1 Funkcije više promenljivih

1. Neka je $f(x,y) = 5xy^3 + 2x^2 - xy$. Izračunati

   (a) $f(2,-1)$,

   (b) $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ i

   (c) $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$.

2. Rent-a-car naplaćuje za rentirani auto 18 evra dnevno i 1 evro za svakih 10 predjenih kilometara.

   (a) Napisati formulu za cenu f rentiranja auta, kao funkciju broja dana d i broja predjenih kilometara s. ($f = f(d,s)$)

   (b) Izračunati $f(4,100)$ i obrazložiti.

3. Neka je M suma na bankovnom računu nakon t godina od inicijalnog uloga od B evra. Ako se kamata od 5% godišnje pripisuje na godišnjem nivou, napisati formulu za $M = f(B,t)$.

4. Skicirati domen funkcije

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x+y-5}$,

   (b) $f(x,y) = \ln(9-x^2-y^2) + \sqrt{x^2+y^2-4}$,

   (c) $f(x,y) = \ln(xy)$,

   (d) $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$ i

   (e) $f(x,y) = \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{2x-y}$.

5. Odrediti domen funkcije

   (a) $f(x,y,z) = \ln(5-x-y-z)$ i

   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-36}$.

6. Skicirati nivo krive za funkcije:

   (a) $f(x,y) = 2x+3y$,

   (b) $f(x,y) = -x^2-y^2$,

   (c) $f(x,y) = x^2-y$ i

   (d) $f(x,y) = x^2-y^2$.

7. Nacrtati nivo krive funkcije $f(x,y) = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ koje prolaze kroz tačke $(1,3)$ i $(3,3\sqrt{3})$.

8. Skicirati geometrijko mesto skupova tačaka u $\mathbb{R}^3$:

   (a) $z = x^2+y^2$,

   (b) $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

(c) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

(d) $z^2 = x^2 + y^2$.

9. Odrediti prve i druge parcijalne izvode funkcije

   (a) $f(x, y) = \frac{2x}{3y}$,

   (b) $f(x, y) = e^{xy} + 14x$ i

   (c) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$.

10. Pokazati da je $u_x + u_y + u_z = 0$, ako je

$$u = (x - y)(y - z)(z - x).$$

11. Neka je $f(x, y) = 3x^2 + 5xy - 8y^5$.

   (a) Odrediti $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$ i f_{yy}.

   (b) Izračunati $f_x(5, 6)$.

   (c) Odrediti df i $d^2 f$.

12. (a) Neka je $f(z, y, z) = y^2 + z^2 - x$, gde je $x = \frac{1}{t-1}$, $y = 2t$ i $z = t^3 - 1$. Odrediti $\frac{df}{dt}$.

   (b) Neka je $z = x^2 - y^2$, gde je $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$. Odrediti $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ i $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

13. Neka je $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pokazati da važi identitet:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

14. Neka je $z = \sqrt[5]{x^2 + 2y^3}$.

   (a) Odrediti dz.

   (b) Odrediti $dz(4, 2)$.

   (c) Izračunati $dz(4, 2)$ ako je $\Delta x = -0.2$ i $\Delta y = 0.1$.

   (d) Izračunati približnu vrednost izraza $\sqrt[5]{(3.8)^2 + 2(2.1)^3}$.

15. Približno izračunati

   (a) $z = \sqrt{0.8 \cdot 4.9}$,

   (b) $z = 1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$,

   (c) $z = (0.97)^{1.05}$ i

   (d) $z = \sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$.

16. Ispitati da li postoji funkcija $f = f(x, y)$ čiji je totalni diferencijal

$$(8x^3y^3 + 5)dx + (6x^4y^2 + 8)dy.$$

17. Odrediti $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je funkcija $z = z(x, y)$ zadata implicitno:

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$,

    (b) $z \ln z = x + y^2$.

18. Odrediti stacionarne tačke funkcije z

    (a) $f(x, y, z) = x^2 - xz + y^3 + z$,

    (b) $f(x, y, z) = x^2 + \sin y + z^2$,

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$,

    (d) $z = 8xy^2 - xy^3 - 5x^3y$,

    (e) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xz - x + 8 = 0$.

19. Ispitati lokalne ekstremne vrednosti funkcije

    (a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$,

    (b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$,

    (c) $z = x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 4xy$,

    (d) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$

    (e) $u = x^2 - xz + y^3 + z$.

20. Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije

    (a) $f(x, y) = xy$, uz uslov $x + y = 1$

    (b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, uz uslov $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$,

    (c) $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$, uz uslov $x^2 + y^2 = 1$,

    (d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, uz uslov $x + y - z = 5$, (ili je -5?)

    (e) $f(x, y, z) = xy + yz$, uz uslov $x + y = 2, y + z = 2$

    (f) $f(x, y, z) = xy + yz$, uz uslov $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2$, $x, y, z > 0$.

21. Neka je $f(x, y) = x^2 + y^2$.

    (a) Odrediti gradijent funkcije f.

    (b) Odrediti gradijent funkcije f u tački $(3, 2)$.

    (c) Dati geometrijsku interpretaciju rezultata pod (b).

22. Odrediti tačku u kojoj je gradijent funckije $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ jednak $(1, -\frac{16}{9})$.

23. Dokazati da važe sledeće osobine:

    (a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$,

(b) $\nabla(cf) = c\nabla f$,

(c) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$.

24. Odrediti izvod funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ u prvacu $\vec{s}$ koji zaklapa ugao od $\frac{\pi}{3}$ sa x-osom.

25. Napisati jednačinu tangentne ravni na grafik funkcije $z = 2x^2 + 3y^2$ u tački $(-2, 1, z_0)$.

26. Odrediti vektor normale i jednačinu tangentne ravni na sferu $x^2+y^2+z^2 = 25$ u tački $(1, 4, z_0), z_0 > 0$.

27. Izračunati divergenciju $(\nabla \cdot \vec{F})$ i rotor $(\nabla \times \vec{F})$ vektorskog polja

$$\vec{F} = (2x - y^2, x^2 + 3z, 4y - z^2)$$

u tački $(1, 2, 3)$.