DISKRETNA MATEMATIKA

Jovanka Pantović

Stablo

STABLO = POVEZAN + ACIKLIČAN GRAF

Teorema

Svaka dva čvora stabla su povezana jedinstenim putem.

Dokaz:
Ako je T stablo, onda su svaka dva čvora povezana.
Neka su u, v proizvoljno izabrani čvorovi stabla T i $u \neq v$.
Pretpostavimo da postoje dva različita puta od u do v :

$$\begin{aligned} P &= uv_1 \dots u'v' \dots v_k v, k \geq 0 \\ Q &= uw_1 \dots w_l v, l > 0 \end{aligned}$$

pri čemu $u'v' \notin Q$.
Posmatrajmo podgraf $G' = P \cup Q - u'v'$ stabla T.
Postoji šetnja (a samim tim i put P'') od u' do v' u G' :
$P' = P(u', u) + Q(u, v) + P(v, v')$.
Tada je $P'' + u'v'$ kontura u T.

Teorema

Svako stablo sa bar dva čvora ima bar dva lista.

Dokaz:
Neka je

$$P = v_0 v_1 \dots v_l$$

put najveće dužine u stablu T.
Pokazaćemo kontradikcijom da su v_0 i v_l listovi. Pretpostavimo da v_0 nije list. Tada postoji čvor w sa osobinom $v_1 \neq w$ i $v_0 w$ je grana u T. Imsmo dve mogućnosti:

(i) Ako je $w = v_i$ za neko $i \in \{0, \dots, l\}$ onda je $v_0 \dots, v_i v_0$ kontura u T, što je nemoguće zato što je T stablo.

(ii) Ako je $w \neq v_i$ za svako $i \in \{0, \dots, l\}$, onda je $\omega v_0 v_1 \dots v_l$ put u stablu T veće dužine od P, što ponovo dovodi do kontradikcije.

Teorema

Svako stablo sa $n \geq 2$ čvorova ima $n-1$ granu.

Proof.

(indukcijom po n)
$n = 2:$ stablo sa 2 čvora ima jednu granu
$T_n \Rightarrow T_{n+1}:$
Pretpostavimo da stablo sa n čvorova ima $n-1$ granu.
Posmatrajmo stablo T sa $n+1$ čvorova i pokažimo da ima n grana.
Neka je u list u tom stablu i uv (jedina) grana incidentna sa u.
Tada $T' = T - u$ ima n čvorova.
Prema induktivnoj pretpostavci T' ima $n-1$ grana, odakle
$T = (V(T') \cup \{u\}, E(T') \cup \{uv\})$ ima n grana. $\square$

Lemma

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| \geq n$, *sa osobinom da su* $G_1, \ldots, G_l$ *njegove komponente povezanosti sa* $k_1, \ldots, k_l$ *čvorova, respektivno. Tada postoji* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *sa osobinom* $|E(G_i)| \geq k_i$.

Pp. suprotno,

$$\begin{aligned} n &\leq |E(G)| = |E(G_1)| + \ldots + |E(G_l)| \\ &< k_1 + \ldots k_l = n \end{aligned}$$

Teorema

Neka je G graf sa $n \geq 3$ čvorova i bar n grana. Tada G sadrži konturu.

Dokaz:

(i) G je povezan:
ako G nema konturu, onda je stablo $\Rightarrow$ G ima $n-1$ grana.

(ii) G nije povezan: neka su $G_1, \ldots, G_l$ komponente povezanosti grafa G sa osobinom

$$|V(G_1)| = k_1, \ldots, |V(G_l)| = k_l \qquad k_1 + \ldots + k_l = n.$$

Prema prethodnoj lemi, postoji komponenta povezanosit G_i za koju je $|E(G_i)| \geq k_i$. Ako G_i nema konturu, onda je G_i stablo, a samim tim ima $k_i - 1$ granu, što je kontradikcija.
Znači, komponenta G_i ima konturu, a to je ujedno i kontura u grafu$G$.

Karakterizacija stabla

Neka je $G = (V, E)$ graf i $|V| = n$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) G je stablo.

(ii) Za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji jedinstven put od u do v.

(iii) G je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf. (minimalan povezan)

(iv) G je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu. (maksimalan acikličan)

(v) G je povezan i $|E| = n - 1$.

(v) G je acikličan i $|E| = n - 1$.