The 5th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, May 9-10th 2020

Uvod u varijacioni račun sa primenom u obradi slika

Tamara Kopanja [1] i Tibor Lukić [2]

Sažetak. U ovom radu su prikazane osnove varijacionog računa zajedno sa fundamentalnom formulom, Ojler-Lagranžovom jednačinom. U radu je dat uvod u primenu varijacionog računa u obradi slike.

AMS klasifikacija (2010): 4900, 4903

Ključne reči: varijacioni račun, obrada slike, aktivna kontura, otklanjanje šuma, optimizacija.

1. Uvod

Varijacioni račun, kao jedan od mogućih pristupa za rešavanje optimizacionih zadataka, predstavlja često korišćen alat u rešavanju mnogih fizičkih i inženjerskih problema. Krajem XVII i početkom XVIII veka javlja se problem *brahistrohrone* koji je bio vrlo popularan u krugu matematičara. Problem se svodio na to da se pronađe kriva kojom se kreće materijalna tačka između dve tačke u vertikalnoj ravni pod dejstvom zemljine teže za što kraće vreme. Problem brahistrohrone je uspešno rešen tek primenom varijacionog računa, u čemu su bitnu ulogu imali Ojler i Lagranž ali i mnogi drugi poznati matematičari, između ostalog to su Njutn i Jakob Bernuli. Varijacioni račun nalazi svoju primenu i u digitalnoj obradi slike. Naročito se ističu sledeće oblasti:

- otklanjanje šuma (denoising) [1, 2],
- rekonstrukcija nepotpune slike (inpainting) [3],
- poboljšanje kvaliteta zamućene slike (deblurring) [4],
- segmentacija objekata pomoću aktivne konture [5].

Problem segmentacije slike se često rešava primenom modela aktivne konture. Aktivna kontura predstavlja krivu definisanu na domenu slike, koja može da menja svoj oblik i dužinu u cilju da „zaokruži“ posmatrani objekat. Kretanje krive od početnog položaja do konačnog oblika nazivamo evolucijom konture. Ovaj proces kretanja krive se može opisati i kontrolisati pomoću varijacionog računa.

[1] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: kopanja.v11.2019@uns.ac.rs

[2] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: tibor@uns.ac.rs

2. Varijacioni račun i Ojler-Lagranžova jednačina

Korišćenjem varijacionog računa tražimo ekstrem funkcionele oblika

$$I(f) = \int_a^b F[x, f(x), f'(x)]dx,$$

pri čemu je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a podintegralna funkcija $F[x, f(x), f'(x)]$ je funkcija od tri nezavisne promenljive.

Označimo „malu promenu“ funkcije f sa $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$, gde je $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mali broj i $\varphi(x)$ proizvoljna funkcija za koju je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Varijaciju funkcije δf definišemo kao $\delta f = \tilde{f}(x) - f(x) = \varepsilon\varphi$. Varijacija, u neformalnom smislu, predstavlja malu promenu funkcije f do njoj bliske funkcije $\tilde{f}$. Primetimo da zbog $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ važi da su u početnoj i krajnjoj tački jednake vrednosti funkcija, odnosno varijacija je 0.

Pretpostavimo da postoji ekstrem funkcionele i označimo taj ekstrem sa $f(x)$. Tada za sve ostale funkcije $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ odnosno za svako $\varepsilon > 0$ važi
$I(f + \varepsilon\varphi) < I(f)$, ako je funkcija f maksimum funkcionele I ili
$I(f + \varepsilon\varphi) > I(f)$, ako je funkcija f minimum funkcionele I nad $[a, b]$.
Zaključujemo da funkcionela $I(f + \varepsilon\varphi)$ dostiže ekstremnu vrednost za $\varepsilon = 0$. Koristeći diferencijalni račun, to znači da je prvi izvod funkcije $I(f + \varepsilon\varphi)$ po ε jednak nuli u tački $\varepsilon = 0$. Pomenuti izvod

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[f + \varepsilon\varphi(x)]\Big|_{\varepsilon=0} = 0, \tag{2.1}$$

označavamo sa δf i zovemo **prva varijacija** funkcionele I. Dakle, jednačina (2.1) predstavlja uslov za ekstrem funkcionele $I(f)$.

Pre samog izvođenja fundamentalne jednačine varijacionog računa, navodimo lemu koja igra ključnu ulogu u procesu izvođenja.

Lema 2.1. *[6] Neka važi $\int_a^b S(x)h(x) = 0$ za sve funkcije $h = h(x) \in C^1[a, b]$ za koje važi $h(a) = h(b) = 0$, pri čemu je $S(x) \in C[a, b]$ data funkcija. Tada je $S(x) = 0$ za svako $x \in [a, b]$, odnosno $S \equiv 0$.*

Krećemo od uslova za ekstrem funkcionele $I(f)$, odnosno sređujemo izraz (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I[\tilde{f}] &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_a^b F[x, \tilde{f}, \tilde{f}'] \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{f}}\frac{d\tilde{f}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{f}'}\frac{d\tilde{f}'}{d\varepsilon} \right) dx \end{aligned}$$

Znajući da x ne zavisi od ε i da je $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ sledi
$\dfrac{dx}{d\varepsilon} = 0$, $\dfrac{d\tilde{f}}{d\varepsilon} = \varphi$ i $\dfrac{d\tilde{f}'}{d\varepsilon} = \varphi'$.

Dalje je

$$\frac{d}{d\varepsilon}I[\tilde{f}]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{f}}\varphi + \frac{\partial F}{\partial \tilde{f}'}\varphi'\right)dx\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\varphi + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi'\right)dx$$

Koristeći parcijalnu integraciju sređujemo integral

$$\delta I = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\varphi dx + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi dx \tag{2.2}$$

Konačno koristeći početni uslov za funkciju $\varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ dolazimo do

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\varphi dx = 0. \tag{2.3}$$

Ako iskoristimo pomoćnu lemu 2.1 na jednakost 2.3 dolazimo do formule

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \tag{2.4}$$

koja se naziva ***Ojler-Lagranžova jednakost***. U nastavku rada će nam biti važna funkcionela oblika :

$$\mathcal{A}[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x), f''(x))dx \tag{2.5}$$

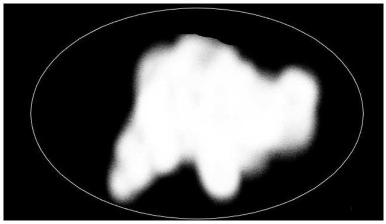
gde je f najmanje dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Odgovarajuća Ojler-Lagranžova jednačina za ovu klasu funkcionela izvodi se slično kao u prethodnom slučaju i izgleda

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial f''} = 0. \tag{2.6}$$

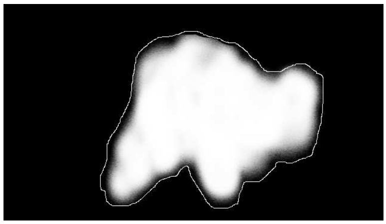
Jednakosti predstavljaju potreban uslov za ekstrem funkcionele, ali ne i dovoljan. Integralne krive koje zadovoljavaju Ojler-Lagranžovu jednačinu zovu se *ekstremale.* Za dovoljan uslov potrebno je uvođenje druge varijacije $\delta^2 I$ što se može pronaći u [7] i [8]. Takođe, bitno je naglasiti da često nije lako naći analitičko rešenje Ojler-Lagranžove jednačine (2.4) pa se u tim slučajevima primenjuju različite numeričke metode rešavanja, kao što će biti u našem slučaju.

3. Aktivna kontura

Posmatrajmo dvodimenzionalnu digitalnu sliku kao uređen par (D, f) gde je $D \subset \mathbb{Z}^2$, D je konačan i $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija slike koja tačkama dodeljuje intenzitet odnosno sivi deo ako posmatramo crno-belu sliku [3]. Elemenat skupa D zovemo piksel. Pikseli, uz pomoć funkcije f pohranjuju informacije digitalne slike kao što su boja, svetlina i slično. U oblasti digitalne obrade slike želimo da saznamo što više informacija i obradimo ih u cilju poboljšanja kvaliteta slike. Jedna od bitnih faza u digitalnoj obradi slike je evolucija krive. Kretanje, odnosno evoluciju i oblik krive kontroliše funkcionela energije koja upravo ima



Slika 1: Početna pozicija aktivne konture.



Slika 2: Konačna (ciljna) pozicija aktivne konture.

minimalnu vrednost kada je aktivna kontura u ciljnoj poziciji (slika 1 i slika 2) Dakle, problem se svodi na pronalaženje funkcionele energije i njenu minimizaciju, gde nam pomaže varijacioni račun. Mi ćemo se pozabaviti klasičnim modelom aktivne konture koji se koristi za detekciju konture konveksnog, povezanog oblika.

Neka je već pomenuta funkcija f dovoljno puta neprekidno diferencijabilna funkcija i $p \subset D$ zatvorena parametarska kriva

$$p(t) = [x(t), y(t)]^T \ , \ t \in [a, b] \text{ i } p(a) = p(b).$$

Definišemo funkcionelu energije $E[p]$

$$E[p] = \int_a^b \left(E_{int}(p(t)) + E_{ext}(p(t))\right) dt \tag{3.1}$$

pri čemu je sa E_{int} označena unutrašnja energija a sa E_{ext} spoljašnja energija. Uloga *unutrašnje energije* jeste da kontroliše oblik i dužinu krive $p(t)$ i definisana je sa

$$E_{int}(p) = \frac{1}{2}\left(\alpha(t)\left\|\frac{dp}{dt}\right\|^2 + \beta(t)\left\|\frac{d^2p}{dt^2}\right\|^2\right). \tag{3.2}$$

Težinski parametri $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ kontrolišu značaj članova uz koje stoje. Pri tome je $\frac{dp}{dt} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right]^T$ i $\|\cdot\|$ Euklidska norma.

[3]U slučaju slike u boji funkcija f je vektorska funkcija

Uloga *spoljašnje energije* je da „vuče“ krivu ka željenom položaju, a možemo je definisati na više načina. U klasičnom modelu aktivne konture, koristi se diskontinuitet tačaka. Tipični način definisanja je

$$E_{ext}(x,y) = -\Big\|\nabla f(x,y)\Big\|^2 \tag{3.3}$$

gde je $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$.
Spoljašnja energija ima minimum na lokacijama slike sa velikim vrednostima gradijenta $\nabla(f)$ a to su baš konture odnosno ivice objekta koji želimo zaokružiti. Pri tome, pomenute vrednosti na ivicama objekta mogu biti toliko velike da stvaraju probleme u operativnoj primeni. Zato se koriste i drugi načini definisanja spoljašnje energije. Najjednostavniji za primenu je $E_{ext}(x,y) = -f(x,y)$, koji možemo koristiti u slučaju binarne slike.

Minimizacija funkcionele energije

Nakon što smo modelirali problem, sledeći zadatak je minimizacija funkcionele energije

$$\begin{aligned} E[p] &= \int_a^b \left\{ \frac{1}{2}\left(\alpha\Big\|\frac{dp}{dt}\Big\|^2 + \beta\Big\|\frac{d^2p}{dt^2}\Big\|^2\right) + E_{ext}(\mathbf{c})\right\} dt \\ &= \int_b^a L(p,p',p'')\,dt\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

gde su pozitivni realni brojevi α i β parametri postupka. Kriva $p(t)$ koja minimizira funkcionelu $E[p]$ i koju tražimo mora zadovoljavati Ojler-Lagranžovu jednačinu 2.6, odnosno važi

$$\alpha p'' - \beta p^{IV} - \nabla E_{ext} = 0. \tag{3.5}$$

Kako je $p(t) = [x(t), y(t)]^T$ imamo zapravo sistem dve diferencijalne jednačine

$$\alpha x''(t) - \beta x^{IV}(t) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} = 0,$$

$$\alpha y''(t) - \beta y^{IV}(t) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} = 0$$

koji ne možemo rešiti analitičkim putem, pa se traži približno rešenje diskretizujući problem.

Među nedostatke aktivnog modela ubrajamo nedovoljno teoretskog znanja o određivanju početnog položaja evolucione krive. Takođe, kao što je već rečeno, spoljašnja energija bazira se na diskontinuitetu funkcije slike što može dovesti do poteškoća u slučaju naglih varijacija u intenzitetu piksela, kao što je na primer efekat prisustva šuma.

4. Zaključak

Na početku rada videli smo osnovne pojmove iz varijacionog računa i izveli fundamentalnu, Ojler-Lagranžovu jednačinu. Pomenuta jednačina predstavlja potreban uslov za određivanje ekstremne funkcije posmatrane funkcionele.

Često se ne može analitički rešiti Ojler-Lagranžova jednačina, pa samim tim ne znamo uvek analitički oblik stacionarne funkcije, kao što je bio slučaj u posmatranom klasičnom modelu aktivne konture. U ovakvim slučajevima često se pribegava diskretizaciji i numeričkom rešenju modela.

Varijacioni račun nalazi široku primenu u digitalnoj obradi slike, videti [9]. U radu je opisana i analizirana primena u segmentaciji slika koja se oslanja na klasičan model aktivne konture. U budućem radu vidimo mogućnost adaptacije ovog modela za rešavanje drugih problema obrade slika. Ovaj rad želi pružiti motivaciju i fundamentalna znanja za buduća istraživanja u tim pravcima.

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju na podršci u okviru projekta Fakulteta tehničkih nauka pod naslovom „Naučni i pedagoški rad na doktorskim studijama“.

Literatura

[1] T. Lukić and J. Žunić, "A non-gradient-based energy minimization approach to the image denoising problem," *Inverse Problems*, vol. 30, p. 19pp, 2014.

[2] T. Lukić, J. Lindbald, and N. Sladoje, "Regularized Image Denoising Based on Spectral Gradient Optimization," *Inverse Problems*, vol. 27, 2011.

[3] T. Barbu, "Variational image inpainting technique based on nonlinear second-order diffusions," *Comput. Electr. Eng.*, vol. 54, pp. 345–353, 2016.

[4] Y. Marnissi, Y. Zheng, É. Chouzenoux, and J. Pesquet, "A variational bayesian approach for image restoration - application to image deblurring with poisson-gaussian noise," *IEEE Trans. Computational Imaging*, vol. 3, no. 4, pp. 722–737, 2017.

[5] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos., "Snakes: Active contour models," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 1, pp. 321–331, 1988.

[6] N. Teofanov and M. Žigić, *Osnovi optimizacije.* Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2013.

[7] K. W. Cassel, *Variational Methods with applications in Science and Engineering.* Cambridge, 2013.

[8] I. Čomić and L. Pavlović, *Funkcije više promenljivih.* Univerzitet u Novom Sadu,Fakultet tehničkih nauka, 2000.

[9] L. A. Vese and C. L. Guyader, *Variational Methods in Image Processing.* CRC Press, 2015.