Skupovi

1. Proveriti koje od sledećih jednakosti su tačne:

   (a) $\{1,2,1,3,2\} = \{1,2,3\}$

   (b) $(1,2,3) = (1,2,2,2,3,3)$

   (c) $\{1,2,3\} = (1,2,3)$

   (d) $(1,2,3,4) = (4,1,3,2)$

   (e) $[1,2,3] = \{1,2,3\}$

   (f) $[1,1,1,2,2,3,3,3,3] = \{1,1,1,2,2,3,3,3,3\}$

   (g) $[1,1,2,3,3,3,4] = [4,3,1,3,2,3,1]$

   (h) $[1,2]_{3,2} = \{1,2\}$

   (i) $[1,2]_{3,2} = (1,1,1,2,2)$

   Rešenje:

   Tačne su jednakosti (a), (e) i (g).

2. Za skupove $A, B, C \subseteq U$ dokazati da važi:

   (a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Rešenje:

   (a) $$\begin{aligned} x \in (A \cap B)' &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in A' \cup B'. \end{aligned}$$

   Koristili smo tautologiju: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

   (b) $$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

   Koristili smo tautologiju: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

3. Jedna grupa studenata je anketirana o tome da li su korisnici MTS, *Telenor* ili VIP mobilne mreže. MTS karticu imaju 23, *Telenor* karticu 22, a VIP karticu 17 studenata. Takodje je utvrdjeno da 8 studenata poseduje istovremeno MTS i *Telenor* karticu, 5 studenata MTS i VIP, a 7 studenata *Telenor* i VIP. Usluge sva tri mobilna operatera koriste 3 studenta. Odrediti broj anketiranih studenata ako je poznato da dvoje od njih ne poseduju mobilni telefon.

   Rešenje: Anketirano je 47 studenata.

Relacije

1. Ispitati koje od osobina (R, S, A, T) imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_5 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_8 = \emptyset$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_9 = A^2$$

Rešenje:

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	ρ_9
R	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
S	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
A	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
T	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

2. Dopuniti relacije iz prethodnog zadatka tako da budu refleksivne, simetrične, odnosno tranzitivne.

Rešenje:

$$\rho_1^R = \rho_1 \cup \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_1^S = \rho_1 \cup \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho_1^T = \rho_1 \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2^R = \rho_2 \cup \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_2^S = \rho_2 \quad \rho_2^T = \rho_2$$

$$\rho_3^R = \rho_\cup \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_3^S = \rho_3 \quad \rho_3^T = \rho_3$$

$$\rho_4^R = \rho_4 \cup \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_4^S = \rho_4 \cup \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho_4^T = \rho_4$$

$$\rho_5^R = \rho_5 \cup \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_5^S = \rho_5 \cup \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_5^T = \rho_5 \cup \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_6^R = \rho_6 \quad \rho_6^S = \rho_6 \cup \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho_6^T = \rho_6 \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_7^R = \rho_7 \quad \rho_7^S = \rho_7 \quad \rho_7^T = \rho_7$$

$$\rho_8^R = \rho_7 \quad \rho_8^S = \rho_7 \quad \rho_8^T = \rho_7$$

$$\rho_9^R = \rho_9 \quad \rho_9^S = \rho_9 \quad \rho_9^T = \rho_9$$

3. Na skupu A_i data je relacija ρ_i . Ispitati njene osobine:

$A_1 = \mathbb{Z},\ \rho_1 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $A_4 = \mathbb{N},\ \rho_4 = \{(x, y) \mid x + y \text{ je paran broj}\}$

$A_2 = \mathbb{Q},\ \rho_2 = \{(x, y) \mid x \cdot y = 0\}$ $\quad$ $A_5 = \mathbb{R},\ \rho_5 = \{(x, y) \mid x \cdot y > 0\}$

$A_3 = \{1\},\ \rho_3 = \{(1, 1)\}$

Rešenje:

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
R	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
S	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
A	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
T	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

4. Primeri relacije poretka:

   (a) $(\mathbb{N}, \leq)$ - gde je $\leq$ relacija "manje ili jednako". Jedini minimalni i najmanji element je 1, a najvećeg i maksimalnih elemenata nema.

   (b) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ - gde je $\subseteq$ relacija "biti podskup". Jedini minimalni i najmanji element je $\emptyset$, a jedini maksimalni i najveći element je A.

   (c) $(\mathbb{N}, |)$ - gde je $|$ relacija defnisana sa $m \mid n \Leftrightarrow (\exists k \in N) \;\; n = km$. Najmanji i jedini minimalni element je 1, a najvećeg i maksimalnih elemenata nema.

   (d) $(\mathbb{Z}, |)$ - nije uredjen skup jer relacija $|$ nije antisimetrična na $\mathbb{Z}$ (npr. $2 \mid -2$ i $-2 \mid 2$, ali $2 \neq -2$).

   (e) $(N \setminus \{1\}; |)$ - najmanjeg elementa nema, minimalni elementi su svi prosti brojevi, a najvećeg i maksimalnih elemenata nema.

5. Za date uredjene skupove (A, ρ) nacrtati Haseov dijagram, i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje):

   (a) $A = \mathbb{Z}$ i $\rho = \geq$;

   (b) $A = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$ i $\rho = \subseteq$;

   (c) $A = \{1,2,3,4\}$ i $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 4 & 6 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

   (e) $A = \{2,3,4,5,6,7,9,12,18,36\}$ i $\rho = |$;

   (f) $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1,3\}$ i $\rho = |$.

   Rešenje:

   (a) Ni minimalni, ni maksimalni, ni najmanji, ni najveći elementi ne postoje.

   (b) Minimalni elementi su $\{1,2\}$ i $\{2,3\}$, tako da najmanji element ne postoji, a jedinstveni maksimalni i najveći element je $\{1,2,3,4\}$.

   (c) Uredjeni skup (A, ρ) je antilanac, pa su svi elementi istovremeno i minimalni i maskimalni, a najmanji i najveći ne postoje.

   (d) Jedinstveni minimalni i najmanji element je 1, a maksimalni elementi su 5 i 6, te najveći ne postoji.

   (e) Minimalni elementi su 2,3,5,7, a maksimalni su 5,7,36. Najmanji i najveći element ne postoji.

   (f) Jedinstveni minimalni i najmanji element je 1, a jedinstveni maksimalni, ali ne i najveći element je 3.

6. Relaciju $\rho = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ dopuniti do relacije ekvivalencije σ na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, a zatim odrediti faktor skup $[A]_\sigma$.

   Rešenje: $\sigma = \rho \cup \left(\begin{array}{ccccc|cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$

   $[A]_\sigma = \{\{1,3,4,6\},\{2\},\{5,7\}\}$.

7. Naći relaciju ekvivalencije ρ na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ako je njen faktor skup $[A]_\rho = \{\{1,3,4\},\{5\},\{2,6\}\}$.

   Rešenje: $\rho = \left(\begin{array}{ccccccccc|c|cccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right)$

Funkcije

1. Za date skupove A i B, i date skupove $f_i \subseteq A \times B$ ispitati: da li su f_i funkcije iz skupa A u skup B, da li su injektivne i da li su sirjektivne funkcije iz A u B:

   $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$

   $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & a & b \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$ $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & b & b \end{pmatrix}$ $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & a \end{pmatrix}$

   Rešenje:

	$f_i : A \to B$	injektivna	sirjektivna
f_1	ne	/	/
f_2	ne	/	/
f_3	da	ne	ne
f_4	da	ne	da

2. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i neka su funkcije $f : A \to A$ i $g : A \to A$ definisane sa

   $$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Odrediti funkcije g^{-1}, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

   Rešenje:

   $$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

   $$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   $$g \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Za funkcije $f : R \to R$ i $g : R \to R$ definisane sa $f(x) = 1 - 3x$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$ naći funkcije f^{-1}, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

   Rešenje:

   $$f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{3}$$

   $$f \circ g(x) = f(g(x)) = 1 - 3 \cdot \frac{x^2 - 1}{3} = 2 - x^2$$

   $$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{(1 - 3x)^2 - 1}{3} = 3x^2 - 2x$$

   $$f \circ f(x) = f(f(x)) = 1 - 3 \cdot (1 - 3x) = 9x - 2$$

   $$g \circ g(x) = g(g(x)) = \frac{\left(\frac{x^2-1}{3}\right)^2 - 1}{3} = \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{27}$$