

# DISKRETNA MATEMATIKA

## - PREDAVANJE 5 -

Jovanka Pantović

Novi Sad

# Ponavljanje

## Definicija

*Neka je  $\{a_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  niz brojeva. Rekurentna relacija za niz  $\{a_n\}$  je formula u kojoj se  $n$ -ti član niza definiše preko nekog podskupa od  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ .*

$$a_n = F(a_{n-1}, \dots, a_{n-k})$$

Ako znamo  $a_0, \dots, a_{k-1}$ , onda možemo da odredimo članove tog niza.

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Rekurentna relacija niza  $\{a_n\}$  je linearna rekurentna relacija reda  $k$  sa konstantnim koeficijentima ako je oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n) \quad (1)$$

za neke konstante  $c_1, \dots, c_k$ , i važi  $k \geq 1$  i  $c_k \neq 0$ .

Ako je  $f(n) = 0$  za svako  $n \geq 0$ , onda za relaciju (1) kažemo da je homogena.

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Karakteristična jednačina relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

je oblika

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Karakteristična jednačina relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

je oblika

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

Uvodimo smenu:  $a_i = x^i$ ,  $i > k$  ( $x \neq 0$ )

$$\begin{aligned} x^n &= c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_k x^{n-k} \\ &= x^{n-k} (c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_k) \end{aligned}$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

## Teorema

*Ako karakteristična jednačina*

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \dots - c_{k-1}x - c_k = 0.$$

*ima  $k$  po parovima različitih korena  $x_1, \dots, x_k$ , onda je*

*(i) opšte rešenje date rekurentne relacije*

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \dots + \alpha_k x_k^n$$

*(ii) konstante  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  su jedinstveno određene početnim uslovima*

$$a(0) = a_0, \dots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

## Primer

*Rešiti rekurentnu relaciju*

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 & a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 6a_{n-2}, & n &\geq 2 \end{aligned}$$

## Primer

*Rešiti rekurentnu relaciju*

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 & a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 6a_{n-2}, & n &\geq 2 \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$



## Primer

*Rešiti rekurentnu relaciju*

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 & a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 6a_{n-2}, & n &\geq 2 \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje:  $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_23^n$

## Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 & a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 6a_{n-2}, & n &\geq 2 \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje:  $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$

Početni problem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= -2 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= -2 \\ 5\alpha_2 &= -1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{9}{5} \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Rešenje rekurentne relacije:  $a_n = -\frac{9}{5}(-2)^n - \frac{1}{5} \cdot 3^n$

## Primer

Rekurentna relacija za Fibonačijev niz:

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Opšte rešenje:

$$f(n) = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Za  $n = 0, 1$  sledi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2 \left( = \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ -\alpha_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned}$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

## Teorema

*Ako karakteristična jednačina*

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \dots - c_{k-1}x - c_k = 0.$$

*ima korene  $x_1, \dots, x_l$  redom višestrukosti  $k_1, \dots, k_l$ , onda je*

*(i) opšte rešenje posmatrane rekurentne relacije*

$$\begin{aligned} a(n) &= (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \dots n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n + \\ &\quad (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \dots n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n + \\ &\quad \dots \\ &\quad (\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \dots n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x_l^n \end{aligned}$$

## Primer

*Rešiti rekurentnu relaciju*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 & a_1 &= 1 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

## Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 & a_1 &= 1 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & n &\geq 2 \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2$$

Opšte rešenje:  $a(n) = (\alpha_1 + n\alpha_2) \cdot 2^n$

Početni problem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Rešenje rekurentne relacije:  $a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n$

## Primer

*Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je*

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

## Primer

*Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je*

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

$$x^3 = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow k = 3$$

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$$



# Generatorne funkcije nizova

$$\underbrace{(a_0, a_1, a_2, \dots)}_{\text{brojni niz}} \leftrightarrow \underbrace{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}_{\text{formalni stepeni red}}$$

## Definicija

*Generatorna funkcija brojnog niza  $\{a_n\}$  jeste stepeni red*

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$A(z)$  - zatvorena forma generatorne funkcije

# Generatorne funkcije nizova

Formalni stepeni red:

- konvergencija reda nije relevantna
- važne su operacije - sabiranje, množenje, izvodi, integrali

# Generatorne funkcije nizova

brojni niz	generatorna funkcija
$(0, 0, 0, \dots)$	$0$
$(1, 0, 0, \dots)$	$1$
$(3, 2, 1, 0, \dots)$	$3 + 2z + z^2$
$(1, 1, 1, \dots)$	$1 + z + z^2 + \dots$
$(1, -1, 1, -1, \dots)$	$1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

## Zatvorena forma generatorne funkcije

$$(1, 1, 1, \dots)$$

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + \dots) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$
$$-z - z^2 - z^3 - \dots$$

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + \dots) = 1$$

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

KONVERGENCIJA NIJE BITNA!!!

# Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \leftrightarrow A(z) \quad (b_0, b_1, b_2, \dots) \leftrightarrow B(z).$$

- skaliranje

$$(ca_0, ca_1, ca_2, \dots) \leftrightarrow cA(z)$$

- sabiranje

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = A(z) + B(z)$$

- desno pomeranje

$$\underbrace{(0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)}_k = z^k A(z)$$

# Operacije nad generatornim funkcijama

## Primer

*Napisati zatvorenu formu generatorne funkcije niza:*

- $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, 1, 1, 1, \dots)$

- $(1, 2, 2^2, 2^3, \dots)$

- $z^k + z^{k+1} + \dots = \sum_{n \geq k} z^n = \frac{z^k}{1-z}$

- $1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \dots = \frac{1}{1-2z}$

# Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \leftrightarrow A(z) \quad (b_0, b_1, b_2, \dots) \leftrightarrow B(z).$$

- množenje

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) z^n$$

## Primer

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^n 1 \cdot 1 \right) z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n \end{aligned}$$

# Rešavanje rekurentnih relacija

## Primer

$$h_0 = 0 \quad h_1 = 1 \quad h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

Neka je  $H(z) = \sum_{n \geq 0} h_n z^n$ .

$$\sum_{n \geq 1} h_n z^n = 2 \sum_{n \geq 1} h_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 1} z^n \Leftrightarrow (H(z) - h_0) = 2zH(z) + \sum_{n \geq 1} z^n$$

$$\Leftrightarrow H(z)(1 - 2z) = \frac{1}{1-z} - 1 \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)} - \frac{1}{1-2z}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n - \sum_{n \geq 0} z^n$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \sum_{n \geq 0} (2^n - 1)z^n \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_n = 2^n - 1}$$