Dualni problemi

Neka je dat (*primarni*) problem u standardnoj formi:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Pomnožimo nejednačine redom sa $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$. Tada je

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n)y_1 & + & \\
(a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n)y_2 & + & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \\
(a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n)y_m & \leq & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m
\end{array}$$

Ako je leva strana veća ili jednaka od $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, onda desna strana daje gornju granicu za vrednosti funkcije. U tom slučaju imamo

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \leq & (a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \ldots & + & a_{m1}y_m)x_1 \\
 & & (a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \ldots & + & a_{m2}y_m)x_2 \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
 & & (a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \ldots & + & a_{mn}y_m)x_n,
\end{array}$$

Odredjivanje minimuma na ovakav način konstruisanih gornjih granica predstavlja *dualni problem.* Znači, dualni problem je

$$\min(b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n) \tag{1.2}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \ldots & + & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\
a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \ldots & + & a_{m2}y_m & \geq & c_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \\
a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \ldots & + & a_{mn}y_m & \geq & c_n
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$$

Teorema 1.0.1 *Dualni problem od dualnog problema (1) je primarni problem (1.1).*

Dokaz. Standardna forma duala je

$$-\max(-b_1y_1 - b_2y_2 - \ldots - b_my_m)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
-a_{11}y_1 & - & a_{21}y_2 & - & \ldots & - & a_{m1}y_m & \leq & -c_1 \\
-a_{12}y_1 & - & a_{22}y_2 & - & \ldots & - & a_{m2}y_m & \leq & -c_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \\
-a_{1n}y_1 & - & a_{2n}y_2 & - & \ldots & - & a_{mn}y_m & \leq & -c_n
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$$

Njegov dualni problem je tada:

$$-\min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
-a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \ldots & - & a_{1n}x_n & \leq & -b_1 \\
-a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & - & \ldots & - & a_{2n}x_n & \leq & -b_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \\
-a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - & \ldots & - & a_{mn}x_n & \leq & -b_n,
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

što se lako pokazuje da je baš problem (1.1). □

1.1 Tvrdjenje slabe dualnosti

Teorema 1.1.1 *Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dopustivo rešenje primarnog problema, a $y = (y_1, \ldots, y_m)$ dopustivo rešenje dualnog problema. Tada je*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Dokaz. Ako u primarnom problemu (1.1) nejednačine pomnožimo redom sa $y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$, a u dualnom promeru ih pomnožimo redom sa $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, dobijamo

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \leq & a_{11}x_1y_1 & + & \ldots & + & a_{m1}x_1y_m & & \\
 & & a_{12}x_2y_1 & + & \ldots & + & a_{m2}x_2y_m & & \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
 & & a_{1n}x_ny_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_ny_m & \leq & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.
\end{array}$$

□

Posledica 1.1.1 *Ako su x i y dopusiva rešenja primarnog i dualnog problema i*

$$\max c^T x = \min b^T y,$$

onda su x i y tačke u kojima funkcije cilja dostižu optimalne vrednosti.

1.2 Tvrdjenje jake dualnosti

Teorema 1.2.1 *Ako primarni problem ima optimalno rešenje $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, onda dualni problem ima optimalno rešenje $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ i važi*

$$c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots c_nx_n^* = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \ldots + b_my_m^*. \tag{1.3}$$

Dokaz. Neka je x^* optimalno rešenje primara koje odgovara optimalnoj Simpleks tabeli:

$$\begin{array}{|cccccc|c} x_1 & \dots & x_n & w_1 & \dots & w_m & \\ \hline \dots & & & & \dots & & \\ \hline c_1^* & \dots & c_n^* & d_1^* & \dots & d_m^* & z - z^* \end{array}$$

Uvedimo oznake

$$y_i^* = d_i^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Pokazaćemo da

(i) y^* zadovoljava jednakost (1.3) i

(ii) y^* je dopustivo rešenje dualnog problema.

Tada će tvrdjenje važiti na osnovu Posledice 1.1.1.
Za datu Simpleks tabelu je

$$z - z^* = -\sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j - \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i.$$

Zamenjujući optimalno rešenje u funkciju cilja, dobijamo

$$z^* = c_1 x_1^* + \dots c_n x_n^*. \tag{1.4}$$

Funkcija cilja z zadovoljava sledeću jednakost:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z^* - \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j - \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i \\ &= z^* - \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \\ &= z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i^* y_i - \sum_{j=1}^{n} (c_j^* - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j \end{aligned}$$

Leva strana jednakosti jednaka je desnoj ako i samo ako su koeficijenti uz odgovarajuće nepoznate jednaki, tj. ako važi

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \tag{1.5}$$

$$c_j = -c_j^* + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{1.6}$$

(i) Na osnovu (1.4) i (1.5), sledi (1.3).

(ii) Kako je primarni problem optimalan, sledi da je $c_j^* \geq 0$ za svako $j = 1, \dots, n$, odakle koristeći (1.6) važi

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j, \quad j = 1 \dots, n.$$

□

1.3 Tvrdjenje komplementarnosti dopunskih nepoznatih

Teorema 1.3.1 *Neka je* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *dopustivo rešenje primarnog problema i* $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *dopustivo rešenje dualnog problema. Neka su* $(w_1, \ldots, w_m)$ *i* $(z_1, \ldots, z_n)$ *dopunske (slabe) nepoznate u primarnom i dualnom problemu, respektivno.*

x i y su optimalna rešenja redom primarnog i dulanog problema
akko

(i) za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$ *važi* $x_j z_j = 0$ *i*

(ii) za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$ *važi* $w_i y_i = 0$.

Dokaz. Iz tvdjenja slabe dualnosti sledi

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \leq (a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m)x_1 + \ldots + (a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m)x_n \leq b_1y_1 + \ldots b_my_m.$$

Ako su x i y optimalna rešenja, onda je na osnovu tvrdjenja jake dualnosti

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + \ldots b_my_m,$$

a odatle

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = (a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m)x_1 + \ldots + (a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m)x_n = b_1y_1 + \ldots b_my_m.$$

Sada je

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = (a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m)x_1 + \ldots + (a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m)x_n \Leftrightarrow$$

$$(a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m - c_1)x_1 + \ldots + (a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m - c_n)x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_1x_1 + z_2x_2 + \ldots + z_nx_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_1x_1 = 0 \wedge z_2x_2 = 0 \wedge \ldots \wedge z_nx_n = 0.$$

i slično

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)y_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)y_m = b_1y_1 + \ldots b_my_m$$

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)y_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)y_m = 0 \Leftrightarrow$$

$$-w_1x_1 - w_2x_2 - \ldots - w_nx_n = 0$$

$$w_1x_1 = 0 \wedge w_2x_2 = 0 \wedge \ldots \wedge w_nx_n = 0.$$

□