Algebarske strukture

1. Naći sve podgrupoide grupoida $(G, \star)$, ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $\star$ je data tablicom:

$\star$	a	b	c	d
a	d	b	a	a
b	a	d	c	b
c	c	a	b	d
d	a	b	a	d

   a zatim ispitati koje osobine (komutativnost, asocijativnost, neutralni element, inverzni elementi) imaju ti podgrupoidi.

2. Za one od sledećih uredjenih parova koji su grupoidi ispitati koje osobine imaju (komutativnost, asocijativnost, neutralni element, inverzni elementi):

   (1) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$
   (2) $(\mathbb{Z}, +)$
   (3) $(\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$
   (4) $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
   (5) $(\{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$
   (6) $(\{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
   (7) $(\{-1, 1\}, \cdot)$
   (8) $(\{-2, -1, 0, 1, -2\}, \cdot)$
   (9) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
   (10) $([0, \infty), \cdot)$
   (11) $(\mathbb{C}, \cdot)$
   (12) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
   (13) $(\{1, -1, i, -i\}, +)$
   (14) $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$
   (15) $(\{ai \mid a \in \mathbb{R}\}, +)$
   (16) $(\{ai \mid a \in \mathbb{R}\}, \cdot)$
   (17) $(\{a + ai \mid a \in \mathbb{Z}\}, +)$
   (18) $(\mathbb{Z}_7, +_7)$
   (19) $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$
   (20) $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot_3)$
   (21) $(\mathcal{P}(A), \cap)$
   (22) $(\mathcal{P}(A), \setminus)$
   (23) $(\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$
   (24) $(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f \text{ je bijekcija}\}, \circ)$

3. Neka su

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

   Dokazati da je $(\{f, g, h\}, \circ)$ Abelova grupa.

4. Neka je $\triangle ABC$ jednakostraničan trougao u ravni α. Dokazati da je $(P, \circ)$ grupa, gde je P skup svih transformacija podudarnosti ravni α koje trougao $\triangle ABC$ preslikavaju u njega samog, a $\circ$ je kompozicija funkcija.

   Uputstvo: Svaka transformacija podudarnosti trougla $\triangle ABC$ je potpuno odredjena slikama tačaka A, B i C, pa je $P = \{\rho_0, \rho_{\frac{2\pi}{3}}, \rho_{\frac{4\pi}{3}}, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$, gde su ρ_α rotacije oko centra trougla za ugao α, a σ_X osne simetrija u odnosu na osu trougla koja sadrži tačku X, odnosno

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} \qquad \rho_{\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \qquad \rho_{\frac{4\pi}{3}} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$$

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \qquad \sigma_B = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \qquad \sigma_C = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

5. Dokazati da je $(A, *)$ grupa ako je $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\}$ i za sve $(a, b), (c, d) \in A$ operacija $*$ je definisana sa $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$.

6. Ispitati da li je $(\{a, b, c\}, +, \cdot)$ prsten, ako su operacije $+$ i $\cdot$ date tablicama:

$+$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$\cdot$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

7. Dopuniti tablice binarnih operacija $\oplus$ i $\odot$ skupa $A = \{a, b, c, d\}$ tako da $(A, \oplus, \odot)$ bude polje, a zatim navesti neutralne i inverzne elemente za obe operacije.

$\oplus$	a	b	c	d
a				
b				
c	b			
d			a	

$\odot$	a	b	c	d
a				
b				
c				
d			a	

8. Neka su na $R = \mathbb{R} \times \{1\} = \{(a, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ definisane sledeće binarne operacije:

$$\begin{aligned} (a, 1) \oplus (b, 1) &= (a + b, 1) \\ (a, 1) \otimes (b, 1) &= (ab + a + b, 1). \end{aligned}$$

Ispitati da li je:

(a) $(R, \oplus)$ Abelova grupa,

(b) $(R, \otimes)$ polugrupa i

(c) $(R, \oplus, \otimes)$ prsten.