Rečnik i Simpleks tabela

1.1 Bazno dopustivo rešenje

Neka je dat sistem m linearnih jednačina sa $n+m$ nepoznatih uz uslov da su sve nepoznate nenegativne. Kažemo da je $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m})$ *bazno dopustivo rešenje* datog sistema ako

(1) a jeste rešenje datog sistema linearnih jednačina,

(2) za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi $a_i \geq 0$,

(3) postoji m komponenti iz $(a_1, \ldots, a_{m+n})$ koje su jednake 0 (*nebazne*) i

(4) preostalih n komponenti iz $(a_1, \ldots, a_{m+n})$ su nenegativne i multiskup kolona matrice sistema koje odgovaraju tim nepoznatim je linearno nezavisan. (*bazne*)

1.2 Rečnik

Neka je dat problem linearnog programiranja:
Odrediti

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{S}} (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

gde je $\mathcal{S}$ skup rešenja sistema linearnih nejednačina

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

u kojem važi

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0.$$

Kažemo da je odgovarajući *rečnik* oblika

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m \\
-c_1x_1 & - & c_2x_2 & - & \dots & - & c_nx_n- & & & = & -z
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{x+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

što se u tabelarnom obliku može predstaviti na sledeći način:

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	
	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
		$\dots$	$\dots$				$\dots$		
	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	$-z$

Jedno bazno dopustivo rešenje prethodnog sistema linearnih jednačina je

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m).$$

Ako u tabelarnom obliku još naznačimo koje su odgovarajuće bazne promenljive, onda kažemo da je data *Simpleks tabela*:

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
		$\dots$	$\dots$				$\dots$		
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	$-z$

Uobičajeno da se umesto $-z$ piše samo 0, što je vrednost funkcije cilja u datom bazno dopustivom rešenju, a da se tek u posednjem koraku Simpleks algoritma, kada se očitava vrednost funkcije cilja, od vrednosti na tom mestu oduzme z.

Teorema 1 *Ako problem linearnog programiranja ima rešenje, onda postoji bazno doputivo rešenje u kojem funkcija cilja dostiže optimalnu vrednost.*

IdejaSimpleks algoritma

Ilustrovaćemo ideju Simpleks algoritma na sledećem primeru.

Primer 1 *Odrediti*

$$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathcal{S}}(x_1+x_2)$$

ako je $\mathcal{S}$ skup rešenja sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

što zapisujemo u obliku Simpleks tabele na sledeći način:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	3	1	1	0	6
x_4	1	3	0	1	6
	-1	-1	0	0	0

Rečnik

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 6 & - & 3x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & 3x_2 \\ z & = & & & x_1 & + & x_2 \end{array}$$

odgovara (polaznom, inicijalnom) bazno dopustivom rešenju

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 6).$$

Pitanje je da li postoji bazno dopustivo rešenje sa većom vrednošću funkcije cilja. Posmatramo bazno dopustiva rešenja koja dobijamo zamenjivanjem jedne bazne i jedne nebazne promenljive. Možemo zaključiti da ako povećavamo x_1 raste i vrednost funkcije cilja. Isto važi i za x_2. Izaberimo za promenljivu koja ulazi u bazu x_1. Pitanje je koju promenljivu izbaciti iz baze. Najveća vrednost do koje možemo povećati x_1, a da x_2 ostane 0 i bazne promenljive x_3 i x_4 ostanu nenegativne je $x_1 = 2$, što dobijamo ako u prethodni sistem stavimo $x_2 = 0:$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_3 & = & 6 & - & 3x_1 & \geq & 0 \\ x_4 & = & 6 & - & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Onda je $x_3 = 0$ i novo bazno dopustivo rešenje je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 4)$$

za koje funkcija ima vrednost $z = 2$. Za nove bazne promenljive x_1 i x_4 je

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & = & 2 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 \\
x_4 & = & 4 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 \\
z & = & 2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_3
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & & & = & 2 \\
 & & \frac{8}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & + & x_4 & = & 4 \\
 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & & & = & -z+2
\end{array}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
x_4	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	4
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2

Ako bismo povećali vrednost x_3 onda bismo dobili manju vrednost funkcije. Ali, možemo da povećamo vrednost funkcije cilja povećavanjem vrednosti x_2. Najveća vrednost koju može da uzme x_2, a da bazne promenljive x_1 i x_4 ostanu nenegativne, je $x_2 = \frac{3}{2}$. Onda je novo dopustivo rešenje $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$, a vrednost funkcije cilja je $z = 3$. Tako smo dobili

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3}{8}x_3 & + & \frac{1}{8}x_4 \\
x_2 & = & \frac{3}{2} & + & \frac{1}{8}x_3 & - & \frac{3}{8}x_4 \\
z & = & 9 & - & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & & + & \frac{3}{8}x_3 & - & \frac{1}{8}x_4 & = & \frac{3}{2} \\
 & & x_2 & - & \frac{1}{8}x_3 & + & \frac{3}{8}x_4 & = & \frac{3}{2} \\
 & & & & \frac{2}{8}x_3 & + & \frac{2}{8}x_4 & = & -z+3
\end{array}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	3

Povećavanjem x_3 i x_4 funkcija cilja bi imala manju vrednost. Time zaključujemo da smo dobili optimalno rešenje.

Inicijalizacija

Neka je problem linearnog programiranja dat u matričnoj standardnoj formi:
Odrediti

$$\max_{x \in \mathcal{S}} c^T x$$

gde je $\mathcal{S}$ skup rešenja sistema:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

i postoji $j \in \{1, \ldots, m\}$ sa osobinom

$$b_j < 0.$$

U tom slučaju uobičajeni postupak formiranja polaznog bazno dopustivog rešenja ne može da se primeni, zato što dobijamo negativne vrednosti nekih pomenljivih.
Zato uvodimo pomoćni problem:
Odrediti

$$\max_{(x, x_0)} (-x_0)$$

ako je $\mathcal{S}'$ skup rešenja sistema

$$Ax - x_0[1\ 1\ \ldots\ 1]^T \leq b$$

$$x \geq 0, x_0 \geq 0$$

Lako je zaključiti da je $x \in \mathcal{S}$ ako i samo ako $(x, 0) \in \mathcal{S}'$. Ako postoji takvo dopustivo rečenje pomoćnog problema u kojem je $x_0 = 0$, onda je to sigurno i njegovo optimalno rešenje. Znači, $(x, 0) \in \mathcal{S}'$ ako i samo ako je $(x, 0)$ optimalno rešenje pomoćnog problema.

Time smo dobili da je $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ako i samo ako postoji optimalno rešenje pomoćnog problema u kojem je $x_0 = 0$.