SLOBODNI VEKTORI

1. Dokazati da su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ koplanarni. Napisati vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

2. Dati su vektori $\vec{a} = (4k, 2, 2(1-k))$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ i $\vec{c} = (5, -1, 8)$.

   (a) Odrediti $k \in \mathbb{R}$ tako da vektor $\vec{a}$ zaklapa jednake uglove sa vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

   (b) Pokazati da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$ i predstaviti vektor $\vec{d} = (-2, 2, -5)$ u toj novoj bazi.

   (c) Uporediti zapremine paralelopipeda konstruisanih nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$, odnosno vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{d}$.

3. Dati su vektori

$$\vec{m} = (-3, -2, a),\ \ \vec{n} = (1, b, 3),\ \ \vec{p} = (c, d, -4),\ \ \vec{q} = (-6, -\frac{3}{2}, 6),\ \ a \in \mathbb{R}^+,\ \ b, c, d \in \mathbb{R}.$$

   (a) Odrediti parametare a i b tako da je $|\vec{m}| = \sqrt{14}$ i $\vec{m} \perp \vec{n}$, i parametre c i d tako da vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ budu kolinearni.

   (b) Izračunati površinu trougla odredjenog vektorima $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

   (c) Odrediti zapreminu trostrane prizme konstruisane nad vektorima $\vec{m}, \vec{n}$ i $\vec{p}$.

4. Dati su vektori $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$ i $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

   (a) Naći ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

   (b) Odrediti zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

   (c) Odrediti zapreminu i visinu tetraedra konstruisanog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$, sa bazom odredjenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

5. Naći projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ ako je $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

6. Da li tačke $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ i $D(2, 1, 3)$ pripadaju istoj ravni?

7. Neka su $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-3, 1, -1)$ i $B_1(1, 3, 2)$ temena paralelopipeda $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Naći koordinate preostalih temena, a zatim izračunati površinu i zapreminu paralelopipeda.

8. Pokazati da vektori $\vec{a} = (7, 6, -6)$ i $\vec{b} = (6, 2, 9)$ mogu biti ivice kocke, a zatim odrediti vektor $\vec{c}$ treće ivice kocke.

9. Označimo sa $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektore koji odredjuju paralelogram $ABCD$. Neka je tačka M sredina duži BC, tačka T presek duži AM i BD, i T' projekcija tačke T na duž AB. Izračunati $\left|\overrightarrow{TT'}\right|$ ako je $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.