DISKRETNA MATEMATIKA

Jovanka Pantović

Novi Sad

Podgraf

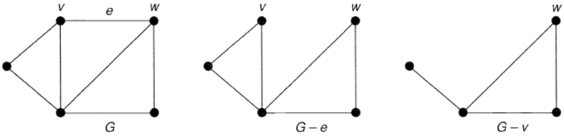
Definicija (podraf)

Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$.
Kažemo da je G_1 *podgraf grafa* G_2 *ako je* $V_1 \subseteq V_2$ *i* $E_1 \subseteq E_2$.

G_1 *je pokrivajući podgraf ako je* $V_1 = V_2$ *i* $E_1 \subseteq E_2$.

Operacije

1. $G_2 = G_2 - v$:
   $V_2 = V_1 \setminus \{v\}$ i $E_2 = E_1 \setminus \{\{u, w\} : v \in \{u, w\}\}$
2. $G_2 = G_1 - e$:
   $V_2 = V_1$ i $E_2 = E_1 \setminus \{e\}$



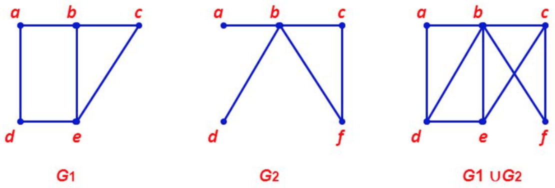
Operacije

1. $G = G_1 \cup G_2$:

   $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ i $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$
2. $G = G_1 \cap G_2$:

   $V(G) = V(G_1) \cap V(G_2)$ i $E(G) = E(G_1) \cap E(G_2)$
3. $G_1 = \bar{G}$:

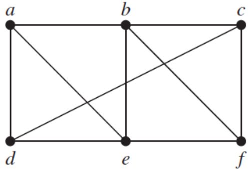
   $V(G_1) = V(G)$ i $E(G_1) = \{\{u, v\} : u, v \in V, \{u, v\} \notin E(G)\}$



Definicija

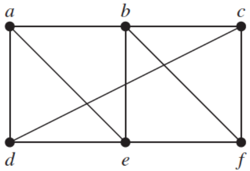
1. *Šetnja:* $v_0 v_1 \ldots v_n$ *(*$v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$*)*
2. *Staza:* $e_i \neq e_j, i \neq j$
3. *Put:* $v_i \neq v_j, i \neq j$ *(osim eventualno* $v_0 = v_n$*)*
4. *Kontura:* $v_0 = v_n$

šetnja: $abcfbad$
staza: $abcfbed$
zatvorena staza:$abcfbeda$
put: $abed$
kontura: $abeda$



Teorema

Ako u grafu postoji uv-šetnja (staza), onda postoji i uv-put.

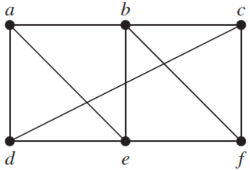


Povezanost

Definicija

Kažemo da su u i v povezani ako postoji uv-put u G.

Kažemo da je graf G povezan akko za svako $u, v \in V(G)$ važi da su u i v povezani.



Lema

Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.

Broj komponenti povezanosti grafa G, u oznaci $\omega(G)$, jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

Lemma

G *je povezan akko* $\omega(G) = 1.$

Teorema

Neka je $n \geq 2.$
Graf sa n *čvorova i manje od* $n-1$ *grana nije povezan.*

Dokaz: (indukcijom po n)

Teorema

Neka je G *povezan i neka je* C *kontura u* G. *Ako je* e *grana konture, onda je* $G - e$ *povezan.*

Dokaz:

Definition

Neka je G povezan graf. Rastojanje $d(u, v)$, između čvorova u i v je dužina najkraćeg puta od u do v.

- $d(u, v) \geq 0$
- $d(u, v) = 0$ akko $u = v$
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

Reprezentacija grafa

1. Neka je $G = (V, E)$ prost graf i $m = |V|$.
   Matrica susedstva $A(G) = [a_{ij}]_{m \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , ij \in E \\ 0 & , ij \notin E \end{cases}$$

2. Neka je $G = (V, E, \psi)$, $m = |V|$ i $|E| = n$.
   Matrica incidencije $M(G) = [a_{ie}]_{m \times n}$

$$a_{ie} = \begin{cases} 1 & , \text{čvor } i \text{ je incidentan sa granom } e \\ 0 & , \text{čvor } i \text{ nije incidentan sa granom } e \end{cases}$$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $V = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 1$, i neka je A matrica incidencije grafa G. Element a_{ij} u matrici A^k, $k \geq 1$, jednak je broju različitih ij-šetnji dužine k u tom grafu.

Proof.

(matematičkom indukcijom po n)

$n = 1$:

$T_{n-1} \Rightarrow T_n$: Označimo sa $a_{ij}^{(k)}$ elemente matrice A^k. Kako je $A^n = A \cdot A^{n-1}$, onda važi

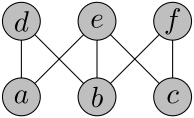
$$a_{ij}^{(n)} = a_{i1}a_{1j}^{(n-1)} + a_{i2}a_{2j}^{(n-1)} + \ldots + a_{in}a_{nj}^{(n-1)} \tag{1}$$

Prema induktivnoj pretpostavci, $a_{kj}^{(n-1)}$ je jednak broju šetnji dužine $n-1$ od čvora k do čvora j.

□

Zadatak

Koliko ima šetnji dužine 3 od a do d u grafu:



Matrice $A, A^2\ A^3$ su:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znači, postoje tačno 4 šetnje dužine 3 od čvora a do čvora d :

$$adbd, adad, aebd, aead$$

Posledica

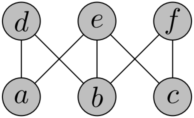
Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, *prost graf sa matricom susedstva* A. *Tada je* G *povezan akko* $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ *ima samo ne nula elemente.*

Posledica

$d(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{ij}^{(k)} \neq 0\}$.

zadatak

Za graf na slici odrediti $d(u,v)$, za sve $u,v \in \{a,b,c,d,e,f\}$



Na osnovu prethodne posledice, zaključujemo

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & u \in \{a,b,c\}, v \in \{d,e,f\} \\ 2 & u,v \in \{a,b,c\} \\ 2 & u,v \in \{d,e,f\} \end{cases}$$