Grupoidi, polugrupe, grupe

1. Koji od sledećih uredjenih parova su grupoidi? Za te grupoide ispitati koje osobine imaju (komutativnost, asocijativnost, neutralni element):

(1) $(\mathbb{N}, +)$	(4) $(\mathbb{Z}, -)$	(7) $(\mathbb{R}, :)$	(10) $(\{-1, 0, 1\}, +)$
(2) $(\mathbb{N}, \cdot)$	(5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$	(8) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$	(11) $(\{f \mid f : A \to A\}, \circ)$
(3) $(\mathbb{N}, -)$	(6) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$	(9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$	

REŠENJE:

(1) $(\mathbb{N}, +)$ je komutativan i asocijativan grupoid, bez neutralnog elementa.
(2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ je komutativan i asocijativan grupoid, sa neutralnim elementom 1.
(3) $(\mathbb{N}, -)$ nije grupoid jer npr. $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$.
(4) $(\mathbb{Z}, -)$ je grupoid koji nije ni komutativan, ni asocijativan, niti ima neutralni element.
(5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je komutativan i asocijativan grupoid, sa neutralnim elementom 1.
(6) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$ nije grupoid jer npr. $2 : 5 \notin \mathbb{Z}$.
(7) $(\mathbb{R}, :)$ nije grupoid jer deljenje nulom nije definisano.
(8) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$ je grupoid koji nije ni komutativan, ni asocijativan, niti ima neutralni element.
(9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ je komutativan i asocijativan grupoid, sa neutralnim elementom 1.
(10) $(\{-1, 0, 1\}, +)$ nije grupoid jer npr. $1 + 1 = 2 \notin \{-1, 0, 1\}$.
(11) $(\{f \mid f : A \to A\}, \circ)$ je asocijativan grupoid sa neutralnim elementom 1_A, ali nije komutativan.

2. Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$, ako je $G = \{a, b, c\}$, a operacija $*$ je data tablicom:

$*$	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	b	c	b

REŠENJE: Operacija $*$ nije komutativna jer njena tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, a nije ni asocijativna jer važi: $a * (a * a) = a * c = a \neq b = c * a = (a * a) * a$. Neutralni element grupoida $(G, *)$ je b jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti i njegova kolona je jednaka graničnoj koloni.

3. Primeri podgrupoida

(a) Par - skup parnih (prirodnih) brojeva, Nep - skup neparnih (prirodnih) brojeva. $(Par, +)$ jeste podgrupoid od $(\mathbb{N}, +)$, a $(Nep, +)$ nije.
(b) $(\mathbb{N}, +)$ je podgrupoid od $(\mathbb{Z}, +)$ je podgrupoid od $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupoid od $(\mathbb{C}, +)$.
(c) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$

4. Naći sve podgrupoide grupoida $(G, *)$, ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom:

$*$	a	b	c	d
a	b	a	a	a
b	b	b	d	c
c	c	b	d	d
d	d	b	d	d

REŠENJE: Nosači podgrupoida su: $\{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}$ i G.

5. Dat je grupoid $S = (\{1,2,3,4\},*)$, gde je operacija $*$ definisana sa: $x*y = min\{x,y\}$.

(a) Dokazati da je S komutativan monoid, ali nije grupa.

(b) Naći sve podgrupoide grupoida S.

Rešenje:

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	4

(a) • asocijativnost:

$x*(y*z) = (x*y)*z = \min\{x,y,z\}$

• komutativnost:

tablica operacije $*$ je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

• neutralni element: 4

vrsta i kolona koje odgovaraju 4 jednake su sa graničnim.

(b) Svi neprazni podskupovi skupa $\{1,2,3,4\}$ su nosači podgrupoida.

6. Dat je grupoid $(G,\star)$ gde je $G = \{e,a,b,c\}$ i operacija $\star$ je definisana Kejlijevom tablicom. Dokazati da je $(G,\star)$ Abelova grupa.

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Klajnova grupa

• zatvorenost:

važi, jer su u tablici samo elementi iz G.

• asocijativnost:

treba ispitati asocijativni zakon za sve $x,y,z \in G$

npr. $a\star(b\star c) = a\star a = e$

$(a\star b)\star c = c\star c = e$ ...

• neutralni element: e

njegova vrsta i kolona se poklapaju sa graničnim.

• inverzni elementi: $e^{-1}=e$, $a^{-1}=a$, $b^{-1}=b$, $c^{-1}=c$

• komutativnost:

važi, jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

7. Neka je $G = \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$. Ispitati da li je $(G,*)$ grupa, gde je operacija $*$ definisana sa:

$$(\forall a,b \in G)\ a*b = a+b+ab.$$

Rešenje:

• zatvorenost:

$a,b\in G \Rightarrow a*b = a+b+ab \in \mathbb{Q}$

pretp. $a*b=-1$

$a+b+ab=-1$

$a(1+b) = -1-b$

$a = \frac{-(1+b)}{1+b} = -1,$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a\in G$.

Znači, $a,b\in G \Rightarrow a*b\in G$

• asocijativnost:

$a,b,c\in G$

$a*(b*c) = a*(b+c+bc)$

$= a+b+c+bc+a(b+c+bc)$

$= a+b+c+bc+ab+ac+abc$

$(a*b)*c = (a+b+ab)*c$

$= a+b+ab+c+(a+b+ab)\cdot c$

$= a+b+c+ab+ac+bc+abc$

$\Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

• neutralni element:

Ako je $e\in G$ neutralni element, tada za sve $a\in G$ važi $e*a=a$, tj.

$e+a+e\cdot a = a \Leftrightarrow e+ea=0$

$\Leftrightarrow e(1+a)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$ jer je $a\neq -1$

• inverzni elementi:

Da bi a^{-1} bio inverzni element za $a\in G$ mora da važi $a^{-1}*a=e$

$a^{-1}+a+a^{-1}\cdot a = 0 \Leftrightarrow a^{-1}(1+a) = -a$

$\Leftrightarrow a^{-1} = \frac{-a}{1+a}$

$a\neq -1 \Rightarrow a^{-1}\in\mathbb{Q}$

pretp. $-\frac{a}{1+a} = -1 \Leftrightarrow -a=-1-a$

$\Leftrightarrow 0=-1$ što je nemoguće

$\Rightarrow a^{-1} = -\frac{a}{1+a}\in G.$

• komutativnost:

$a,b\in G$

$a*b = a+b+ab$

$= b+a+ba = b*a$

8. Da li se date nepotpune Kejlijeve tablice mogu dopuniti do tablica grupovnih operacija?

(a)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a			
b		a	a

;

(b)

$\star$	e	a	b	c
e	e			
a	a			e
b	b	e		
c	c		e	

Rešenje:

(a) Kako u svakoj grupi $(G,\cdot)$ za sve $a,b\in G$ jednačine $a\cdot x=b$ i $y\cdot a=b$ imaju jedinstvena rešenja, u tablici grupovne operacije u svakoj vrsti i koloni svaki element se pojavljuje tačno jednom, tako da se gornja tablica ne može dopuniti jer se u 3. vrsti element a pojavljuje dva puta.

(b) Ako je $a^{-1}=b$ onda je $a\cdot b=b\cdot a=e$. Što znači da neutralni element u tablici grupovne operacije mora biti raspoređen simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu. U datoj tablici, neutralni element je e i mora biti $a\star c=c\star a=e$, ali onda bi se u 2. koloni e pojavljivao dva puta, što nije moguće.

9. Neki jednostavni primeri podgrupa:

(1) $(\mathbb{R},+)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C},+)$.

(2) $(\mathbb{Q},+)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R},+)$ i $(\mathbb{C},+)$.

(3) $(\mathbb{Z},+)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, i $(\mathbb{C},+)$.

(4) $(\mathbb{N},+)$ nije podgrupa od $(\mathbb{Z},+)$ jer nije grupa.

(5) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$.

(6) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ i $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$.

10. Naći podgrupe Klajnove grupe.

Rešenje:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Prema Lagranžovoj teoremi red podgrupe deli red grupe, pa podgrupe Klajnove grupe mogu imati 1, 2 ili 4 elementa, i to su $(\{e\},\cdot)$, $(\{e,a\},\cdot)$, $(\{e,b\},\cdot)$, $(\{e,c\},\cdot)$ i $(\{e,a,b,c\},\cdot)$

$\cdot$	e
e	e

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\cdot$	e	b
e	e	b
b	b	e

$\cdot$	e	c
e	e	c
c	c	e

11. Dokazati da je funkcija $f:\mathbb{Z}\to\{\top,\perp\}$, definisana sa

$$f(x)=\begin{cases}\top, & x \text{ je paran}\\ \perp, & x \text{ je neparan}\end{cases},$$

homomorfizam grupoida $(\mathbb{Z},\cdot)$ i $(\{\top,\perp\},\vee)$, ali nije homomorfizam grupoida $(\mathbb{Z},\cdot)$ i $(\{\top,\perp\},\wedge)$.

Rešenje: Da bi $f:(\mathbb{Z},\cdot)\to(\{\top,\perp\},\vee)$ bio homomorfizam treba da važi: $f(x\cdot y)=f(x)\vee f(y)$, za sve $x,y\in\mathbb{Z}$

$\cdot$	p	n
p	p	p
n	p	n

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Mogući su slučajevi:

1) x,y-parni $\Rightarrow$ $x\cdot y$-paran
$f(x\cdot y)=\top$
$f(x)\vee f(y)=\top\vee\top=\top$

2) x-paran, y-neparan $\Rightarrow$ $x\cdot y$-paran
$f(x\cdot y)=\top$
$f(x)\vee f(y)=\top\vee\perp=\top$

3) x-neparan, y-paran $\Rightarrow$ $x\cdot y$-paran
$f(x\cdot y)=\top$
$f(x)\vee f(y)=\perp\vee\top=\top$

4) x,y-neparni $\Rightarrow$ $x\cdot y$-neparan
$f(x\cdot y)=\perp$
$f(x)\vee f(y)=\perp\vee\perp=\perp$

U slučaju (2) imamo
$f(x\cdot y)=\top$
$f(x)\wedge f(y)=\top\wedge\perp=\perp$
$\Rightarrow$ f nije homomorfizam grupoida $(\mathbb{Z},\cdot)$ i $(\{\top,\perp\},\wedge)$

12. Da li je Klajnova grupa izomorfna sa $(\mathbb{Z}_4,+_4)$?

Rešenje:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Nisu izomorfne jer je u Klajnovoj grupi svaki element inverzan samom sebi, a u $\mathbb{Z}_4$ su 1 i 3 međusobno inverzni.

13. Sledeće permutacije napisati u obliku proizvoda disjunktnih ciklusa i proizvoda transpozicija:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 11 & 10 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} = (0\,3\,6\,9)\circ(1\,2\,5)\circ(4\,7\,11)\circ(8\,10)$
$= (0\,9)\circ(0\,6)\circ(0\,3)\circ(1\,5)\circ(1\,2)\circ(4\,11)\circ(4\,7)\circ(8\,10)$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 8 & 7 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (0\,4)\circ(1\,2\,5\,8\,3)\circ(6\,7\,9)$
$= (0\,4)\circ(1\,3)\circ(1\,8)\circ(1\,5)\circ(1\,2)\circ(6\,9)\circ(6\,7)$

14. Proizvod nedisjunktnih ciklusa napisati kao proizvod disjunktnih ciklusa:

(a) $(1352)\circ(510)\circ(453)\circ(0241) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (0\,1\,2\,3\,4)$

(b) $(0241)\circ(453)\circ(510)\circ(1352) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (0\,3)\circ(4\,5)$

15. Preko permutacija proveriti da li su sledeći uredjeni parovi grupe:

(a) $(A,\cdot)$, gde je $A=\{a,b,c,d\}$ i

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(b) $(B,*)$, gde je $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ i

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	1	6	2	5
4	4	5	6	1	3	2
5	5	6	2	3	1	4
6	6	1	5	2	4	3

Rešenje:

(a) $p_a = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ $p_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$

$p_c = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$ $p_d = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

Proveravamo da li je $(\{p_a,p_b,p_c,p_d\},\circ)$ grupa. Dobijamo tablicu:

$\circ$	p_a	p_b	p_c	p_d
p_a	p_a	p_b	p_c	p_d
p_b	p_b	p_a	p_d	p_c
p_c	p_c	p_d	p_a	p_b
p_d	p_d	p_c	p_b	p_a

- zatvorenost: važi
- asocijativnost: kompozicija preslikavanja je uvek asocijativna
- neutralni element: p_a
- inverzni elementi: $p_a^{-1}=p_a$
  $p_b^{-1}=p_b$
  $p_c^{-1}=p_c$
  $p_d^{-1}=p_d$

(b) $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Proveravamo da li je $(\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6\},\circ)$ grupa:

- zatvorenost

$p_3\circ p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \notin \{p_1,p_2,\dots,p_6\}$

Dakle, $(\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6\},\circ)$ nije grupa, pa ni $(B,*)$ nije grupa.

$f: \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p_a & p_b & p_c & p_d \end{pmatrix}$ je izomorfizam, $(p_x\circ p_y = p_{x\cdot y})$

pa kako je $(\{p_a,p_b,p_c,p_d\},\circ)$ grupa, sledi da je i $(A,\cdot)$ grupa.

Prsteni i polja

1. Neka je $R = \{a, b, c, d\}$ i neka su na R definisane Kejlijevim tablicama operacije $+$ i $\cdot$. Dokazati da je $R = (R, +, \cdot)$ prsten.

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

Rešenje:

(1) $(R,+)$ je Klajnova grupa

(2) $(R,\cdot)$

- zatvorenost: važi
- asocijativnost: $(\forall x,y,z\in R)\ x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$

za svako $t\in R$ važi $a\cdot t = c\cdot t = a$ i $b\cdot t = d\cdot t = t$

$$\left.\begin{array}{l} x\in\{a,c\} \Rightarrow x\cdot(y\cdot z) = a \text{ i } (x\cdot y)\cdot z = a\cdot z = a \\ x\in\{b,d\} \Rightarrow x\cdot(y\cdot z) = y\cdot z \text{ i } (x\cdot y)\cdot z = y\cdot z \end{array}\right\} \text{za sve } y,z\in R$$

$\Rightarrow (R,\cdot)$ je polugrupa

(3) distributivnost $\cdot$ prema $+$

(a) $(\forall x,y,z\in R)\ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

$x\in\{a,c\} \Rightarrow x\cdot(y+z) = a$

$\qquad x\cdot y + x\cdot z = a + a = a$

$x\in\{b,d\} \Rightarrow x\cdot(y+z) = y+z$ za sve $y,z\in R$

$\qquad x\cdot y + x\cdot z = y+z$

(b) $(\forall x,y,z)\ (y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x$

Treba proveriti jednakost za sve moguće trojke!

2. Neka je $R = \{a, b, c, d\}$. Dopuniti tablice operacija $+$ i $\cdot$, tako da struktura $R = (R, +, \cdot)$ bude prsten:

$+$	a	b	c	d
a				
b		a	d	c
c			a	
d				a

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b		b	a	
c		a	c	
d				

Rešenje:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	**a**	**d**	**c**
c	c	d	**a**	b
d	d	c	b	**a**

Na osnovu datih vrednosti u tablici, zaključujemo da neutralni element mora biti a, pa vrstu i kolonu elementa a popunjavamo tako da budu jednake graničnim.

Kako $(R,+)$ mora biti komutativno, date elemente u tablici zapisujemo simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu.

Na preostala dva mesta stavljamo element b jer bi se u protivnom u nekoj vrsti ili koloni ponavljali elementi što nije moguće u tablici grupovne operacije.

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	**b**	**a**	b
c	a	**a**	**c**	c
d	a	b	c	d

Neutralni element a u $(R,+)$ je nula u $(R,\cdot)$, pa su u njegovoj vrsti i koloni svi elementi jednaki a.

Preostala mesta popunjavamo tako da važi distributivnost $\cdot$ prema $+$.

$b\cdot d = b\cdot(b+c) = b\cdot b + b\cdot c = b + a = b$

$c\cdot d = c\cdot(b+c) = c\cdot b + c\cdot c = a + c = c$

$d\cdot b = (b+c)\cdot b = b\cdot b + c\cdot b = b + a = b$

$d\cdot c = (b+c)\cdot c = b\cdot c + c\cdot c = a + c = c$

$d\cdot d = d\cdot(b+c) = d\cdot b + d\cdot c = b + c = d$

3. Ispitati koje od sledećih uredjenih trojki su prsteni:

(1) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ (4) $(\mathbb{Q}^+,\cdot,+)$ (7) $(\mathbb{Z}_4,+_4,\cdot_4)$ (10) $(\{\top,\bot\},\Leftrightarrow,\Rightarrow)$

(2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ (5) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ (8) $(\mathcal{P}(A),\cup,\cap)$

(3) $(\mathbb{Z},\cdot,+)$ (6) $(\{0,1\},+,\cdot)$ (9) $(\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$

REŠENJE:

(1) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ nije prsten jer $(\mathbb{N},+)$ nije grupa (nema neutralni element).

(2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ jeste prsten.

(3) $(\mathbb{Z},\cdot,+)$ nije prsten jer $(\mathbb{Z},\cdot)$ nije grupa (nema inverzne elemente).

(4) $(\mathbb{Q}^+,\cdot,+)$ nije prsten jer $+$ nije distributivno prema $\cdot$.

(5) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ jeste prsten.

(6) $(\{0,1\},+,\cdot)$ nije prsten jer $(\{0,1\},+)$ nije grupoid.

(7) $(\mathbb{Z}_4,+_4,\cdot_4)$ jeste prsten.

(8) $(\mathcal{P}(A),\cup,\cap)$ nije prsten jer $(\mathcal{P}(A),\cup)$ nije grupa (nema inverzne elemente).

(9) $(\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$ jeste prsten.

(10) $(\{\top,\bot\},\Leftrightarrow,\Rightarrow)$ nije prsten jer $(\{\top,\bot\},\Rightarrow)$ nije polugrupa.

4. Ispitati koje od sledećih uredjenih trojki su polja:

(1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$; (2) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; (3) $(\mathbb{Z}_4,+_4,\cdot_4)$; (4) $(\mathbb{Z}_5,+_5,\cdot_5)$; (5) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$.

REŠENJE:

(1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ nije polje jer $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ nije grupa (nema inverzne elemente).

(2) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ jeste polje.

(3) $(\mathbb{Z}_4,+_4,\cdot_4)$ nije polje jer $(\mathbb{Z}_4\setminus\{0\},\cdot_4)$ nije grupoid.

(4) $(\mathbb{Z}_5,+_5,\cdot_5)$ jeste polje.

(5) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$ nije polje jer $(\mathbb{R}^+,+)$ nije grupa (nema neutralni element).

5. Na skupu $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ definisane su operacije, za sve $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2) \quad \text{i} \quad (a_1,a_2)\odot(b_1,b_2)=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2).$$

Dokazati da je uredjena trojka $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ prsten.

Rešenje:

(1) $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ je Abelova grupa

◦ zatvorenost:

$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow a_1+b_1,\ a_2+b_2\in\mathbb{R} \Rightarrow (a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$

◦ asocijativnost

$(a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2)\oplus(c_1,c_2)) = (a_1,a_2)\oplus(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$

$= (a_1+(b_1+c_1),\ a_2+(b_2+c_2))$

$= ((a_1+b_1)+c_1,\ (a_2+b_2)+c_2)$ [$(\mathbb{R},+)$ je asocijativna)

$= (a_1+b_1,\ a_2+b_2)\oplus(c_1,c_2)$

$= ((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2)$

- <u>komutativnost</u>:

$$(a_1; a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$
$$= (b_1+a_1, b_2+a_2) \quad [(\mathbb{R},+) \text{ je komutativna}]$$
$$= (b_1, b_2) \oplus (a_1, a_2)$$

- <u>neutralni element</u>: $(0,0)$

$$(a_1,a_2) \oplus (0,0) = (a_1+0, a_2+0) = (a_1, a_2) \quad [0 \text{ je neutr. elem. u } (\mathbb{R},+)]$$

- <u>inverzni elementi</u>:

$$-(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$$
$$(a_1+a_2) \oplus (-a_1, -a_2) = (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2)) = (0,0) \quad [-a \text{ je inverz za } a \text{ u } (\mathbb{R},+)]$$

(2) <u>$(\mathbb{R}^2, \odot)$ je polugrupa</u>

- <u>zatvorenost</u>:

$$(a_1,a_2), (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_1,a_2) \odot (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$$

- <u>asocijativnost</u>:

$$(a_1,a_2) \odot \big((b_1,b_2) \odot (c_1,c_2)\big) = (a_1,a_2) \odot (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2)$$
$$= \big(a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2)\big)$$
$$= \big((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2\big) \quad [(\mathbb{R},\cdot) \text{ je asocijativno})$$
$$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \odot (c_1, c_2)$$
$$= \big((a_1,a_2) \odot (b_1,b_2)\big) \odot (c_1,c_2)$$

- <u>komutativnost</u>:

$$(a_1, a_2) \odot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$
$$= (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2) \quad [(\mathbb{R},\cdot) \text{ je komutativno}]$$
$$= (b_1,b_2) \odot (a_1,a_2)$$

(3) <u>distributivnost $\odot$ prema $\oplus$</u>

$$(a_1,a_2) \odot \big((b_1,b_2) \oplus (c_1,c_2)\big) = (a_1,a_2) \odot (b_1+c_1, b_2+c_2)$$
$$= \big(a_1 \cdot (b_1+c_1), a_2 \cdot (b_2+c_2)\big)$$
$$= (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2) \quad \left[\begin{array}{l}\text{distr. } \cdot \text{ prema } + \\ \text{u } (\mathbb{R},+,\cdot)\end{array}\right]$$
$$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \oplus (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2)$$
$$= (a_1,a_2) \odot (b_1,b_2) \oplus (a_1,a_2) \odot (c_1,c_2)$$

<u>Napomena</u>: zbog komutativnosti $\odot$ važi i desna distributivnost.