Chapter 3

Polje kompleksnih brojeva

U polju realnih brojeva, nisu sve jednačine oblika $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, *rešive. Npr. jednačina* $x^2 = -1$ *nema rešenja u skupu realnih brojeva. Najmanje polje u kojem jednačina oblika* $x^2 = a$ *ima rešenje za svaki realan broj* a *je polje kompleksnih brojeva.*

Kažemo da skup uredjenih parova realnih brojeva

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

skup kompleksnih brojeva.
Neka su na $\mathbb{C}$ *definisane binarne operacije* $+$ *i* $\cdot$:

$$\begin{array}{ccccc} (a,b) & + & (c,d) & = & (a+c, b+d) \\ (a,b) & \cdot & (c,d) & = & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

i unarne operacije $-, ^{-1}$:

$$\begin{array}{ccl} -(a,b) & = & (-a,-b) \\ (a,b)^{-1} & = & \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right), \quad (a,b) \neq (0,0). \end{array}$$

Teorema 3.0.5 *Algebarska struktura* $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

Dokaz. *Ostavljamo čitaocu za vežbu.* $\square$

Teorema 3.0.6 *Postoji potpolje polja* $\mathcal{C}$ *koje je izomorfno polju realnih brojeva.*

Dokaz. *Nosač potpolja je* $\mathbb{R}' = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$, *a izomorfizam je preslikavanje skupa* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}'$ *definisano sa* $a \mapsto (a,0)$. $\square$

3.1 Imaginarna jedinica

Za element $(0, 1)$ *kažemo da je imaginarna jedinica i označavamo ga sa* i. *Tada je*

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1 \\ i^3 &= i^2\cdot i = (-1)\cdot i = -i \\ i^4 &= i^3\cdot i = (-i)\cdot i = -i^2 = 1 \\ i^5 &= i^4\cdot i = 1\cdot i = i. \end{aligned}$$

Primenom matematičke indukcije možemo dokazati da za svako $k \in \mathbb{N}$ *važi*

$$\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned}$$

3.2 Algebarski oblik

Koristeći imaginarnu jedinicu, svaki kompleksan broj možemo zapisati u sledećem obliku:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Kažemo da je kompleksan broj

$$z = x + yi$$

dat u algebarskom obliku i da je x *realni deo, a* y *imaginarni deo kompleksnog broja* z. *Pišemo*

$$x = Re\{z\}, \quad y = Im\{z\}.$$

Za kompleksne brojeve oblika yi, $y \in \mathbb{R}$, *kažemo da su čisto imaginarni.*

3.3 Geometrijska interpretacija

Ako u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu realnim delovima odgovara x *osa, a imaginarnim* y *osa, kažemo da je data kompleksna ravan (Slika 3.9). Svakom kompleksnom broju* (a, b) *odgovara tačka u toj ravni.*

3.4 Konjugovano kompleksni brojevi

Kažemo da su $x + yi$ *i* $x - yi$ *konjugovano kompleksni brojevi. Konjugovano kompleksni broj broja* $z = x + yi$ *označavamo sa* $\bar{z}$, *tj.*

$$\bar{z} = x - yi.$$

Teorema 3.4.1 *Za sve* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *važi:*

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

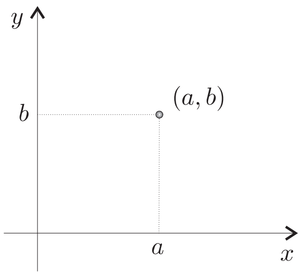

Figure 3.1: Kompleksna ravan

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

(iii) $\bar{\bar{z}} = z$

Dokaz. *Neka je* $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1$ *i* $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$(i) \quad \begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1\bar{z}_2. \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$$

□

3.5 Modul i argument kompleksnog broja

Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ *pridružujemo njegov* *modul* $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Osobine modula:

- $|z| \geq 0$;
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Ako je $z = a + bi \neq (0,0)$, *onda je* $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *rastojanje* z *od koordinatnog početka. Ugao* φ *koji zaklapa duž* Oz *sa pozitivnim smerom* x*-ose se naziva* *argument* *kompleksnog broja i označava se sa* $\arg\ z$. *Može se definisati sa*

$$\arg\ (a,b) = \begin{cases} arctg\frac{b}{a} & , a > 0 \\ \pi + arctg\frac{b}{a} & , a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

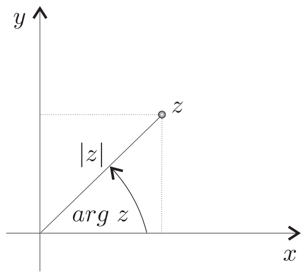

Figure 3.2: Modul i argument kompleksnog broja

Definišemo i

$$\mathtt{Arg}\ z = \{\arg\ z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.6 Trigonometrijski oblik

Kompleksan broj z se može zapisati u trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Koristeći identitete

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1+\varphi_2) &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\end{aligned}$$

za proizvod kompleksnih brojeva važi

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

tj. module pomnožimo a argumente saberemo.

Takodje sledi

$$\begin{aligned}z^{-1} &= \tfrac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\\ \tfrac{z_1}{z_2} &= \tfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\\ z^n &= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\end{aligned}$$

3.7 Eksponencijalni oblik

Može se dokazati da za svako $\varphi \in (-\pi,\pi]$ važi

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Tada je

$$z = re^{\varphi i}$$

i kažemo da je time data eksponencijalna reprezentacija kompleksnog broja.

U eksponencijalnoj reprezentaciji je

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\
\tfrac{z_1}{z_2} &= \tfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \\
z^n &= r^n e^{n\varphi i}, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

3.8 Moivreova formula i koren kompleksnog broja

Ako je $z = e^{\varphi i}$, što je u kompleksnoj ravni tačka na jediničnoj kružnici, onda za formulu

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

kažemo da je Moivrov obrazac, prema francuskom matematičaru koji ga je otkrio 1707. godine.

3.8.1 Primena na rešavanje jednačine $z^n = 1$.

Rešiti jednačinu $z^n = 1$, znači odrediti sve kompleksne brojeve $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ koji je zadovoljavaju. Kako je $1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$ za svako $k \in \mathbb{Z}$, na osnovu Moivreove formule sledi

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1.$$

Odatle sledi da je za svako $k \in \mathbb{Z}$ kompleksan broj $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}}$ rešenje polazne jednačine.

Zbog periodičnosti trigonometrisjkih funkcija $\cos$ i $\sin$ možemo zaključiti da je

$$\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} : k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} : k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Teorema 3.8.1 (Moivreova teorema, 1737) *Jednačina*

$$z^n = w, \qquad w = re^{\varphi i} \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$$

ima tačno n različitih rešenja $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, gde je

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\
z_k &= \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Dokaz. *Neka je $w = re^{i\varphi}$ i $z = se^{i\psi}$. Tada je $z^n = w$ akko $s^n e^{n\psi i} = re^{i\varphi}$. Znači, mora da važi*

$$s^n = r \quad i \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \text{ tj.}$$

$$s = \sqrt[n]{r} \quad i \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

gde je $k \in \mathbb{Z}$. Kako su sin *i* cos *periodične funkcije sa osnovnim periodom 2π, dobijamo n različitih korena oblika*

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

(Napomena: Isti skup rešenja dobijamo kada k uzima vrednosti iz proizvoljnog skupa od n uzastopnih celih brojeva. Često se uzima $k \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.)

Ako primetimo da je modul svakog korena jednak $\sqrt[n]{r}$, a da se argumenti korena z_k i z_{k+1}, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, razlikuju za $\frac{2\pi}{n}$, možemo zaključiti da koreni leže na centralnoj kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ i čine temena pravilnog n-tougla.

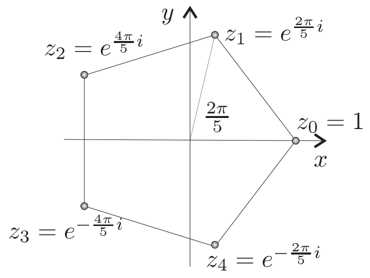

Figure 3.3: Rešenja jednačine $z^5 = 1$.

□

3.9 Geometrijske transformacije

Translacija za ω

Za dati kompleksan broj w, funkcija $f_\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$f_\omega(z) = z + \omega$$

odredjuje translaciju za radijus vektor tačke ω.

Rotacija oko O za ugao α

Za dati ugao α, funkcija $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$f_\alpha(z) = e^{\alpha i} z$$

odredjuje rotaciju oko koordinatnog početka za ugao α.

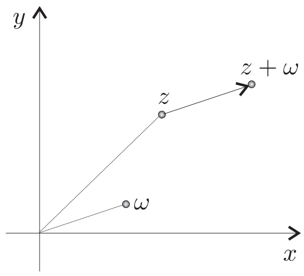

Figure 3.4: Translacija za vektor položaja tačke ω.

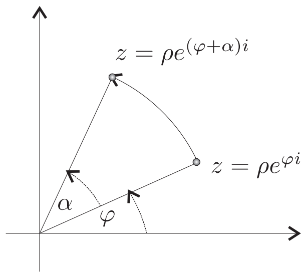

Figure 3.5: Rotacija oko koordinatnog početka za ugao α.

Rotacija oko ω za ugao α

Za dati ugao α i kompleksan broj ω, preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisano sa

$$f(z) = \omega + (z - \omega)e^{\alpha i}$$

odredjuje u kompleksnoj ravni rotaciju oko tačke ω za ugao α.

3.10 Zadaci

1. ***Teorema 3.10.1*** *Za svako $z \in \mathbb{C}$ važi:*
   (i) $Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
   (ii) $Im\{z\} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

   Dokaz. Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= x + iy + x - iy = 2x \Rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ z - \bar{z} &= x + iy - x + iy = 2yi \Rightarrow y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{aligned}$$

□

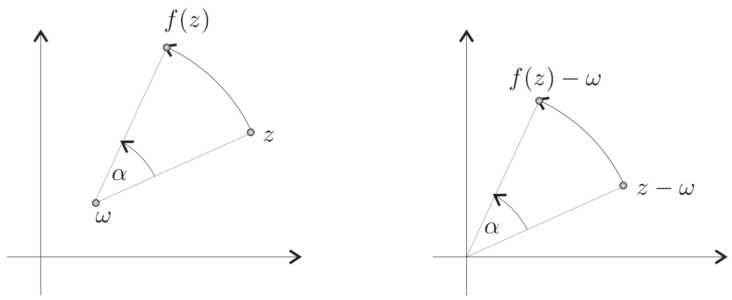

Figure 3.6: Rotacija oko ω za ugao α.

2. *Rešiti jednačinu* $z^3 = 27i$.
3. *Rešiti jednačinu* $z^4 = 1$.
4. *Sledeće brojeve napisati u obliku* $x+yi$ *i predstaviti ih u kompleksnoj ravni:*
   (a) $z_1 = 3 + \sqrt{-2}$,
   (b) $z_2 = 2 + \sqrt{-1}$,
   (c) $z_3 = (3+4i) + (-5+6i)$,
   (d) $z_4 = (1-2i)(2+i)$,
   (e) $z_5 = \frac{1}{1+2i}$,
   (f) $z_6 = i^{237}$.
5. *Napisati sledeće brojeve u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku, a zatim ih predstaviti u kompleksnoj ravni:*
   (a) $z_1 = 1 + i$
   (b) $z_2 = 3 - 3i$
   (c) $z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
   (d) $z_4 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
6. *Dokazati da važi*
   (a) $\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}$,
   (b) $\sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}$,
   (c) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.
7. *Dokazati sledeće identitete:*
   (a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
   (b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
8. *Predstaviti u kompleksnoj ravni skup rešenja jednačine*
   (a) $|z-3| < 1$
   (b) $|z-5i| < 2$
   (c) $|z-(3-2i)| = 2$

(d) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2.$

9. *Ako su* z_1, z_2 *i* z_3 *temena jednakostraničnog trougla, dokazati da važi*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3.$$