

# DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE 6 -

Jovanka Pantović

Novi Sad, 15.11. 2017

# Izvod

## Definicija

Neka je  $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  generatorna funkcija niza  $a_n$ . Izvod, u oznaci  $A'(z)$ , definisan je sa

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

# Izvod

## Definicija

Neka je  $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  generatorna funkcija niza  $a_n$ . Izvod, u oznaci  $A'(z)$ , definisan je sa

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

## Primer

$$\frac{z}{(1-z)^2} =$$

# Izvod

## Definicija

Neka je  $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  generatorna funkcija niza  $a_n$ . Izvod, u oznaci  $A'(z)$ , definisan je sa

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

## Primer

$$\begin{aligned} \frac{z}{(1-z)^2} &= z \left( \frac{1}{1-z} \right)' = z \left( \sum_{n \geq 0} z^n \right)' = z \sum_{n \geq 0} (z^n)' \\ &= z \sum_{n \geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n z^n = \sum_{n \geq 0} n z^n \end{aligned}$$

# Uopšteni binomni koeficijenti

## Definicija

*Neka je  $u$  realan broj, a  $k$  nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent  $\binom{u}{k}$  je definisan sa*

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u \cdot (u-1) \cdot \dots \cdot (u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

# Uopšteni binomni koeficijenti

## Definicija

Neka je  $u$  realan broj, a  $k$  nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent  $\binom{u}{k}$  je definisan sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u \cdot (u-1) \cdot \dots \cdot (u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

## Primer

$$\binom{-n}{k} =$$

# Uopšteni binomni koeficijenti

## Definicija

Neka je  $u$  realan broj, a  $k$  nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent  $\binom{u}{k}$  je definisan sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u \cdot (u-1) \cdot \dots \cdot (u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

## Primer

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{-n \cdot (-n-1) \cdot (-n-2) \dots (-n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k n(n+1) \dots (n+k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \Rightarrow \binom{-1}{k} = (-1)^k \end{aligned}$$

# Njutnova binomna formula

## Teorema

*Neka je  $u$  proizvoljan realan broj. Tada je*

$$(1 + z)^u = \sum_{n \geq 0} \binom{u}{n} z^n.$$



# Njutnova binomna formula

Koristeći binomnu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$\frac{1}{1 - cz}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - cz} &= (1 - cz)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \binom{-1}{n} (-cz)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (-1)^n (cz)^n = \sum_{n \geq 0} (cz)^n\end{aligned}$$

## Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2) \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3) \frac{1}{(1-z)^3}.$$

## Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2) \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3) \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{-m}{n} (-z)^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n$$

# Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2) \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3) \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{-m}{n} (-z)^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n$$

$$(2) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+1}{n} z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$$

# Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2) \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3) \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$(1) \frac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{-m}{n} (-z)^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n$$

$$(2) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+1}{n} z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$$

$$(3) \frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{n} z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} z^n$$

## Zadatak

1 Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = -3$$

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad n \geq 1$$

2 Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 9$$

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

## Zadatak

*Kutija sadrži 20 crvenih, 30 zelenih i 40 plavih kuglica. Koliko ima različitih izbora od 60 kuglica?*

Traženi broj je jednak broju rešenja jednačine

$$i + j + k = 80 \quad i \in \{0, \dots, 20\}, j \in \{0, \dots, 30\}, k \in \{0, \dots, 40\}.$$

Ekvivalentno, taj broj je jednak koeficijentu uz  $x^{60}$  proizvoda

$$(1 + z + \dots + z^{20})(1 + z + \dots + z^{30})(1 + z + \dots + z^{40})$$

Primetimo da svaki član

$$z^i z^j z^k \quad i + j + k = 60$$

reprezentuje izbor od  $i$  crvenih,  $j$  zelenih i  $k$  plavih kuglica (u sumi od 60 kuglica).

$$\begin{aligned}
& \frac{1-z^{21}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{31}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{41}}{1-z} \\
= & \frac{1}{(1-z)^3} (1-z^{21})(1-z^{31})(1-z^{41}) \\
= & (1 + \binom{3}{2}z + \binom{4}{2}z^2 + \dots)(1 - z^{21} - z^{31} - z^{41} + z^{52} + z^{62} + z^{72} - z^{93}) \\
= & \binom{60+2}{2} - \binom{60-21+2}{2} - \binom{60-31+2}{2} - \binom{60-41+2}{2} + \binom{60-52+2}{2} \\
= & \dots
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = (1-z)^{-3} = \sum_{n \geq 0} \binom{-3}{n} (-1)^n z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} z^n$$



## Zadatak

Odrediti broj nenegativnih rešenje jednačine

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = n, n \geq 0.$$

Broj nenegativnih rešenje jednačine jednak je koeficijentu  $a_n$  uz  $z^n$  u razvoju proizvoda

$$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)^4$$

Neka je  $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{(1-z)^4} = \frac{1}{(1-z)^4} = \sum_{n \geq 0} \binom{4+n-1}{n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+3}{n} z^n. \end{aligned}$$

$$a_n = \binom{n+3}{n}$$

- 1 Napisati otvoreni oblik za  $\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z}$
- 2 Koristeći Njutnovu binomnu formulu, razviti sledeće zatvorene forme u otvoren oblik
  - 1  $(1 + \frac{1}{2}z)^{-5}$
  - 2  $\frac{1}{(1-2z)^4}$
- 3 Rešiti rekurentne relacije
  - 1  $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1}, n \geq 1,$
  - 2  $a_0 = 3, a_1 = -12, a_n = -5a_{n-1} + 36a_{n-1}, n \geq 2$
- 4 Koristeći generatorne funkcije, rešiti rekurentne relacije
  - 1  $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 7, n \geq 1,$
  - 2  $a_0 = 8, a_n = 24a_{n-1} - 144, n \geq 1,$
- 5 Odrediti zatvorene forme genratornih funkcija nizova
  - 1  $(-2, 2, -2, 2, \dots)$
  - 2  $(1, 2^3, 3^3, 4^3, \dots)$

- 1 Odrediti broj reči dužine  $n$  koje ne sadrže podreč 000.
- 2 Dat je neograničen broj crvenih, plavih i zelenih karata. Koliko ima načina da se formira stek od  $n$  karata, tako da zelena karta nikada nije direktno postavljena na zelenu kartu?