DISKRETNA MATEMATIKA

Jovanka Pantović

Rekurentne relacije

Definicija

Neka je $\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *niz brojeva. Rekurentna relacija za niz* $\{a_n\}$ *je formula u kojoj se* n*-ti član niza definiše preko nekog podskupa od* $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

$$a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

Ako znamo $a_0, \ldots, a_{k-1}$, onda možemo da odredimo članove tog niza.

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Rekurentna relacija niza $\{a_n\}$ je linearna rekurentna relacija reda k sa konstantnim koeficijentima ako je oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n) \tag{1}$$

za neke konstante $c_1, \ldots, c_k$, i važi $k \geq 1$ i $c_k \neq 0$.

Ako je $f(n) = 0$ za svako $n \geq 0$, onda za relaciju (1) kažemo da je homogena.

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Karakteristična jednačina relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

je oblika

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Karakteristična jednačina relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

je oblika

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

Uvodimo smenu: $a_i = x^i, \quad i > k \quad (x \neq 0)$

$$\begin{aligned} x^n &= c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_k x^{n-k} \\ &= x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k) \end{aligned}$$

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Teorema

Ako karakteristična jednačina

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

ima k *po parovima različitih korena* $x_1, \ldots, x_k$, *onda je*

(i) *opšte rešenje date rekurentne relacije*

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots + \alpha_k x_k^n$$

(ii) *konstante* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *su jedinstveno određene početnim uslovima*

$$a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje: $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad\qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje: $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$
Početni problem:

$$\begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -2 \\ -2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -2 \\ & & 5\alpha_2 & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{9}{5} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{5} \end{array}$$

Rešenje rekurentne relacije: $a_n = -\frac{9}{5}(-2)^n - \frac{1}{5} \cdot 3^n$

Primer

Rekurentna relacija za Fibonačijev niz:

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Opšte rešenje:

$$f(n) = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Za $n = 0, 1$ sledi

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 & + & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = -\alpha_2 \left(= \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ -\alpha_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{array}$$

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Teorema

Ako karakteristična jednačina

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

ima korene $x_1, \ldots, x_l$ *redom višestrukosti* $k_1, \ldots, k_l$, *onda je*

(i) *opšte rešenje posmatrane rekurentne relacije*

$$\begin{aligned} a(n) \; = \; & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \ldots n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n + \\ & (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \ldots n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n + \\ & \ldots \\ & (\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \ldots n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x_l^n \end{aligned}$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = 2 \qquad\qquad a_1 = 1$$
$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \qquad\qquad a_1 = 1 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2$$

Opšte rešenje: $a(n) = (\alpha_1 + n\alpha_2) \cdot 2^n$
Početni problem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Rešenje rekurentne relacije: $a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

ako je $a_0 = 1, a_1 = -2$ *i* $a_2 = -1.$

Primer

Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

Primer

Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

$$x^3 = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow k = 3$$

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$$

Teorema

Ako je $a_n^{(p)}$ *partikularno rešenje nehomogene linerne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada je svako rešenje koje je oblika*

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

gde je $a_n^{(h)}$ *rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije.*

Primer

Odrediti sva rešenja rekurentne relacije

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n,$$

a zatim odrediti rešenje za koje je $a_1 = 3$.

Primer

Odrediti sva rešenja rekurentne relacije

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} + 7^n.$$

Linearne nehomogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Teorema

Neka je

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0) s^n, \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}.$$

Ako je s koren karakteristične jednačine višestrukosti l (ako nije koren $l = 0$), onda postoji partikularno rešenje oblika

$$a_p(n) = n^l (c_m n^m + c_{n-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0) s^n.$$

Primer

Odrediti oblik partikularnog rešenja linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$$

ako je

(i) $f(n) = 3^n$,

(ii) $f(n) = n3^n$,

(iii) $f(n) = n^2 2^n$,

(iv) $f(n) = (n^2 + 1)3^n$.