DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE 9 -

Jovanka Pantović

Novi Sad, 13.12. 2017

Reprezentacija grafa

Neka je $G = (V, E)$ i $m = |V|$ i $|E| = n$.

1. Matrica susedstva
   $A(G) = [a_{ij}]_{m \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , ij \in E \\ 0 & , ij \notin E \end{cases}$$

2. Matrica incidencije $M(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, čvor } i \text{ je incidentan sa granom } j \\ 0 & \text{, čvor } i \text{ nije incidentan sa granom } j \end{cases}$$

Teorema

Element a_{ij} u matrici $(A(G))^k$, $k \geq 1$, jednak je broju različitih ij-šetnji dužine k.

Posledica

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, prost graf sa matricom susedstva A. Tada je G povezan akko $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ ima samo ne nula elemente.

Posledica

$d_G(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{ij}^{(k)} \neq 0\}.$

Stablo

STABLO = POVEZAN + ACIKLIČAN GRAF

Teorema

Svaka dva čvora stabla su povezana jedinstenim putem.

Teorema

Svaka dva čvora stabla su povezana jedinstenim putem.

Teorema

Svako stablo sa bar dva čvora ima bar dva lista.

Teorema

Svaka dva čvora stabla su povezana jedinstenim putem.

Teorema

Svako stablo sa bar dva čvora ima bar dva lista.

Teorema

Svako stablo sa n čvorova ima $n-1$ granu.

Teorema

Neka je G graf sa $n \geq 3$ čvorova i bar n grana. Tada G sadrži konturu.

Teorema

Neka je G graf sa $n \geq 3$ čvorova i bar n grana. Tada G sadrži konturu.

Dokaz:

(i) G je povezan:
ako G nema konturu, onda je stablo $\Rightarrow$ G ima $n-1$ grana.

(ii) G nije povezan: neka se $V(G_1), \ldots, V(G_l)$ komponente povezanosti grafa G.

$$|V(G_1)| = k_1, \ldots, |V(G_l)| = k_l \qquad k_1 + \ldots + k_l = n.$$

Lemma

Neka su $V(G_1), \dots V(G_l)$ *komponente povezanosti grafa* G, *sa* $k_1, \dots, k_l$ *čvorova, respektivno. Tada postoji* $i \in \{1, \dots, l\}$ *sa osobinom* $|E(G_i) \geq k_i$.

Lemma

Neka su $V(G_1), \ldots V(G_l)$ *komponente povezanosti grafa* G, *sa* $k_1, \ldots, k_l$ *čvorova, respektivno. Tada postoji* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *sa osobinom* $|E(G_i) \geq k_i$.

Pp. suprotno,

$$\begin{aligned} n &\leq |E(G)| = |E(G_1)| + \ldots + |E(G_l)| \\ &< k_1 + \ldots k_l = n \end{aligned}$$

Ako G_i nema konturu, onda je G_i stablo i ima $k_i - 1$ granu.

Karakterizacija stabla

Neka je $G = (V, E)$ graf. Sledeća tvrđenja sa ekvivalentna:

(i) G je stablo.

(ii) Za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ postoji jedinstven put od u do v.

(iii) G je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf. (minimalan povezan)

(iv) G je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu. (maksimalan acikličan)

(v) G je povezan i $|E(G)| = |V(G)| - 1$.