

## Chapter 7

# Determinante

### 7.1 Permutacije

**Permutacija** je bijektivno preslikavanje nekog skupa u samog sebe. Neka je  $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$  i  $\pi : S_n \rightarrow S_n$  proizvoljna permutacija.

Ako je  $i < j$  i  $\pi(i) > \pi(j)$  tada kažemo da je  $(\pi(i), \pi(j))$  inverzija permutacije  $\pi$ . Broj svih inverzija permutacije  $\pi$  označavamo sa  $Inv(\pi)$ .

$$Inv(\pi) = |\{(\pi(i), \pi(j)) : i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)\}|.$$

**Primer 7.1.1** Broj inverzija u permutaciji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

jednak je  $Inv(\pi) = 5 + 1 + 3 + 2 + 0 = 11$ .

### 7.2 Definicija determinante

**Determinanta reda  $n$**  je preslikavanje  $det : M_n \rightarrow F$  skupa svih matrica reda  $n$  u nosač  $F$  polja, definisano sa

$$det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Koriste se još i oznake  $|A|$  i

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$n=1: |a_{11}| = a_{11}$$

$$n=2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n=3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

### 7.3 Osobine determinante

Kako  $n$  raste, tako broj  $n!$  sabiraka eksponencijalno raste i čak i za relativno male vrednosti  $n$  dovodi do veoma velikog broja koraka izračunavanja. Zato se koriste metode izračunavanja koje koriste osobine determinanti, a njih dokazujemo na osnovu definicije.

- Ako su  $A$  i  $B$  kvadratne matrice, onda je

$$(a) |A^T| = |A|,$$

$$(b) |AB| = |A||B|.$$

- Ako važi

$$(a) \text{ da su dve vrste matrice } A \text{ proporcionalne, ili}$$

$$(b) \text{ da su svi elementi jedne vrste jednaki nuli}$$

$$\text{onda je } |A| = 0.$$

- Ako je  $A$  trougaona matrica, onda je  $|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

Determinantu možemo izračunati primenom elementarnih transformacija na vrstama (i kolonama):

- Ako je matrica  $B$  dobijena od matrice  $A$  zamenom mesta dve vrste, onda je

$$|B| = -|A|;$$

- Ako je matrica  $B$  dobijena od matrice  $A$  tako što se elementi jedne vrste pomnože skalarom  $c \neq 0$ , onda je

$$|B| = c|A|;$$

- Ako je matrica  $B$  dobijena od matrice  $A$  dodavanjem elementima vrste  $j$  elemenata vrste  $i$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ), pomnoženih sa  $c \neq 0$ , tada je

$$|B| = |A|.$$

## 7.4 Razvoj po vrsti ili koloni

Laplasov razvoj determinante po vrstama ili kolonama je još jedan način da se pojednostavi njeno izračunavanje. Za sve  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  važe sledeći razvoji:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \text{ i} \\ |A| &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \end{aligned}$$

## 7.5 Primena na rešavanje sistema linearnih jednačina - Kramerovo pravilo

Neka je dat sistem  $n$  linearnih jednačina sa  $n$  nepoznatih:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad AX = B$$

Neka je za svako  $i \in \{1, \dots, n\}$  matrica  $A_i$  dobijena od matrice sistema  $A$  kada se kolona  $i$  zameni vektorom kolonom  $B$ ,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 7.5.1** Ako je  $|A| \neq 0$ , onda sistem ima jedinstveno rešenje

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

*Dokaz.* Ako je  $|A| \neq 0$ , onda je  $A$  regularna i važi

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}A^*B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

odakle je

$$x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}}{|A|}. \quad (7.1)$$

Sa druge strane, razvoj determinante  $|A_j|$  po koloni  $j$  je

$$|A_j| = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}$$

što uvrštavanjem u jednačinu (7.1) daje

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}.$$

□