DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE 8 -

Jovanka Pantović

Novi Sad, 06.12. 2017

Podgraf

Definicija (podraf)

Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$.
Kažemo da je G_1 *podgraf grafa* G_2 *ako je* $V_1 \subseteq V_2$ *i* $E_1 \subseteq E_2$.

G_1 *je pokrivajući podgraf ako je* $V_1 = V_2$ *i* $E_1 \subseteq E_2$.

Operacije

1. $G_2 = G_2 - v$:
   $V_2 = V_1 \setminus \{v\}$ i $E_2 = E_1 \setminus \{\{u, w\} : v \in \{u, w\}\}$
2. $G_2 = G_1 - e$:
   $V_2 = V_1$ i $E_2 = E_1 \setminus \{e\}$
3.
   1. $G = G_1 \cup G_2$:

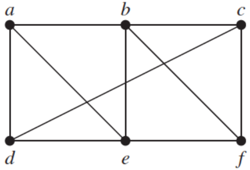
      $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ i $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$
   2. $G = G_1 \cap G_2$:

      $V(G) = V(G_1) \cap V(G_2)$ i $E(G) = E(G_1) \cap E(G_2)$
   3. $G_1 = \bar{G}$:

      $V(G_1) = V(G)$ i $E(G_1) = \{\{u, v\} : u, v \in V, \{u, v\} \notin E(G)\}$

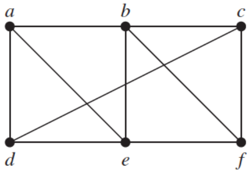
Definicija

1. *Šetnja:* $v_0e_1v_1e_2\dots e_nv_n$
2. *Staza:* $v_0e_1v_1e_2\dots e_nv_n$ *i* $e_i \neq e_j,\ i \neq j$
3. *Put:* $v_0e_1v_1e_2\dots e_nv_n$ *i* $v_i \neq v_j,\ i \neq j$
4. *Kontura:* $v_0e_1v_1e_2\dots e_nv_n$ *i* $v_0 = v_n$



Teorema

Ako u grafu postoji uv-šetnja (staza), onda postoji i uv-put.

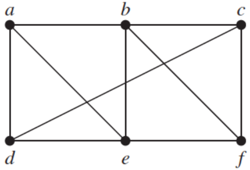


Povezanost

Definicija

Kažemo da su u i v povezani ako postoji uv-put u G.

Kažemo da je graf G povezan akko za svako $u, v \in V(G)$ važi da su u i v povezani.



Lema

Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.

Broj komponenti povezanosti grafa G, u oznaci $\omega(G)$, jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

Lemma

G *je povezan akko* $\omega(G) = 1$.

Teorema

Neka je $n \geq 2.$
Graf sa n *čvorova i manje od* $n-1$ *grana nije povezan.*

Dokaz: (indukcijom po n)

Teorema

Neka je G *povezan i neka je* C *kontura u* G*. Ako je* e *grana konture, onda je* $G-e$ *povezan.*

Dokaz:

Definicija

Neka je G povezan graf. Rastojanje $d_G(u,v)$, između čvorova u i v je dužina najkraćeg puta od u do v.

- $d_G(u,v) \geq 0$
- $d_G(u,v) = 0$ akko $u = v$
- $d_G(u,v) = d_G(v,u)$
- $d_G(u,v) + d_G(v,w) \geq d_G(u,w)$

Reprezentacija grafa

Neka je $G = (V, E)$ i $m = |V|$ i $|E| = n$.

1. Matrica susedstva
   $A(G) = [a_{ij}]_{m \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , ij \in E \\ 0 & , ij \notin E \end{cases}$$

2. Matrica incidencije $M(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, čvor } i \text{ je incidentan sa granom } j \\ 0 & \text{, čvor } i \text{ nije incidentan sa granom } j \end{cases}$$

Teorema

Element a_{ij} u matrici $(A(G))^k$, $k \geq 1$, jednak je broju različitih ij-šetnji dužine k.

Posledica

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, prost graf sa matricom susedstva A. Tada je G povezan akko $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ ima samo ne nula elemente.

Posledica

$d_G(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{ij}^{(k)} \neq 0\}$.