Chapter 1

Skupovi, relacije, funkcije

1.1 Skup, torka, multiskup

1.1.1 Skup

Pojam skupa ne definišemo eksplicitno. Intuitivno *skup* prihvatamo kao konačnu ili beskonačnu *kolekciju* objekata (ili *elemenata*)u kojoj:

(i) redosled navodjenja elemenata nije bitan i

(ii) elementi se ne ponavljaju.

Koristićemo notaciju

$$a \in A$$

da označimo da element a pripada skupu A. Ako element a ne pripada skupa A pišemo $a \notin A$. Skupove ćemo označavati velikim slovima, a njihove elemente malim slovima abecede. Uobičajene su i sledeće oznake:

$\mathbb{N}$ - za skup prirodnih brojeva,

$\mathbb{Z}$ - za skup celih brojeva,

$\mathbb{Q}$ - za skup racionalnih brojeva i

$\mathbb{R}$ - za skup realnih brojeva.

Skup se predstavlja:

- navodjenjem elemenata u vitičastim zagradama ili
- navodjenjem osobina S elemenata skupa, u obliku $\{x : S(x)\}$. (Čitamo: „skup svih elemenata x koji zadovoljavaju $S(x)$).”

Primer 1.1.1 *Skupovi mogu biti zadati na sledeći način:*

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$,

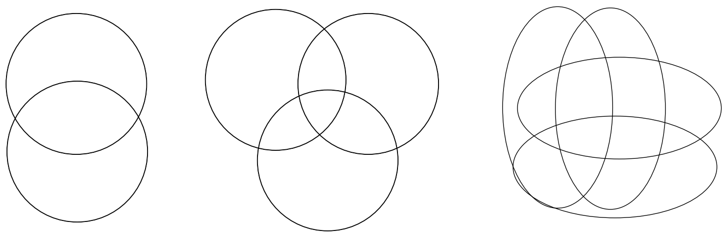

Figure 1.1: Vennovi dijagrami za dva,tri i četiri skupa.

(b) $\{x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5\}, \{x : x \in \mathbb{N} \wedge 3|x\}$.

Primer 1.1.2 *Za proizvoljne elemente a i b važi*

$\{a, b\} = \{b, a\}$, *i*

$\{a, a, b\} = \{a, b\}$.

Prazan skup je skup koji ne sadrži nijedan element i označavaćemo ga sa $\emptyset$ ili $\{\}$. (Napomena: primetimo da se on razlikuje od skupa $\{\emptyset\}$ koji sadrži element $\emptyset$.)
Partitivni skup skupa A, u oznaci $\mathbb{P}(A)$, je skup svih podskupova skupa A :

$$\mathbb{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Primer 1.1.3 *Neka je $A = \{0, 1, 2\}$. Tada je*

$$\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Kažemo da su skupovi A i B *jednaki,* u oznaci $A = B$, ako važi

$$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Kažemo da je A *podskup* skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako važi

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Za proizvoljne skupove A i B definišemo

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$, *razliku* skupova A i B,

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, *uniju* skupova A i B i

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$, *presek* skupova A i B.

Ako je $A \cap B = \emptyset$, kažemo da su skupovi A i B *disjunktni.*

Neka su $X, Y, Z \subseteq A$. Tada važi	
$\emptyset' = A$	$A' = \emptyset$
$(X')' = X$	
$X \setminus X = \emptyset$	$X \setminus \emptyset = X$
$X \cup \emptyset = X$	$X \cap A = X$
$X \cup A = A$	$X \cap \emptyset = \emptyset$
$X \cup X' = A$	$X \cap X' = \emptyset$
zakoni idempotencije:	
$X \cup X = A$	$X \cap X = X$
zakoni asocijativnosti:	
$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$	$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
zakoni komutativnosti:	
$X \cup Y = Y \cup X$	$X \cap Y = Y \cap X$
zakoni distributivnosti:	
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
zakoni apsorpcije:	
$X \cup (X \cap Y) = X$	$X \cap (X \cup Y) = X$
De Morganovi zakoni:	
$(X \cup Y)' = X' \cap Y'$	$(X \cap Y)' = X' \cup Y'$
(gde je $X' = A \setminus X$)	

Table 1.1: Neki zakoni koji važe za operacije na skupovima

1.1.2 Uredjena n-torka elemenata

Uredjena torka elemenata poseduje sledeće osobine:

(i) redosled navodjenja elemenata jeste bitan i

(ii) elementi mogu da se ponavljaju.

Uredjena n-torka $(a_1, \ldots, a_n),\ n \geq 1$, se definiše na sledeći način:

$n = 1$: $(a_1) = a_1$

$n = 2$: $(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ (*uredjen par*)

$n \geq 3$: r $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$. (rekurzivno)

Element $a_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, se zove i-ta *komponenta (koordinata)* uredjene n-torke $(a_1, \ldots, a_n)$.

Primer 1.1.4 *Za skupove važi*

$$\{1, 1, 2, 2, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$$

dok je za uredjene torke elemenata

$$(1, 1, 2, 2, 2) \neq (1, 2) \quad i \quad (1, 2) \neq (2, 1).$$

Na osnovu definicije jednakosti skupova, možemo dokazati da su dva uredjena para jednaka ako i samo ako su im jednake odgovarajuće komponente, što je formulisano sledećim tvrdjenjem.

Teorema 1.1.1 *Uredjeni parovi (a, b) i (c, d) su jednaki ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}(a, b) = (c, d) \quad &\Leftrightarrow \quad \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}\\ &\Leftrightarrow \quad (\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}) \vee (\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\})\\ &\Leftrightarrow \quad (a = c \wedge b = d) \vee (a = b = c = d).\end{aligned}$$

□

Posledica 1.1.1

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2 \ \wedge \ldots \wedge \ a_n = b_n.$$

Dokaz. Indukcijom po n. □

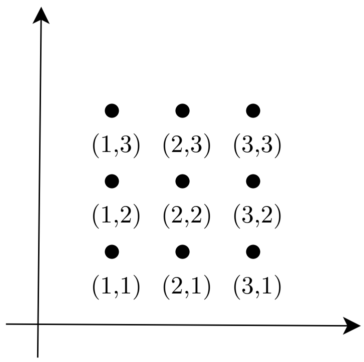

Figure 1.2: Kvadrat skupa $A = \{1, 2, 3\}$.

Dekartov proizvod skupova

Dekartov (direktan) proizvod n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ i $A_n, n \geq 2$, se definiše na sledeći način:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ako je $n = 2$, onda važi

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : \ a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2\}.$$

Za $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, n-ti Dekartov stepen skupa A, u oznaci A^n, je

$$A^n = \begin{cases} \{\emptyset\} & , n = 0 \\ A & , n = 1 \\ \{(a_1, \ldots, a_n) |\ a_i \in A, i = 1, \ldots, n\} & , n \geq 2. \end{cases}$$

1.1.3 Multiskup

Multiskup (kesa), za razliku od skupa, je kolekcija elemenata u kojoj

(i) redosled navodjenja elemenata nije bitan i

(ii) elementi mogu da se ponavljaju konačno mnogo puta.

Broj pojavljivanja nekog elementa u multiskupu je jedinstven pozitivan ceo broj, dok broj različitih elemenata u multisupu može biti beskonačan. Ako se x pojavljuje tačno n puta u skupu M, pišemo

$$x \in^n M.$$

Za multiskup u kojem se x_1 pojavljuje n_1 puta, x_2 se pojavljuje n_2 puta itd, pišemo

$$[x_1, x_2, \ldots]_{n_1, n_2, \ldots}$$

ili u uglastim zagradama navodimo sva pojavljivanja elemenata.

Primer 1.1.5

$$\{1,1,2,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\},$$
$$(1,1,2,2,2) \neq (1,2) \quad i \quad (1,2) \neq (2,1), \text{ dok je}$$
$$[1,1,2,2,2] \neq [1,2] \quad i \quad [1,2] = [2,1].$$

1.2 Relacije

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. m-arna relacija ρ skupa A je bilo koji podskup od A^m,

$$\rho \subseteq A^m.$$

Relacija arnosti m sa n elemenata se može predstaviti matricom formata $m \times n$ u kojoj su kolone elementi relacije ρ.

$$\rho = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.1 Binarne relacije

Ako je $n = 2$ kažemo da je relacija binarna. Za binarnu relaciju ρ, umesto $(a,b) \in \rho$, koristimo i sledeće ekvivalentne zapise:

$$a\rho b \qquad \rho(a,b) \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \rho.$$

Skup svih binarnih relacija na A označavamo sa $R_A^{(2)}$.

Kažemo da je binarna relacija $\rho \in R^{(2)}$

(R) Refleksivna, ako $(\forall a \in A)\ (a,a) \in \rho$,

(I) Antirefleksivna, ako $(\forall a \in A)\ (a,a) \notin \rho$,

(S) Simetrična: ako $(\forall a,b \in A)\ (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$,

(A) Antisimetrična: ako $(\forall a,b \in A)\ (a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b$,

(T) Tranzitivna: ako $(\forall a,b,c \in A)\ (a,c) \in \rho \wedge (c,b) \in \rho \Rightarrow (a,b) \in \rho$.

Na primer, relacija $\leq$ je refleksivna na skupu realnih brojeva, dok je relacija $<$ irefleksivna.

Primer 1.2.1 *Neka je $A = \{0,1\}$. Tada je*

$$\leq \; = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Relacije poretka

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je relacija poretka (ili parcijalnog uredjenja) na skupu A ako je

(R) refleksivna,

(A) antisimetrična i

(T) tranzitivna.

Relacija ρ je relacija strogog poretka (striktnog uredjenja) ako je antirefleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Ako je ρ relacija poretka na nepraznom skupu A, onda se uredjen par (A, ρ) naziva parcijalno uredjen skup (ili poset).

Primer 1.2.2 *(a)* $(\{0,1,2\}, \leq)$ *je parcijalno uredjen skup, gde je*

$$\leq = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $(\{0,1,2\}, <)$ *je strogo parcijalno uredjen skup, gde je*

$$< = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$, *gde je* $A = \{0,1\}$, *je parcijalno uredjen skup.*

(d) $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$, *gde je* $A = \{0,1,2\}$, *je parcijalno uredjen skup.*

Relacije poretka se mogu predstaviti uz pomoć Hasevih dijagrama. U Haseovom dijagramu, elementi skupa A su predstavljeni tačkama, tako da je za $(x, y) \in \rho$ za koje je $x \neq y$, tačka x je nacrtana niže od tačke y. Ako izmedju njih nema drugih elemenata, onda postoji dužizmedju njih. Ilustracija je data u sledećem primeru.

Primer 1.2.3 *Neka je* $(\{2,3,4,5,6,15,30\}, |)$ *parcijalno uredjen skup, gde je*

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})\ x|y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) y = kx.$$

Neka je (A, ρ) parcijalno uredjen skup.

- $a \in A$ je najmanji element skupa A ako za sve $x \in A$ važi $(a, x) \in \rho$.
- $a \in A$ je najveći element skupa A ako za sve $x \in A$ važi $(x, a) \in \rho$.
- $a \in A$ je minimalni element skupa A ako ne postoji element $x \in A$ za koji je $(x, a) \in \rho$ i $x \neq a$.

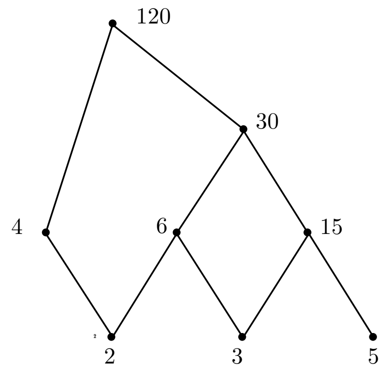

Figure 1.3: Haseovo dijagram za $(\{2, 3, 4, 5, 6, 15, 30, 120\}, |)$.

- $a \in A$ je maksimalni element skupa A ako ne postoji element $x \in A$ za koji je $(a, x) \in \rho$ i $x \neq a$.

Neka je $X \subset A$.

Element $a \in A$ je donja granica skupa X ako je $(a, x) \in \rho$ za svako $x \in X$.

Element $a \in A$ je najveća donja granica (infinum od X), u oznaci $\inf X$, ako je a najveći element skupa donjih granica.

Element $a \in A$ je gornja granica skupa X ako je $(x, a) \in \rho$ za svako $x \in X$.

Element $a \in A$ je najmanja gornja granica (supremum od X), u oznaci $\sup X$ ako je a najmanji element skupa gornjih granica.

Neka je (A, ρ) parcijalno uredjen skup. Kažemo da je on

- totalno uredjen (lanac) ako za sve elemente $a, b \in A$ važi $(a, b) \in \rho$ ili $(b, a) \in \rho$.
- antilanac ako za sve elemente $a, b \in A$ važi $(a, b) \notin \rho$ i $(b, a) \notin \rho$.
- dobro uredjen ako za svaki neprazni podskup $X \subseteq A$ ima najmanji element.

Relacije ekvivalencije

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je relacija ekvivalencije na skupu A ako je

(R) refleksivna,

(S) simetrična i

(T) tranzitivna.

Klasa ekvivalencije elementa $x \in A$ je skup

$$[x]_\rho = \{y \in A : (x, y) \in \rho\}.$$

Koriste se još i oznake C_x i x/ρ.
Skup svih klasa ekvivalencije

$$[A]_\rho = \{[x]_\rho : x \in A\}$$

je količnički skup (ili faktor skup).

Primer 1.2.4 *(a) Najpoznatija relacija ekvivalencije je svakako relacija = na skupu realnih brojeva.*

(b) Neka je $A = \{0, 1, 2\}$. Za relacije

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad [A]_{\Delta_A} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad [A]_{A^2} = \{\{0, 1, 2\}\}$$

kažemo da su trivijalne relacije ekvivalencije na A. Pored toga, postoje još tri relacije ekvivalencije na skupu A :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad [A]_{\rho_1} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [A]_{\rho_2} = \{\{2\}, \{0, 1\}\}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad [A]_{\rho_3} = \{\{1\}, \{0, 2\}\}$$

Particija skupa A je skup $\{A_1, \ldots, A_n\}$ za koji važi

(i) za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ $A_i \neq \emptyset$,

(ii) $A = \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$ i

(iii) za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ važi $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Za svaku relaciju ekvivalencije na skupu A, količnički skup je jedna particija skupa A.

1.3 Funkcije

Funkcija (preslikavanje, transformacija) skupa D u skup B, piše se

$$f : D \to B,$$

je podskup skupa $D \times B$ takav da za svako $a \in D$ postoji tačno jedno $b \in B$ sa osobinom $(a, b) \in f$. U tom slučaju pišemo $f(a) = b$ ili $f : a \mapsto b$.

Tada se za svako $X \subseteq D$ definiše skup $f(X)$ (im f) na sledeći način

$$f(X) = \{b \in B| \quad \text{postoji } a \in X \text{ takvo da je } f(a) = b\}.$$

Skup svih funkcija skupa D u skup B se označava sa B^D.

Neke vrste funkcija:

Preslikavanje $f : A \to B$ je $1-1$ (injekcija) akko je

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

Preslikavanje $f : A \to B$ je *na* (sirjekcija) akko je

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b).$$

Preslikavanje $f : A \to B$ je (bijekcija) akko je $1-1$ i na.

Operacije na skupu funkcija:neka je $f : A \to B$ i $g : B \to C$.

- Kompozicija funkcija f i g je funkcija $g \circ f : A \to C$ definisana je sa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Dijagonalna relacija $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ je funkcija i zovemo je identična funkcija i obeležavamo sa 1_A.
- Kažemo da je $f^* : B \to A$ inverzna funkcija funkcije f ako važi

  $$f \circ f^* = 1_B \qquad f^* \circ f = 1_A.$$

  Inverznu funkciju, ako postoji, obeležavamo sa f^{-1}.

1.4 Zadaci

1. Ako skup A ima n elemenata, koliko elemenata ima skup $\mathbb{P}(A)$?
2. Dokazati da važe zakoni dati u Tabeli 1.1.1.
3. Dokazati da za sve $X, Y, Z \subseteq A$ važi
   (a) $X \setminus Y = X \cap Y'$,
   (b) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$,

(c) $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$,

(d) $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$.

4. Dokazati da za sve $X, Y \subseteq A$ važi formula uključenja-isključenja
$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$
Dokaz. Ako su A i B disjunktni skupovi, onda je $|A \cup B| = |A| + |B|$. Kako je $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$ i skupovi $X \setminus Y$ i $X \cap Y$ su disjunktni, to je
$$|X| = |X \setminus Y| + |X \cap Y|.$$
Sličnim rezonovanjem je
$$|Y| = |Y \setminus X| + |X \cap Y|.$$
Odatle je
$$\begin{aligned} |X \cup Y| &= |(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \cup (Y \setminus X)| \\ &= |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X| \\ &= (|X| - |X \cap Y|) + |X \cap Y| + (|Y| - |X \cap Y|) \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y| \end{aligned}$$
□

5. Dokazati da za sve $X, Y, Z \subseteq A$ važi formula uključenja-isključenja $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$.

6. Na prvoj godini studija geodezije ima 50 studenata. U januarskom ispitnom roku će njih 24 izaći na ispit iz Algebre, 20 na ispit iz Analize I, a 13 na ispit iz Fizike. Algebru i Analizu I će polagati 6 studenata, Analizu I i Fiziku 5 studenata, a Algebru i Fiziku 4 studenta. Ako jedino Marko polaže sva tri ispita, koliko studenata neće izaći ni na jedan od ta tri ispita.

7. **Teorema 1.4.1** *Svaki dobro uredjen skup je totalno uredjen skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $a, b \in A$ proizvoljno izabrani. Kako je skup A dobro uredjen, to njegov podskup $\{a, b\} \subseteq A$ ima najmanji elemenat. Ako je taj najmanji elemenat a onda je $(a, b) \in \rho$. Inače, ako je najmanji b, onda je $(b, a) \in \rho$. □

8. **Teorema 1.4.2** *Parcijalno uredjen skup ima najviše jedan najmanji (najveći) element.*

Dokaz. Pretpostavimo da parcijalno uredjeni skup (A, ρ) ima dva najmanja elementa a i b. Tada je $(a, b) \in \rho$ zato što je a najmanji element i $(b, a) \in \rho$ zato što je b najmanji element. Kako je relacija ρ antisimetrična, sledi $a = b$. □

9. Dokazati da je presek dve relacije ekvivalencije na $A \neq \emptyset$ relacija ekvivalencije na skupu A.

10. Dokazati da unija dve relacije ekvivalencije na skupu A ne mora biti relacija ekvivalencije na skupu A. (Konstruisati odgovarajući primer.)

11. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ i neka je
$$\rho = \{(x, y) \in A^2 : 4|(x - y)\}.$$
Ispitati da li je ρ relacija ekvivalencije i, ako jeste, odrediti količnički skup skupa A po relaciji ρ.

12. **Teorema 1.4.3** *Ako je ρ relacija ekvivalencije na A, onda važi*
$$(\forall x, y \in A)(x, y) \in \rho \Leftrightarrow [x]_\rho = [y]_\rho.$$
Dokaz.
($\Rightarrow$) Neka je $(x, y) \in \rho$. Sledi,
$$z \in [x]_\rho \Rightarrow (z, x) \in \rho \wedge (x, y) \in \rho \Rightarrow (z, y) \in \rho \Rightarrow z \in [y]_\rho,$$
čime smo dokazali da je $[x]_\rho \subseteq [y]_\rho$. Slično,
$$z \in [y]_\rho \Rightarrow (y, z) \in \rho \wedge (x, y) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho \Rightarrow z \in [x]_\rho,$$
odakle je $[y]_\rho \subseteq [x]_\rho$.
($\Leftarrow$) Neka je $[x]_\rho = [y]_\rho$. Tada je
$$(x, x) \in \rho \Rightarrow x \in [x]_\rho = [y]_\rho \Rightarrow (x, y) \in \rho.$$
□

13. **Teorema 1.4.4** *Neka su $x, y \in A$ i ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada je*
$$[x]_\rho \cap [y]_\rho = \emptyset \text{ ili } [x]_\rho = [y]_\rho.$$
Dokaz. Moguća su dva slučaja: $[x]_\rho \cap [y]_\rho = \emptyset$ ili je $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \emptyset$. Pretpostavimo da važi drugi slučaj, tj. da postoji $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Na osnovu definicije preseka tada $z \in [x]_\rho$ i $z \in [y]_\rho$. Na osnovu definicije klase ekvivalencije, $(x, z) \in \rho$ i $(z, y) \in \rho$. Kako je ρ tranzitivna relacija, to je $(x, y) \in \rho$, odakle na osnovu prethodne teoreme sledi $[x]_\rho = [y]_\rho$. □

14. Neka je $A = \{0, 1\}$. Napisati sve binarne relacije koje su
    (a) relacije poretka.
    (b) relacije ekvivalencije.

15. Neka je $A = \{0, 1, 2\}$. Napisati sve binarne relacije koje su

(a) relacije poretka.

(b) relacije ekvivalencije.

16. Dokazati da na svakom konačnom nepraznom skupu A postoji neparan broj relacija poretka.

17. Dokazati da je $\subseteq$ relacija poretka.

18. Nacrtati Haseove dijagrame parcijalno uredjenih skupova

    (a) $(\{1, 3, 5, 15, 30, 45\}, |)$

    (b) $(\{1, 2, 3, 5, 30, 60\}, |)$

    i odrediti najmanje, najveće, minimalne i maksimalne elemente.