz skupa $\mathcal{E}$. Ovim smo pokazali i drugi smjer tvrđenja. $\square$

Zaključak

Na samom kraju ovog rada bitno je da napravimo rezime prethodno iznesene teorije, ali isto tako i da ukratko predstavimo najnovija dostignuća iz ove oblasti.

U radu su predstavljene Kripkeove semantike za intuicionističku logiku i lambda račun. U intuicionističkoj logici smo posmatrali iskaznu, predikatsku i modalnu logiku. Za iskaznu i predikatsku logiku smo dali detaljne definicije Kripkeovih modela i pokazali neke njihove značajne osobine. Zatim smo za oba sistema dokazali teoreme potpunosti semantika u odnosu na sistem prirodne dedukcije. Pored toga za modalnu logiku smo samo kratko uveli definiciju Kripkeovih modela i uputili zainteresovane čitaoce na korisnu literaturu, ukoliko žele detaljnije da se upoznaju sa semantikama u modalnoj logici. Poslednja glava je posvećena Kripkeovim modelima za lambda račun sa tipovima, za koje smo pokazali tvrđenje jače od potpunosti.

Kripkeove semantike su napravile veliki pomak i u teoriji intuicionističke logike i u teorijama druguh neklasičnih logika, jer do tada teorija modela za ovakve logike skoro da nije postojala. Iako je dokaz teoreme potpunosti za ove semantike intuicionistički neprihvatljiv, jer u dokazu koristimo svođenje na kontradikciju, tj. oslanjamo se na pravilo zaključivanja klasične matematike, one su ipak od velikog značaja.

Iako je svoj razvoj počela 1930-ih intuicionistička logika je i danas veoma aktuelna oblast. Pored same intuicionističke logike, tema interesovanja su i njena proširenja. Jedno takvo proširenje jeste vjerovatnosno proširenje intuicionističke logike. I za ovo proširenje su definisane Kripkeove semantike i dokazana njihova potpunost, a zainteresovani čitaoci mogu nešto više naći o ovoj temi u [16].

Razvoj lambda računa je takođe imao ubrzani tok zbog svog značaja i primjene. Njegov značaj ogleda se u tome što predstavlja vezu između matematičke logike i teorije računarstva. Primjena lambda računa je većim dijelom zasnovana na činjenici da je on matematički model za funkcionalne programske jezike.

Pored lambda računa sa osnovnim tipskim sistemom, koji smo ovdje posmatrali, postoji i lambda račun sa tipovima sa presjekom, sa rekurzivnim tipovima, sa tipovima drugog i višeg reda, kao i zavisnim tipovima. Čitaoci koji žele detaljnije da se upoznaju sa lambda računom, pored do sada citirane literature mogu pogledati [4].

Oblast lambda računa kako bez tipova tako i sa tipovima zbog svoje velike primjene intrigira naučnike već duži niz godina. S obzirom da se mnogo istraživača bavi ovom interesantnom oblašću imamo i veliki broj rezultata i radova koji se bave ovom temom, a neminovno je da će tako biti i ubuduće.

Literatura

[1] N. Alechina, M. Mendler, V. de Paiva, E. Ritter. Categorical and kripke semantics for constructive S4 modal logic. In *Computer Science Logic, 15th International Workshop, CSL 2001. 10th Annual Conference of the EACSL, Paris, France, September 10-13, 2001, Proceedings*, pages 292–307, 2001.

[2] H. P. Barendregt. *The lambda calculus: its syntax and semantics.* North-Holland, 1984.

[3] H. P. Barendregt, E. Barendsen. *An introduction to lambda calculus.* Learning Press, 2012.

[4] H. P. Barendregt, W. Dekkers, R. Statman. *Lambda Calculus with Types.* Perspectives in logic. Cambridge University Press, 2013.

[5] N. Bezhanishvili, D. de Jongh. Intuitionistic logic. Technical report, Universiteit van Amsterdam, 2010.

[6] A. Block. Kripke models for first-order intuitionistic logic, 2013.

[7] M. Fitting. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics.* Springer Netherlands, 1983.

[8] H. Geuvers, T. Hurkens. Deriving natural deduction rules from truth tables. In *Logic and Its Applications - 7th Indian Conference, ICLA 2017, Kanpur, India, January 5-7, 2017, Proceedings*, pages 123–138, 2017.

[9] G. E. Hughes, M. J. Cresswell. *An Introduction to Modal Logic.* Methuen, 1972.

[10] J. Ivetić. Formalni računi za intuicionističku logiku. Master's thesis, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2007.

[11] P. Janičić. *Matematička logika u računarstvu.* Matematički fakultet Beograd, 2009.

[12] K. Kojima. *Semantical study of intuitionistic modal logics.* PhD thesis, Kyoto University, 2012.

[13] S. A. Kripke. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24:1–14, 1959.

[14] S. A. Kripke. Semantical analysis of modal logic I. Normal propositional calculi. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963.

[15] S. A. Kripke. Semantical analysis of intuitionistic logic I. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 40:92–130, 1965.

[16] Z. Marković, Z. Ognjanović, M. Rašković. A probabilistic extension of intuitionistic logic. *Mathematical Logic Quarterly*, 49(4):415–424, 2003.

[17] M. Marti, T. Studer. Intuitionistic modal logic made explicit. *IfCoLog Journal of Logics and their Applications*, 3(5):877–901, 2016.

[18] G. Mints. *A Short introduction to Intuitionistic Logic.* Springer US, 2002.

[19] J. C. Mitchell, E. Moggi. Kripke-style models for typed lambda calculus. *Ann. Pure Appl. Logic*, 51(1-2):99–124, 1991.

[20] Z. Ognjanović, N. Krdžavac. *Uvod u teorijsko računarstvo.* FON, Beograd, 2004.

[21] G. D. Plotkin, C. Stirling. A framework for intuitionistic modal logics. In *Proceedings of the 1st Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge, Monterey, CA, March 1986*, pages 399–406, 1986.

[22] A. K. Simpson. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic.* PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.

[23] A. S. Troelstra, D. Van Dalen . *Constructivism in mathematics: An introduction.* North-Holland, 1988.

Biografija

Simona Kašterović rođena je 12.03.1992. godine u Brčkom, Bosna i Hercegovina. Završila je osnovnu školu ,,Vaso Pelagić" u Pelagićevu 2007. godine kao nosilac Vukove diplome. Zatim je upisala opšti smjer Gimnazije ,,Vaso Pelagić" u Brčkom. Istu je završila 2011. godine sa prosječnom ocjenom 5.00 nakon čega je upisala osnovne studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, smjer Diplomirani profesor matematike. Studije je završila zaključno sa junskim rokom 2015. godine sa prosječnom ocjenom 9.42. Master studije upisala je iste godine na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, smjer Matematika u tehnici. Sve ispite položila je u junskom roku 2016. godine sa prosječnom ocjenom 9.75 i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, jul 2017. Simona Kašterović