Karakteristični primeri u $\mathbb{R}^2$

Primer 1 *Odrediti maksimalnu vrednost funkcije*

(a) $f(x, y) = x - 2y$,

(b) $g(x, y) = x + y$,

ako je

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & \leq & 5 \\ -3x & + & y & \leq & 1 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Rešenje.

(a) (jedinstveno rešenje)

Rečnik koji odgovara bazno dopustivom rešenju

$$(x, y, w_1, w_2) = (0, 0, 5, 1)$$

je sledećeg oblika:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & w_1 & & & = & 5 \\ -3x & + & y & + & & + & w_2 & = & 1 \\ -x & + & 2y & & & & & = & -z \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} w_1 & = & 5 & - & x & - & y \\ w_2 & = & 1 & + & 3x & - & y \\ z & = & & & x & - & 2y \end{array}$$

$$x, y, w_1, w_1 \geq 0$$

Simpleks tabela kojom predstavljamo dati rečnik je:

(0)	x	y	w_1	w_2	
w_1	$\boxed{1}$	1	1	0	5
w_2	-3	1	0	1	1
	-1	2	0	0	0

Kako je u funkciji cilja koeficijent uz x pozitivan, tj. u poslednjoj vrsti Simpleks tabele imamo negativnu vrednost u koloni koja odgovara promenljivoj

x, tu kolonu biramo za radnu. Ona pokazuje da ubacivanjem promenljive x medju bazne promenljive, dobijamo veću vrednost funkcije cilja.

Gornju granicu za x dobijamo biranjem vrste sa najmanjim količnikom izmedju vrednosti u poslednjoj koloni i odgovarajuće pozitivne vrednosti u radnoj koloni.

$$\begin{array}{r|cccc|c} (1) & x & y & w_1 & w_2 & \\ \hline x & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ w_2 & 0 & 4 & 3 & 1 & 16 \\ \hline & 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & - & y & - & w_1 \\ w_2 & = & 16 & - & 4y & - & 3w_1 \\ z & = & 5 & - & 3y & - & w_1 \end{array}$$

U poslednjoj vrsti nema negativnih vrednosti ispod promenljivih, tj. koeficijenti uz sve promenljive u funkciji cilja su pozitivni, što pokazuje da je dobijeno rešenje optimalno.

Optimalno rešenje je

$$\max_{x \in \mathcal{S}} f(x,y) = f(5,0) = 5$$

(b) (neodredjeno rešenje)

$$\begin{array}{r|cccc|c} (0) & x & y & w_1 & w_2 & \\ \hline w_1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 5 \\ w_2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} w_1 & = & 5 & - & x & - & y \\ w_2 & = & 1 & + & 3x & - & y \\ z & = & & & x & + & y \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc|c} (1) & x & y & w_1 & w_2 & \\ \hline x & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ w_2 & 0 & \boxed{4} & 3 & 1 & 16 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & - & y & - & w_1 \\ w_2 & = & 16 & - & 4y & - & w_1 \\ z & = & 5 & & & - & w_1 \end{array}$$

S obzirom da je u poslednjoj koloni ispod nebazne promenljive y vrednost 0, to znači da se vrednost funkcije z neće promeniti menjanjem vrednosti promenljive y. Na osnovu toga možemo zaključiti da ubacivanjem promenljive y u bazu dobijamo drugo bazno dopustivo rešenje sa istom vrednošću funkcije cilja.

$$\begin{array}{r|cccc|c} (2) & x & y & w_1 & w_2 & \\ \hline x & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ y & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & - & \frac{1}{4}w_1 & + & \frac{1}{4}w_2 \\ y & = & 4 & - & \frac{3}{4}w_1 & - & \frac{1}{4}w_2 \\ z & = & 5 & & & - & w_1 \end{array}$$

Znači, optimalno rešenje je

$$\max_{(x,y) \in \mathcal{S}} f(x,y) = f(x_A, y_A) = 5, (x_A, y_A) = t(0,5) + (1-t)(1,4), t \in [0,1].$$

Primer 2 *Odrediti maksimalnu vrednost funkcije* $f(x,y) = x + y$, *ako je*

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & \leq & 5 \\ -3x & + & y & \leq & 1 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Rešenje. (nema rešenja-funkcija neograničeno raste nad dopustivim skupom rešenja)

(0)	x	y	w_1	w_2	
w_1	-1	1	1	0	5
w_2	-3	1	0	1	1
	-1	-1	0	0	0

$$\begin{array}{rcrcrcl} w_1 & = & 5 & + & x & - & y \\ w_2 & = & 1 & + & 3x & - & y \\ z & = & & & x & + & y \end{array}$$

Vrednost funkcije raste ako raste vrednost promenljive x. Medjutim, ne postoji gornja granica za x, zato što su u radnoj koloni svi elementi matrice sistema negativni. Odatle možemo zaključiti da funkcija neograničeno raste nad dopustivim skupom rešenja.