DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE 5 -

Jovanka Pantović

Novi Sad, 8.11. 2017

Ponavljanje

Definicija

Neka je $\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *niz brojeva. Rekurentna relacija za niz* $\{a_n\}$ *je formula u kojoj se* n*-ti član niza definiše preko nekog podskupa od* $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

$$a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

Ako znamo $a_0, \ldots, a_{k-1}$, onda možemo da odredimo članove tog niza.

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Rekurentna relacija niza $\{a_n\}$ je linearna rekurentna relacija reda k sa konstantnim koeficijentima ako je oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n) \tag{1}$$

za neke konstante $c_1, \ldots, c_k$, i važi $k \geq 1$ i $c_k \neq 0$.

Ako je $f(n) = 0$ za svako $n \geq 0$, onda za relaciju (1) kažemo da je homogena.

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Karakteristična jednačina relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

je oblika

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Karakteristična jednačina relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

je oblika

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

Uvodimo smenu: $a_i = x^i, \quad i > k \quad (x \neq 0)$

$$\begin{aligned} x^n &= c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_k x^{n-k} \\ &= x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k) \end{aligned}$$

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Teorema

Ako karakteristična jednačina

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

ima k po parovima različitih korena $x_1, \ldots, x_k$, onda je

(i) *opšte rešenje date rekurentne relacije*

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots + \alpha_k x_k^n$$

(ii) *konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ su jedinstveno određene početnim uslovima*

$$a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad\qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad\qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad\qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje: $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -2 \qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje: $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$
Početni problem:

$$\begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -2 \\ -2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -2 \\ & & 5\alpha_2 & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{9}{5} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{5} \end{array}$$

Rešenje rekurentne relacije: $a_n = -\frac{9}{5}(-2)^n - \frac{1}{5} \cdot 3^n$

Primer

Rekurentna relacija za Fibonačijev niz:

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Opšte rešenje:

$$f(n) = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Za $n = 0, 1$ sledi

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 & + & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = -\alpha_2 \left(= \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ -\alpha_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{array}$$

Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Teorema

Ako karakteristična jednačina

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_{k-1}x - c_k = 0.$$

ima korene $x_1, \ldots, x_l$ *redom višestrukosti* $k_1, \ldots, k_l$, *onda je*

(i) *opšte rešenje posmatrane rekurentne relacije*

$$\begin{aligned} a(n) \quad = \quad & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \ldots n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n + \\ & (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \ldots n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n + \\ & \ldots \\ & (\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \ldots n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x_l^n \end{aligned}$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = 2 \qquad\qquad a_1 = 1$$
$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 1$$
$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2$$

Opšte rešenje: $a(n) = (\alpha_1 + n\alpha_2) \cdot 2^n$
Početni problem:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 2 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Rešenje rekurentne relacije: $a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n$

Primer

Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

Primer

Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

$$x^3 = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow k = 3$$

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$$

Generatorne funkcije nizova

$$\underbrace{(a_0, a_1, a_2, \dots)}_{\text{brojni niz}} \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{a_0 + a_1 z + z_2 z^2 + \dots}_{\text{formalni stepeni red}}$$

Definicija

Generatorna funkcija brojnog niza $\{a_n\}$ *jeste stepeni red*

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$A(z)$ - zatvorena forma generatorne funkcije

Generatorne funkcije nizova

Formalni stepeni red:

- konvergencija reda nije relevantna
- važne su operacije - sabiranje, množenje, izvodi, integrali

Generatorne funkcije nizova

brojni niz	generatorna funkcija
$(0, 0, 0, \ldots)$	0
$(1, 0, 0, \ldots)$	1
$(3, 2, 1, 0, \ldots)$	$3 + 2z + z^2$
$(1, 1, 1, \ldots)$	$1 + z + z^2 + \ldots$
$(1, -1, 1, -1 \ldots)$	$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$

Zatvorena forma generatorne funkcie

$$\boxed{(1,1,1,\ldots)}$$

$$\begin{array}{rcllllll}
(1-z)(1+z+z^2+\ldots) & = & 1 & +z & +z^2 & +z^3 & +\ldots \\
 & & & -z & -z^2 & -z^3 & -\ldots \\
(1-z)(1+z+z^2+\ldots) & = & 1 & & & &
\end{array}$$

$$\boxed{1+z+z^2+\ldots = \tfrac{1}{1-z}}$$

KONVERGENCIJA NIJE BITNA!!!

Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(z) \qquad (b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(z).$$

- skaliranje

$$(ca_0, ca_1, ca_2, \ldots) \leftrightarrow cA(z)$$

- sabiranje

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = A(z) + B(z)$$

- desno pomeranje

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_0, a_1, \ldots) = z^k A(z)$$

Operacije nad generatornim funkcijama

Primer

Napisati zatvorenu formu generatorne funkcije niza:

- $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 1, 1, \ldots)$
- $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots)$

- $z^k + z^{k+1} + \ldots = \sum_{n \geq k} z^n = \frac{z^k}{1-z}$
- $1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots = \frac{1}{1-2z}$

Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(z) \qquad (b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(z).$$

- množenje

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big) z^n$$

Primer

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot 1 \right) z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n \end{aligned}$$

Primer

$$h_0 = 0 \qquad h_1 = 1 \qquad h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

Neka je $H(z) = \sum\limits_{n \geq 0} h_n z^n$.

$$\sum_{n \geq 1} h_n z^n = 2 \sum_{n \geq 1} h_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 1} z^n \Leftrightarrow (H(z) - h_0) = 2zH(z) + \sum_{n \geq 1} z^n$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z)(1 - 2z) = \tfrac{1}{1-z} - 1 \Leftrightarrow H(z) = \tfrac{1}{(1-z)(1-2z)} - \tfrac{1}{1-2z}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \tfrac{1}{1-2z} - \tfrac{1}{1-z} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n - \sum_{n \geq 0} z^n$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \sum_{n \geq 0} (2^n - 1) z^n \qquad \Rightarrow \boxed{h_n = 2^n - 1}$$