Konveksni skupovi

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. (U daljem tekstu interesovaće nas samo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$.) Neka su $A, B \subseteq V$. Označimo sa $\overline{AB}$ sledeći skup vektora

$$\overline{AB} = \{C : t \cdot A + (1-t) \cdot B, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Skup vektora $\mathcal{S} \subseteq V$ je *konveksan* ako za svaka dva vektora A, B skupa $\mathcal{S}$ važi da je $\overline{AB} \subseteq \mathcal{S}$.

Teorema 1 *Neka je $\{\mathcal{S}_i : i \in I\}$ familija konveksnih skupova. Tada je i skup $\mathcal{S} = \cap\{\mathcal{S}_i : i \in I\}$ konveksan skup.*

Dokaz. Neka su $A, B \in \mathcal{S}$. Na osnovu definicije preseka skupova sledi da za svako $i \in I$ važi $A, B \in \mathcal{S}_i$. Prema definiciji konveksnog skupa, tada za svako $i \in I$ važi $\overline{AB} \subseteq \mathcal{S}_i$, odakle $\overline{AB} \subseteq \mathcal{S}$. $\square$

1.1 Slučaj $\mathbb{R}^2$

Neka su u ravni date tačke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, i pretpostavimo da je $C(x_C, y_C)$ tačka koja pripada u duži $\overline{AB}$. Tada, za neko $t \in [0,1]$, važi

$$\begin{array}{lcl}
\overrightarrow{OC} & = & \overrightarrow{OB} + t(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}), \\
\overrightarrow{OC} & = & t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}, \\
(x_C, y_C) & = & t(x_A, y_A) + (1-t)(x_B, y_B), \\
(x_C, y_C) & = & (tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B).
\end{array}$$

Znači,

$$\overline{AB} = \{(tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B) : t \in [0,1]\}$$

Primetimo da se za $t = 0$ tačka C poklapa sa B, doke se ona za $t = 1$ poklapa sa A.
Za realne brojeve a, b, c sa osobinom $(a, b) \neq (0, 0)$ kažemo da je skup tačaka

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \leq c\} \tag{1.1}$$

poluravan.

Teorema 2 *Poluravan je konveksan skup.*

Dokaz. Neka je poluravan $\mathcal{S}$ data sa (1.1) i $A, B \in \mathcal{S}$. Tada je

$$ax_A + by_A \leq c \tag{1.2}$$
$$ax_B + by_B \leq c \tag{1.3}$$

Posmatrajmo proizvoljnu tačku $C \in \overrightarrow{AB}$ datu sa

$$(x_C, y_C) = (tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B), \quad t \in (0,1).$$

Ako nejednačinu (1.3) pomnožimo sa $t > 0$, a nejednačinu (1.3) sa $(1-t) > 0$, tada je

$$\begin{array}{rcrcr} tax_A & + & tby_A & \leq & tc \\ (1-t)ax_B & + & (1-t)by_B & \leq & (1-t)c \end{array}$$

odakle je zbir levih strana manji ili jednak sa zbirom desnih strana

$$a(tx_A + (1-t)x_B) + b(ty_A + (1-t)y_B) \leq c \text{ tj.}$$

$$ax_C + by_C \leq c. \text{ što znači da } C \in \overrightarrow{AB}.$$

$\square$

Posledica 1 *Presek familije poluravni je konveksan skup.*

Linearno programiranje - interpretacija u $\mathbb{R}^2$

Neka je data linearna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x, y) = cx + dy$.

Teorema 3 *Ako za tačke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ važi*

$$f(x_A, y_A) \leq f(x_B, y_B),$$

tada za svako $C \in \overline{AB}$ važi

$$f(x_A, y_A) \leq f(x_C, y_C) \leq f(x_B, y_B).$$

Dokaz. Vrednost funkcije f u tački C možemo zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} f(x_C, y_C) &= f(tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B) \\ &= c(tx_A + (1-t)x_B) + d(ty_A + (1-t)y_B) \\ &= t(cx_A + dy_A) + (1-t)(cx_B + dy_B). \end{aligned}$$

Odatle imamo dva zaključka:

(i) $f(x_C, y_C) \leq t(cx_B + dy_B) + (1-t)(cx_B + dy_B) = cx_B + dy_B = f(x_B, y_B)$.

(ii) $f(x_C, y_C) \geq t(cx_A + dy_A) + (1-t)(cx_A + dy_A) = cx_A + dy_A = f(x_A, y_A)$.

□

Neka je $\mathcal{S}$ koveksan poligon zadat sledećim sistemom linearnih nejednačina:

$$\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & \leq & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & \leq & c_2 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_nx & + & b_ny & \leq & c_n. \end{array} \tag{2.1}$$

Za tačku V sa osobinama

(i) $V \in \mathcal{S}$ i

(ii) V pripada preseku rubova dve različite poluravni date nejednačinama (2.1)

kažemo da je *ekstremna tačka (vrh, teme)* skupa $\mathcal{S}$.

Teorema 4 *Neka $\mathcal{S}$ ograničen konveksan poligon. Tada f dostiže svoju najveću (tj. najmanju) vrednost bar u jednom od temena datog poligona.*

Dokaz. Neka je $\{V_1, \dots, V_m\}$ skup svih temena datog konveksnog poligona i pretpostavimo da je M teme u kojem f ne dostiže manju vrednost nego u ostalim temenima. Pretpostavimo da postoji tačka $N \in \mathcal{S}$ u kojoj je $f(M) < f(N)$. Ako je tačka N na rubu poligona, tvrdjenje sledi na osnovu prethodnog tvrdjenja. U suprotnom, pretpostavimo da N leži u unutrašnjosti datog poligona. Povucimo pravu p kroz tačke M

i N, i označimo presek ruba poligona i prave p sa L. Tačka L pripada duži $\overline{V_i V_j}$ za neka dva temena sa ossobinom $f(V_i) \leq f(V_j)$. Tada je

$$f(M) < f(N) \leq f(L) \leq f(V_j)$$

što daje kontradikciju sa pretpostavkom da je M teme u kojem nije vrednost funkcije manja nego u nekom drugom temenu. $\square$

Teorema 5 *Neka je $f(x, y) = cx + dy$ i neka je $\mathcal{S}$ neograničen konveksan poligon. Ako f dostiže svoju najveću (tj. najmanju) vrednost nad S, onda f ima tu vrednost bar u jednom od temena datog poligona.*

Primer 1 *Odrediti maksimalnu i minimalnu vrednost funkcije*

- $f(x, y) = x - 2y$,
- $f(x, y) = x + y$,

ako je

$$\begin{array}{rcccl} x & + & y & \leq & 5 \\ -3x & + & y & \leq & 0 \\ 0 & \leq & x & \leq & 4 \\ 0 & \leq & y & \leq & 3 \end{array}$$