Primenjeno softversko inženjerstvo
Diskretna matematika
PRVI KOLOKVIJUM - TEST

Ime i prezime: ____________________
Broj indeksa: ____________________

Novi Sad, 5. 6. 2020

1. **Izračunati** $\binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}3 \cdot 2^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}2 \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4$.

   Rešenje. Kada u binomnu formulu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

   zamenimo $n = 4$ i $x = 3$ i $y = 2$ dobijamo

$$\binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}3 \cdot 2^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}2 \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 3^k 2^{4-k} = (3+2)^4 = 5^4 = 625.$$

2. **Napisati razvijeni oblik stepena trinoma** $(1+x+x^2)^3 =$

   Rešenje.

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)^3 &= \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} 1^i x^j x^{2k} = \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} x^{j+2k} \\
&= \binom{3}{3,0,0} + \binom{3}{0,3,0}x^3 + \binom{3}{0,0,3}x^6 + \binom{3}{0,1,2}x^5 + \binom{3}{0,2,1}x^4 + \binom{3}{1,0,2}x^4 \\
&\quad + \binom{3}{1,2,0}x^2 + \binom{3}{2,0,1}x^2 + \binom{3}{2,1,0}x + \binom{3}{1,1,1}x^3 \\
&= 1 + x^3 + x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^4 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 6x^3 \\
&= x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1.
\end{aligned}$$

3. **Neka je** $A = \{1,2,3,4,5\}$ **i** $B = \{a,b,c\}$**. Odrediti broj injektivnih preslikavanja skupa** B **u skup** A.

   Rešenje. Broj injektivnih preslikavanja skupa B u skup A jednak je boju načina da se elementima skupa B pridruže, bez ponavljanja elemenata, elementi skupa A. Elementu a možemo pridružiti biko koji od 5 elemenata skupa A. Kada smo izabrali taj element, za b nam na raspolaganju ostane 5 elemenata, i na kraju za sliku elementa c ostaju 4 elementa. Tako je ukupan broj injektivnih preslikavanja skupa B u skup A jednak

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

4. **Odrediti broj razbijanja skupa** $\{a,b,c,d,e,f\}$ **na tri neprazna podskupa.**

   Rešenje. Broj razbijanja skupa $\{a,b,c,d,e,f\}$ na 3 neprazna podskupa odgovara Stirlingovom broju $S(6,3)$, koji ćemo dobiti iz tablice. Tablicu Stirlingovih brojeva druge vrste formiramo koristeći osobine

$$S(m,1) = 1 \quad S(m,m) = 1 \quad S(m,n) = S(m-1,n-1) + n \cdot S(m-1,n).$$

   Iz tablice

(m,n)	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

   možemo zaključiti da je $S(6,3) = 90$.

5. **Napisati rekurentnu relaciju koja opisuje broj reči dužine n nad azbukom $\{a, b, c\}$ koje ne sadrže podreč aaa.**

Rešenje. Neka je a_n broj reči dužine n nad azbukom $\{a, b, c\}$ koje ne sadrže podreč aaa. Inicijalne vrednosti su

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3^2 = 9 \qquad a_3 = 3^3 - 1 = 26.$$

Neka je $n \geq 4$. Svaka reč počinje sa a, b ili c:

(a) ako reč počinje sa b i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-1};

(b) ako reč počinje sa c i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-1};

(c) ako reč počinje sa a, onda ta reč počinje sa aa, ab ili ac:

   i. ako reč počine sa aa, onda ona počinje sa aaa, aab ili aac. Prva opcija otpada, zato što takva reč uvek sadrži aaa. U preostala dva slučaja:
      - ako reč počine sa aab i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-3};
      - ako reč počine sa aac i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-3};

   ii. ako reč počine sa ab i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-2};

   iii. ako reč počine sa ac, i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-2}.

Sada možemo zaključiti da je rekurentna relacija

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3}, n \geq 4, \qquad a_1 = 3 \qquad a_2 = 9 \qquad a_3 = 26.$$