DISKRETNA MATEMATIKA

Jovanka Pantović
kabinet 610-VI
pantovic@uns.ac.rs
https://sites.google.com/view/jovanka-pantovic/

Radojka Ciganović
ciganovic.radojka@uns.ac.rs
kabinet 121 (blok F)
https://sites.google.com/site/radojkaciganovicftn/

Šta proučava diskretna matematika?

1. "Diskretna matematika je oblast matematike koja proučava strukture koje su u svojoj osnovi diskretne u smislu da ne podržavaju ili ne zahtevaju pojam kontinualnosti." (Wikipedia)

2. "Diskretna matematika je jezik računarstva - dobro razumevanje ove oblasti nepohodno je za: softversko inženjerstvo, mašinsko učenje, nauku o padacima,...." (Coursera)

Šta su osnovni ciljevi kursa?

Cilj predmeta jeste razvoj sledećih veština:

1. razumevanja matematičkog rezonovanja, kroz
    1. logiku,
    2. metode dokazivanja,
    3. matematičku indukciju
2. prepoznavanje i osobine diskretnih struktura, npr.
    1. kombinatornih objekata (izbori elemenata sa i bez ponavljanja,...)
    2. grafova, stabala,...
3. kombinatorne analize, kroz
    1. prebrojavanje kombinatornih objekata (kombinacije, permutacije, ...)
    2. nabrajanje kombinatornih objekata
4. algoritamskog rezonovanja, kroz
    1. specifikaciju algoritama
    2. verifikaciju korektnosti algoritama
5. primenu i matematičko modelovanje

Sadržaj predmeta

1. Kombinatorika
    1. osnovni principi prebrojavanja
    2. klasični kombinatorni objekti
    3. particije skupova, Stirlingovi brojevi 2. vrste
    4. rekurentne relacije
    5. generativne funkcije
2. Grafovi
    1. osnovni pojmovi teorije grafova, reprezentacija grafa
    2. povezanost, specijalne klase, izomorfizam grafova, operacije
    3. stabla
    4. planarni grafovi
    5. Ojlerovi i Hamiltonovi grafovi, Hamiltonove konture

Literatura

1. Jovanka Pantović, Skripte sa predavanja.
2. Radojka Ciganović, Skripte sa vežbi.
3. Kenneth Rosen, Discrete mathematics and its applications, Mc Graw Hill, 2012.
4. Eric Gossett, Discrete mathematics with proofs, Willey, 2009.
5. J. Matoušek, J. Nešetril, Invitation to discrete mathematics with proof, Oxford University Press, 2008.
6. J. A. Anderson, Diskretna matematika sa kombinatorikom, Prantice Hall, 2004. (prevod na srpski)
7. D. Stevanović, M. Ćirić, S. Simić, V. Baltić, Diskretna matematika i teorija grafova, 2007.

Način polaganja

1. Kombinatorika
   1. teorijski test 1: 15 bodova (kolokvijum+popravni)
   2. pismeni deo 1: 30 bodova
   3. usmeni deo 1: 5 bodova
2. Grafovi
   1. teorijski test 2: 15 bodova (kolokvijum+popravni)
   2. pismeni deo 2: 30 bodova
   3. usmeni deo 2: 5 bodova

PREDAVANJA $\#1$

Osnovni principi prebrojavanja

1. princip sume
2. princip proizvoda
3. Dirihleov princip
4. princip bijekcije

Ponavljanje - skup

- elementi su različiti
- nije važan redosled elemenata

Ponavljanje - multiskup

- elementi se mogu ponavljati
- nije važan redosled elemenata

Ponavljanje - uređena torka elemenata

- elementi se mogu ponavljati
- važan je redosled elemenata

Definicija

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2) &= \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} \\
(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) &= ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)
\end{aligned}
$$

Ponavljanje - skup, multiskup, torka

skup	multiskup	torka
$\{a, b\} = \{b, a\}$	$\{\{a, b\}\} = \{\{b, a\}\}$	$(a, b) \neq (b, a)$
$\{a, a, b\} = \{a, b\}$	$\{\{a, a, b\}\} \neq \{\{a, b\}\}$	$(a, a, b) \neq (a, b)$

Ponavljanje - skup, multiskup, torka

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \dots a_n = b_n$$

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 &= \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} \\ A_1 \times \cdot \ldots \times A_n &= \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, 1 \le i \le n\} \end{aligned}$$

Funkcije

Definition

Funkcija $f : A \to B$ skupa A u skup B je binarna relacija tj. podskup skupa $A \times B$ sa osobinom da se svaki element skupa A pojavljuje tačno jednom kao prva komponenta u toj relaciji.

Definition

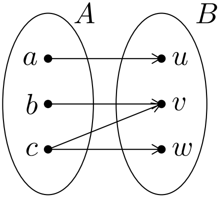
Neka je $f : A \to B$. Funkcija f je injektiva (“1-1") ako za svaka dva elementa $a \in A$ i $b \in A$ važi

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \quad (\Leftrightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

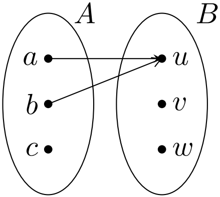
Definition

Neka je $f : A \to B$. Funkcija f je sirjektivna (“na") ako je $f(A) = B$ tj za svaki element $c \in B$ postoji $a \in A$ sa osobinom $f(a) = c$.

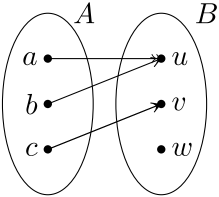
Funkcije



$\rho_1 = \{(a,u),(b,v),(c,v),(c,w)\}$



$\rho_2 = \{(a,u),(b,u)\}$

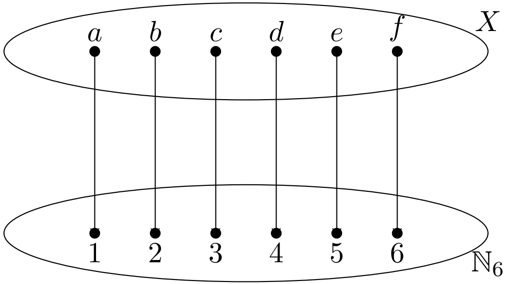


$f_3 = \{(a,u),(b,u),(c,v)\}$

Tema 1

Princip zbira

Šta znači prebrojati elemente konačnog skupa?



Šta znači prebrojati elemente konačnog skupa?

Za $n \in \mathbb{N}$, skup prvih n prirodnih brojeva (bez 0) je

$$\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$$

Prebrojavanje konačnog skupa X je određivanje broja n za koji postoji bijekcija

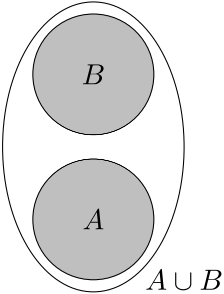
$$f : X \to \mathbb{N}_n.$$

Princip zbira za dva skupa

Lemma

Ako su A i B disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$



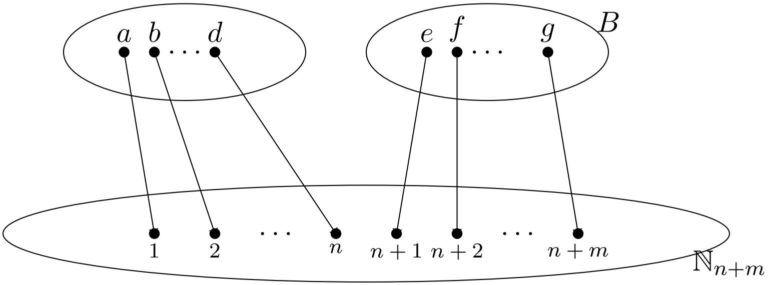
Princip zbira za dva skupa

Lemma

Ako su A i B disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Dokaz.



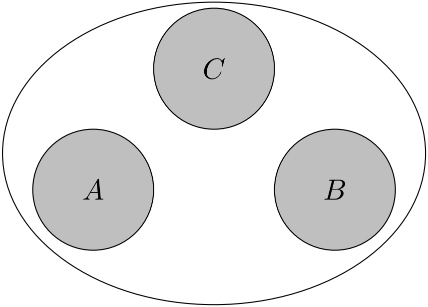
Princip zbira

Teorema (princip sume)

Neka je $n \geq 2$ *i* $A_1, \ldots, A_n$ *po parovima disjunktni konačni skupovi tj. za sve* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *sa osobinom* $i \neq j$ *važi* $A_i \cap A_j = \emptyset$. *Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

$n = 3$



$A \cup B \cup C$

Princip zbira

Teorema (princip sume)

Neka je $n \geq 2$ *i* $A_1, \ldots, A_n$ *po parovima disjunktni konačni skupovi tj. za sve* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *sa osobinom* $i \neq j$ *važi* $A_i \cap A_j = \emptyset$. *Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Dokaz (indukcijom po n)
<u>Baza $n = 2$:</u> Lema 6.
<u>ind.pp.</u> $T_n : |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots |A_n|.$
Dokazaćemo da tvrđenje važi za $n + 1$. Na osnovu Leme 6, imamo

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}|.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke dalje sledi

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|,$$

Posledica

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ *po parovima disjunktni skupovi i neka je* $|A_i| = m$ *za svako* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n \cdot m.$$

Zadatak

Dat je pseudo-kod

$$\begin{array}{ll}
(1) & \texttt{for}\ i = 1\ \texttt{to}\ n-1 \\
(2) & \quad \texttt{for}\ j = i+1\ \texttt{to}\ n \\
(3) & \qquad \texttt{if}\ (a[i] > a[j])\ \texttt{then} \\
(4) & \qquad\qquad \texttt{swap}\ a[i]\ \texttt{and}\ a[j];
\end{array}$$

Koliko puta će biti urađeno poređenje iz koraka (3)*?*

- svakom koraku (3) odgovara jedan par $(i, j) \in B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}$
- $B_i = \{i\} \times A_i$, $i = 1, \ldots, n-1$
- $A_i = \{i+1, \ldots, n\}, i = 1, .., n-1 \quad \Rightarrow \quad |A_i| = n - i.$

$$\begin{aligned}
|B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}| &= |B_1| + \ldots + |B_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| \\
&= (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Tema 2

Princip proizvoda

Princip proizvoda

Lema

Neka su A i B konačni skupovi. Broj elemenata skupa $A \times B$ jednak je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Primer.

$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

$$\begin{aligned} |A \times B| &= |\{(a,1), (a,2)\}| \\ &+ |\{(b,1), (b,2)\}| \\ &+ |\{(c,1), (c,2)\}| \\ &= 2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}$$

Princip proizvoda

Lema

Neka su A i B konačni skupovi. Broj elemenata skupa $A \times B$ jednak je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.
Tada je

$$|A \times B| = |\{(a,b) : a \in A, b \in B\}| = \left| \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B) \right|.$$

Kako za $a_i \neq a_j$ važi $(\{a_i\} \times B) \cap (\{a_j\} \times B) = \emptyset$, dalje sledi

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = \sum_{a \in A} |B| = |B| \sum_{a \in A} 1 = |A| \cdot |B|.$$

Princip proizvoda

Teorema (princip proizvoda)

Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Dokaz. (indukcijom po n)
Baza $n = 2$: Lema 10.
ind.pp: $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.
Dokazaćemo da tvrđenje važi za $n + 1$. Na osnovu Leme 10, imamo

$$|(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times \ldots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Prema induktivnoj pretpostavci, sada je

$$|A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Zadatak

Koliko ukupno ima petocifrenih brojeva?

Neka je A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ skup cifara koje mogu biti na poziciji i.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$$

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000.$$

Zadatak

Koliko ima različitih nizova bitova dužine 8?

Rešenje. Nizovi bitova dužine 8 su elementi Dekatovog stepena A^8 skupa $A = \{0, 1\}$. Kardinalnost tog skupa je

$$|A^8| = |A \times \ldots \times A| = |A|^8 = 2^8 = 256.$$

$\diamond$

Zadatak

Neka su $m_1, \ldots, m_n$ *prirodni brojevi. Dat je pseudo-kod*

$$\begin{array}{ll}
(1) & k = 0 \\
(1) & \texttt{for } i_1 = 1 \texttt{ to } m_1 \\
(2) & \quad \texttt{for } i_2 = 1 \texttt{ to } m_2 \\
(3) & \quad \ldots\ldots \\
(4) & \qquad\quad \texttt{for } i_n = 1 \texttt{ to } m_n \\
(5) & \qquad\qquad\qquad\qquad k := k + 1
\end{array}$$

Koliko je k *nakon izvršavanja datog koda?*

$A_{i_j} = \{1, \ldots, m_j\}$ $j \in \{1, \ldots, n\}$ - skup vrednosti koje uzima i_j

$$k = |A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}| = |A_{i_1}| \cdot |A_{i_2}| \ldots |A_{i_n}| = m_1 \cdot m_2 \ldots m_n.$$

Tema 3

Dirihleov princip

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

1624, Jean Leurechon
1834, Dirichlet

Theorem

Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > n$, onda postoji kutija u kojoj se nalaze bar dva objekta.

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

Theorem

Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > n$, onda postoji kutija u kojoj se nalaze bar dva objekta.

svođenje na apsurd (kontradikciju) = lat. reductio ad absurdum

Pretpostavimo suprotno, da u svakoj kutiji ima najviše jedan objekat. Tada je ukupan broj elemenata u kutijama jednak najviše n, što je u **kontradikciji** sa pretpostavkom da ima bar $n+1$ objekata.

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

Corollary

Neka je $|A| = m$, $|B| = n$ *i* $m > n$. *Ako je* f *funkcija skupa* A *u skup* B, *onda* f *nije* $1-1$.

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

Zadatak

Dokazati da za svaki prirodan broj n *postoji prirodan broj koji je deljiv sa* n *i zapisuje se samo pomoću cifara* 0 *i* 1.

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

Zadatak

Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj koji je deljiv sa n i zapisuje se samo pomoću cifara 0 i 1.

$$
\begin{aligned}
n = 1 : &\qquad 1 \\
n = 2 : &\qquad 10, 100, 110, ... \\
n = 3 : &\qquad 111, 1110, 1101, 1011, ... \\
n = 4 : &\qquad 100, 1000, 1100, ... \\
n = 5 : &\qquad 10, 100, ...
\end{aligned}
$$

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

Zadatak

Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj koji je deljiv sa n i zapisuje se samo pomoću cifara 0 i 1.

Posmatrajmo n brojeva zapisanih samo koristeći cifru 1 :

$$1 \qquad 11 \qquad 111 \qquad \dots \qquad \underbrace{11\dots1}_{n}.$$

Imamo dve mogućnosti:

(i) Ako je neki od posmatranih brojeva deljiv sa n, onda je dokaz završen.

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

Zadatak

Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj koji je deljiv sa n i zapisuje se samo pomoću cifara 0 i 1.

(ii) Svaki broj pri deljenju sa n daje ostatak iz skupa $\{1, \ldots, n-1\}$.

Prema Dirihleovom principu postoje (bar) dva broja koja imaju isti ostatak.
Neka su to brojevi sa m i l cifara, gde je $m \geq l$:

$$\underbrace{11\ldots1}_{m} = q_1 \cdot n + r \qquad \text{i} \qquad \underbrace{11\ldots1}_{l} = q_2 \cdot n + r$$

Tada je:

$$\underbrace{11\ldots1}_{m} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = q_1 \cdot n + r - (q_2 \cdot n + r) = q_1 \cdot n - q_2 \cdot n = (q_1 - q_2) \cdot n$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{m} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = \underbrace{11\ldots1}_{m-l}\underbrace{00\ldots0}_{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underbrace{11\ldots1}_{m-l}\underbrace{00\ldots0}_{l} = (q_1 - q_2) \cdot n}$$

Uopšteni Dirihleov princip

Theorem

Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > nq$, za neko q, onda postoji kutija u kojoj se nalazi bar $q+1$ objekata.

Proof.

Pretpostavimo suprotno, da u svakoj kutiji ima najviše q objekata.

Neka je su objekti u kutiji i označeni sa A_i.
Tada za broj objekata u kutijama važi

$$\begin{aligned} m &= \#objekata = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| \\ &\leq n \cdot q \\ &< m \end{aligned}$$

$$m < m \Leftrightarrow \perp$$

□

Primer

Ako 13 objekata treba smestiti u 5 kutija. Tada je

$$13 = 5 \cdot 2 + 3 \Rightarrow 13 > 5 \cdot 2$$

Možemo zaključiti da se u bar u jednoj kutiji nalaze bar 3 objekta.

Tema 4

Princip bijekcije

Princip bijekcije

Teorema (princip bijekcije)

Dva neprazna skupa imaju isti broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija izmedju njih.