Diskretna matematika
Osnove teorije grafova i kombinatorike
PRVI TEST

Ime i prezime: ____________________
Broj indeksa: ____________________

Novi Sad, 2. 12. 2018

1. Koliko ima reči dužine 8 nad azbukom $\{0,1\}$ koje počinju sa 11 ili se završavaju sa 0?

Rešenje. Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\{0,1\}^8 : \text{ prve dve komponente su } 11 \text{ ili je poslednja komponenta } 0\} \\ A_1 &= \{\{0,1\}^8 : \text{ prve dve komponente su } 11\} \\ A_2 &= \{\{0,1\}^8 : \text{ poslednja komponenta je } 0\} \end{aligned}$$

Tada je $A = A_1 \cup A_2$ i $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Prema principu uključenja-isključenja imamo

$$|A| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = |\{0,1\}^6| + |\{0,1\}^7| - |\{0,1\}^5| = 2^6 + 2^7 - 2^5 = 160.$$

2. Napisati i dokazati Paskalov identitet.

Rešenje. Paskalov identitet: za svako $1 \leq m \leq n$ važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(m-1))!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m))!m!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} \\ &= \frac{m(n-1)! + (n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!} = \frac{(n-1)!(m+(n-m))}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

3. Koliko ima reči dužine 8 u kojima ima 5 nula i 3 jedinice?

Rešenje. Broj reči dužine 8 u kojima ima 5 nula i 3 jedinice jednak je broju permutacija sa ponavljanjem:

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56.$$

4. Rešiti rekurentnu relaciju $a_n = 3a_{n-1}$, $a_1 = 3$.

Rešenje.
Karakteristična jednačina je oblika $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Odatle je opšte rešenje $a_n = \alpha 3^n$. Za $a_1 = 3$ imamo $3 = \alpha 3^1$ tj. $\alpha = 1$ i rešenje rekurentne relacije je

$$a_n = 3^n, n \geq 1.$$

5. Napisati otvoreni oblik generatorne funkcije $\frac{1}{(1-z)^4}$.

Rešenje.
Izračunaćemo prvo uopšteni binomni koeficijent $\binom{-4}{n}$:

$$\begin{aligned} \binom{-4}{n} &= \frac{(-4)(-5)\dots(-4-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(n+3)\dots 5 \cdot 4}{n!} = (-1)^n \frac{(n+3)\dots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= (-1)^n \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = (-1)^n \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = (-1)^n \binom{n+3}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-z)^4} = (1-z)^{-4} = \sum_{n \geq 0} \binom{-4}{n} (-1)^n z^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+3}{3} (-1)^n z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+3}{3} z^n$$

6. ("usmeni") Koliko rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

nad skupom nenegativnih celih brojeva? Dokazati!

Broj rešenja jednačine je

$$\binom{n+m-1}{n-1} \text{ odnosno } \binom{n+m-1}{m}.$$

Dokaz. Posmatraćemo proizvod n formalnih redova $1+x+x^2+\ldots$. Pri tome ćemo smatrati da eksponenti u i-toj zagradi odgovaraju domenu za $x_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$:

$$(1+x+x^2\ldots)(1+x+x^2+\ldots)\ldots(1+x+x^2+\ldots) = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{l\geq 0}\binom{-n}{l}(-1)^l x^l.$$

Sa druge strane, proizvod tih redova u razvijenom obliku jednak je jednak zbiru sabiraka u kojima je svaki sabirak jednak proizvodu u kojem je iz iz svake zagrade izabran tačno jedan činilac:

$$(1+x+x^2\ldots)(1+x+x^2+\ldots)\ldots(1+x+x^2+\ldots) = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{\substack{x_i \geq 0 \\ 1 \leq i \leq n}} x^{x_1+\ldots+x_n}$$

Sada je

$$\sum_{\substack{x_i \geq 0 \\ 1 \leq i \leq n}} x^{x_1+\ldots+x_n} = \sum_{l\geq 0} a_l x^l \qquad a_l = \binom{-n}{l}(-1)^l$$

Ako izjednačimo koeficijent uz $l = m$ sa leve i desne strane dobijamo

$$x_1+\ldots+x_n = m \Leftrightarrow a_m = \binom{-n}{m}(-1)^m x^m = \binom{n+m-1}{m}.$$