# KOMPLEKSNI BROJEVI

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 2i$ i $z_2 = -4 + 5i$. Odrediti:

   (a) $z_1 + z_2$, (b) $z_1 - z_2$, (c) $z_1 \cdot z_2$, (d) $\dfrac{z_2}{z_1}$, (e) $\left|\overline{\dfrac{2z_1 + z_2 + 3 + i}{\overline{z_1^2} - z_2 - 2}} + \sqrt{3}\right|$.

   Rešenje:

   (a) $z_1 + z_2 = 2 - 2i + (-4 + 5i) = -2 + 3i$

   (b) $z_1 - z_2 = 2 - 2i - (-4 + 5i) = 6 - 7i$

   (c) $z_1 \cdot z_2 = 2 - 2i \cdot (-4 + 5i) = -8 + 10i + 8i - 10i^2 = -8 + 18i + 10 = 2 + 18i$

   (d) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{-4+5i}{2-2i} \cdot \dfrac{2+2i}{2+2i} = \dfrac{-8-8i+10i+10i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+2i}{8} = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4}i$

   (e) $\left|\overline{\dfrac{2z_1 + z_2 + 3 + i}{\overline{z_1^2} - z_2 - 2}} + \sqrt{3}\right| = \left|\overline{\dfrac{2(2-2i) + (-4+5i) + 3 + i}{\overline{(2-2i)^2} - (-4+5i) - 2}} + \sqrt{3}\right| = \left|\overline{\dfrac{3+2i}{\overline{-8i} + 2 - 5i}} + \sqrt{3}\right|$

   $= \left|\dfrac{3-2i}{2+3i} + \sqrt{3}\right| = \left|\dfrac{-13i}{13} + \sqrt{3}\right| = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

2. Odrediti kompleksan broj $z$ iz uslova

$$Im\{(3+i)\cdot\bar{z}\} - 2iRe\left\{\frac{z+2}{1-i}\right\} + |4-3i| = -2 + i,$$

   a zatim izračunati $\sqrt{z + 9 + 4i}$.

   Rešenje:

   Neka je $z = x + yi$. Tada imamo:

   $(3+i)\cdot\bar{z} = (3+i)\cdot(x - yi) = 3x - 3yi + xi + y = 3x + y + (x - 3y)i$,

   $\dfrac{z+2}{1-i} = \dfrac{x+yi+2}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{x+yi+2+xi-y+2i}{1+1} = \dfrac{x-y+2}{2} + \dfrac{x+y+2}{2}i$,

   $|4-3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

   Odavde je $x - 3y - 2i\cdot\frac{x-y+2}{2} + 5 = -2 + i$, pa se izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobija sistem jednačina $x - 3y + 5 = -2$ i $-(x - y + 2) = 1$, čije je rešenje $(x, y) = (-1, 2)$, odnosno traženi kompleksni broj je $z = -1 + 2i$.

   Neka je $\sqrt{z + 9 + 4i} = \sqrt{8 + 6i} = a + bi$. Tada je $8 + 6i = a^2 + 2abi - b^2$, pa se izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobija sistem $a^2 - b^2 = 8$ i $2ab = 6$. Zamenom $b = \frac{3}{a}$ u prvu jednačinu dobija se bikvadratna jednačina $a^4 - 8a^2 - 9 = 0$, čija su rešenja $a^2 = 9$ i $a^2 = -1$. Kako je $a \in \mathbb{R}$, $a^2 = -1$ nije moguće, pa su tražene vrednosti korena $z_1 = 3 + i$ i $z_2 = -3 - i$.

3. (a) Naći kompleksne brojeve $z_1$ i $z_2$ čiji je realan deo 1 i koji zadovoljavaju jednačinu:

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + 4\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 2.$$

   (b) Za $z_1$ i $z_2$ iz (a) naći kompleksni broj $z_3$ takav da trougao $z_1z_2z_3$ bude jednakokraki sa osnovicom $z_1z_2$, površine $3\sqrt{2}$. Koliko ima rešenja?

   Rešenje:

   (a) Zamenom $z = 1 + yi$ u datu jednačinu dobijamo

$$2 = \frac{1+yi}{1-yi} + \frac{1-yi}{1+yi} + 4\left(\frac{1}{1+yi} + \frac{1}{1-yi}\right) = \frac{(1+yi)^2 + (1-yi)^2}{1+y^2} + 4\cdot\frac{1-yi+1+yi}{1+y^2},$$

   a množenje ove jednakosti sa $1 + y^2$ daje $1 + 2yi - y^2 + 1 - 2yi - y^2 = 2(1 + y^2)$, odnosno $y^2 = 2$. Dakle, traženi kompleksni brojevi su $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ i $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

(b) Dužina osnovice $z_1z_2$ je $2\sqrt{2}$, pa kako je površina trougla $3\sqrt{2}$, sledi da je dužina visine na osnovicu 3. Tačke $z_1$ i $z_2$ su simetrične u odnosu na realnu osu, tako da vrh jednakokrakog trougla mora pripadati realnoj osi. Stoga postoje dva rešenja, $z_3 = 4$ ili $z_3 = -2$.

4. Predstaviti u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku kompleksne brojeve

$$z_1 = 1+\sqrt{3}i, \qquad z_2 = -2+2i, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,$$
$$z_5 = 3, \qquad z_6 = -\frac{2}{5}, \qquad z_7 = \frac{1}{2}i, \qquad z_8 = -8i,$$

a zatim izračunati: (1) $z_1 \cdot z_2$, (2) $\dfrac{z_4}{z_2}$, (3) ${z_3}^5$, (4) $\sqrt[3]{z_8}$.

Rešenje:

$z_1 = 1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad z_5 = 3 = 3e^{0i} = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

$z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $\qquad z_6 = -\frac{2}{5} = \frac{2}{5}e^{\pi i} = \frac{2}{5}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\frac{5\pi}{4}i} = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$ $\qquad z_7 = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i = e^{-\frac{\pi}{6}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad z_8 = -8i = 8e^{-\frac{\pi}{2}i} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

(1) $z_1\cdot z_2 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 4\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)i} = 4\sqrt{2}e^{\frac{13\pi}{12}i}$

(2) $\frac{z_4}{z_2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{6}i}}{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{11\pi}{12}i}$

(3) $z_3^5 = \left(e^{\frac{5\pi}{4}i}\right)^5 = e^{\frac{25\pi}{4}i} = e^{6\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

(4) $\sqrt[3]{z_8} = \sqrt[3]{8e^{-\frac{\pi}{2}i}} \in \left\{2e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i} : k\in\{0,1,2\}\right\} = \left\{2e^{-\frac{\pi}{6}i}, 2e^{\frac{\pi}{2}i}, 2e^{\frac{7\pi}{6}i}\right\} = \left\{\sqrt{3}-i, 2i, -\sqrt{3}-i\right\}$

5. Odrediti kompleksne brojeve $z_1$ i $z_2$ u algebarskom obliku ako je

$$z_1 = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{768}+\overline{(2-i)^3}-2i}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{17}}, \qquad (z_2+1)^3 = -27.$$

Rešenje:

(1) Kako je $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\pm\frac{\pi}{4}i}$, imamo

$$\begin{aligned} z_1 &= \left((e^{\frac{\pi}{4}i})^{768}+\overline{8-12i+6i^2-i^3}-2i\right)\cdot\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{-17} = \left(e^{\frac{768\pi}{4}i}+\overline{8-12i-6+i}-2i\right)\cdot e^{\frac{17\pi}{4}i}\\ &= \left(e^{192\pi i}+\overline{2-11i}-2i\right)\cdot e^{(4\pi+\frac{\pi}{4})i} = (1+2+11i-2i)\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = (3+9i)\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\ &= -3\sqrt{2}+6\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

(2) Pošto je $-27 = 27e^{\pi i}$, sledi

$$\begin{aligned} z_2 &= -1+\sqrt[3]{27e^{\pi i}} \in \left\{-1+3e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i} : k\in\{0,1,2\}\right\} = \left\{-1+3e^{\frac{\pi}{3}i}, -1+3e^{\pi i}, -1+3e^{\frac{5\pi}{3}i}\right\}\\ &= \left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{3\sqrt{3}}{2}i, -4, \tfrac{1}{2}-\tfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}. \end{aligned}$$

6. Jedno rešenje jednačine $\left(z-\sqrt{3}+2i\right)^6 = a$ je $z_1 = 2\sqrt{3}-i$. Odrediti $a$ i ostala rešenja ove jednačine.

Rešenje:

Kako je $z_1 = 2\sqrt{3}-i$ jedno rešenje date jednačine, imamo

$$a = \left(2\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+2i\right)^6 = \left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \left(2e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^6 = 2^6\cdot e^{\pi i} = -64.$$

Pošto je $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64e^{\pi i}} \in \left\{2e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}i} : k\in\{0,1,2,3,4,5\}\right\} = \left\{2e^{\frac{\pi}{6}i}, 2e^{\frac{\pi}{2}i}, 2e^{\frac{5\pi}{6}i}, 2e^{\frac{7\pi}{6}i}, 2e^{\frac{3\pi}{2}i}, 2e^{\frac{11\pi}{6}i}\right\}$ $= \left\{\sqrt{3}+i, 2i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, -2i, \sqrt{3}-i\right\}$, dobijamo $z \in \left\{2\sqrt{3}-i, \sqrt{3}, -i, -3i, \sqrt{3}-4i, 2\sqrt{3}-3i\right\}$.

7. Naći sve kompleksne brojeve $z$ koji zadovoljavaju uslov $z^4 = \overline{z}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} z^4 = \overline{z} \quad &\Leftrightarrow r^4 e^{4\varphi i} = re^{-\varphi i} \Leftrightarrow r^4 = r \wedge 4\varphi = -\varphi + 2k\pi \Leftrightarrow r(r-1)(r^2+r+1) = 0 \wedge \varphi = \tfrac{2k\pi}{5} \\ &\Leftrightarrow (r = 0 \vee r = 1) \wedge k \in \{0,1,2,3,4\} \Leftrightarrow (r = 0 \vee r = 1) \wedge \varphi \in \left\{0, \tfrac{2\pi}{5}, \tfrac{4\pi}{5}, \tfrac{6\pi}{5}, \tfrac{8\pi}{5}\right\} \\ &\Leftrightarrow z \in \left\{0, 1, e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{\frac{4\pi}{5}i}, e^{\frac{6\pi}{5}i}, e^{\frac{8\pi}{5}i}\right\} \end{aligned}$$

8. Koristeći stepenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku izračunati $\cos\dfrac{\pi}{8}$ i $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

Rešenje:

(1) Iz $\cos 2x + i\sin 2x = (\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x$, izjednačavanjem realnih delova dobijamo $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$. Odavde zamenom $x = \frac{\pi}{8}$ sledi $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, odnosno $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Pošto je $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, imamo $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$.

(2) Iz $\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x$, izjednačavanjem imaginarnih delova dobijamo

$$\begin{aligned} \sin 5x &= 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 5(1-\sin^2 x)^2\sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x. \end{aligned}$$

Odavde zamenom $x = \frac{\pi}{5}$ sledi $16\sin^5\frac{\pi}{5} - 20\sin^3\frac{\pi}{5} + 5\sin\frac{\pi}{5} = 0$, a kako je $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$, ova jednakost se svodi na $16\sin^4\frac{\pi}{5} - 20\sin^2\frac{\pi}{5} + 5 = 0$, što daje $\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$. Pošto je $\sin\frac{\pi}{5} > 0$, imamo $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ ili $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$. Funkcija sin je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ rastuća, pa važi $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{5} < \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, što znači da je $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

9. Dokazati identitete:

(a) $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$; (b) $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \sin^3 x &= \left(\tfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3 = \tfrac{1}{-8i}\left(e^{3xi} - 3e^{2xi}e^{-xi} + 3e^{xi}e^{-2xi} - e^{-3xi}\right) = \tfrac{i}{8}\left(e^{3xi} - e^{-3xi} - 3(e^{xi} - e^{-xi})\right) \\ &= \tfrac{i}{8}\left(2i\sin 3x - 3\cdot 2i\sin x\right) = -\tfrac{1}{4}\sin 3x + \tfrac{3}{4}\sin x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \cos^4 x &= \left(\tfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4 = \tfrac{1}{16}\left(e^{4xi} + 4e^{3xi}e^{-xi} + 6e^{2xi}e^{-2xi} + 4e^{xi}e^{-3xi} + e^{-4xi}\right) \\ &= \tfrac{1}{16}\left(e^{4xi} + e^{-4xi} + 4(e^{2xi} - e^{-2xi}) + 6\right) = \tfrac{1}{16}\left(2\cos 4x + 4\cdot 2\cos 2x + 6\right) \\ &= \tfrac{1}{8}\cos 4x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{3}{8}. \end{aligned}$$

10. U krugu čiji je centar $z_0 = -3 + 4i$ upisan je pravilan osmougao. Jedno teme je u tački $z_1 = -3 + 5i$. Odrediti ostala temena osmougla.

Rešenje:

S obzirom da su nam poznati centar i jedno teme pravilnog osmougla, sva preostala temena možemo dobiti rotacijom $z_1$ oko $z_0$ za odgovarajući ugao. Kako je centralni ugao pravilnog osmougla $\frac{\pi}{4}$, imamo

$$z_{k+1} = R_{z_0,\frac{k\pi}{4}}(z_1) = z_0 + (z_1 - z_0)\cdot e^{\frac{k\pi}{4}i} = -3 + 4i + i\cdot e^{\frac{k\pi}{4}i}, k = 1, 2, \ldots, 7.$$

Tražena temena su $z_2 = -\frac{6+\sqrt{2}}{2} + \frac{8+\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = -4 + 4i$, $z_4 = -\frac{6+\sqrt{2}}{2} + \frac{8-\sqrt{2}}{2}i$, $z_5 = -3 + 3i$, $z_6 = -\frac{6-\sqrt{2}}{2} + \frac{8-\sqrt{2}}{2}i$, $z_7 = -2 + 4i$, $z_8 = -\frac{6-\sqrt{2}}{2} + \frac{8+\sqrt{2}}{2}i$.

11. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = -2 + i$ i $z_3 = 4 - 3i$. Odrediti kompleksne brojeve $z_2$ i $z_4$ tako da u kompleksnoj ravni tačke $z_1$ i $z_3$ budu naspramna temena kvadrata $z_1z_2z_3z_4$.

REŠENJE:

Pošto imamo dva naspramna temena kvadrata, možemo odrediti centar kvadrata, tj. $z_0 = \frac{z_1+z_3}{2} = \frac{-2+i+4-3i}{2} = 1-i$. Preostala temena dobijamo rotacijom tačke $z_1$ oko centra za ugao $\frac{\pi}{2}$, odnosno $-\frac{\pi}{2}$,

$$z_{2,4} = R_{z_0,\pm\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = 1 - i + (-3+2i) \cdot (\pm i),$$

tako da je $z_2 = 1 - i + (-3+2i) \cdot i = -1 - 4i$ i $z_4 = 1 - i + (-3+2i) \cdot (-i) = 3 + 2i$.

12. Neka je $z_1 = 3 + 2i$ jedno teme kvadrata. Odrediti preostala temena $z_2, z_3, z_4$ ako se zna da $z_2$ leži na pozitivnom delu imaginarne ose, a $z_3$ je na realnoj osi.

REŠENJE:

Iz uslova zadatka imamo $z_2 = ai, a \in \mathbb{R}^+$ i $z_3 = b, b \in \mathbb{R}$. Takodje važi $z_3 = R_{z_2,-\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_2 + (z_1 - z_2) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$, pa sledi $b = ai + (3 + 2i - ai) \cdot (-i) = (2-a) + (a-3)i$. Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo sistem $2 - a = b$ i $a - 3 = 0$, čije je rešenje $(a, b) = (3, -1)$, tj. temena su $z_2 = 3i$ i $z_3 = -1$. Četvrto teme dobijamo iz činjenice da je $\overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{z_4z_3}$, odnosno $z_2 - z_1 = z_3 - z_4$, što daje $z_4 = z_3 - z_2 + z_1 = -1 - 3i + 3 + 2i = 2 - i$.

13. (a) Odrediti kompleksan broj $z$ ako je

$$Re\left(\frac{\overline{z}(2+i) - 5z}{1+i}\right) = -11, \qquad Im\left(\frac{\overline{z}(2+i) - 5z}{1+i}\right) = -18.$$

(b) Odrediti kompleksne brojeve $z_1$ i $z_2$ tako da je $z_1$ pozitivan realan broj, $z_2$ pripada trećem kvadrantu, a trougao $zz_1z_2$ je jednakostraničan stranice 5.

REŠENJE:

(a) Neka je $z = x + yi$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}(2+i) - 5z}{1+i} &= \frac{(x-yi)(2+i) - 5(x+yi)}{1+i} = \frac{-3x + y + xi - 7yi}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{-2x - 6y}{2} + \frac{4x - 8y}{2} i = (-x - 3y) + (2x - 4y)i\end{aligned}$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo sistem $-x - 3y = -11$ i $2x - 4y = -18$, čije je rešenje $(x, y) = (-1, 4)$, pa je traženi broj $z = -1 + 4i$.

(b) Neka je $z_1 = a \in \mathbb{R}^+$. Kako je stranica trougla dužine 5, imamo $5 = |z_1 - z| = |a + 1 - 4i| = \sqrt{(a+1)^2 + (-4)^2}$, odnosno $(a+1)^2 = 25 - 16 = 9$, a pošto je $a > 0$ jedino rešenje je $a = 2$, tj. $z_1 = 2$. Treće teme dobijamo rotacijom tačke $z$ oko $z_1$ za ugao $\frac{\pi}{3}$,
$z_2 = R_{z_1,\frac{\pi}{3}}(z) = z_1 + (z - z_1) \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = 2 + (-3 + 4i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1-4\sqrt{3}}{2} + \frac{4-3\sqrt{3}}{2}i$

14. Skicirati u kompleksnoj ravni sledeće skupove tačaka:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 4\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{3}, |z| \leq 3\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq Re(z) \leq 2, 1 \leq Im(z) \leq 3\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + i| = 2\}$.

REŠENJE:

(a) Kružni prsten ograničen centralnim kružnicama poluprečnika 1 i 4.

(b) Kružni isečak centralnog kruga poluprečnika 3 izmedju uglova $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{3}$.

(c) Pravougaonik ograničen pravama $x = -1, x = 2, y = 1$ i $y = 3$.

(d) Kružnica sa centrom $3 - i$ poluprečnika 2.