Дискретна математика

Колоквијум I

1. Колико има парних троцифрених бројева код којих се цифре не понављају?

Решење: Разликујемо два случаја. Ако је последња цифра 0, за прву цифру имамо 9, а за другу 8 могућности. Ако последња цифра није 0, имамо 4 могућности за последњу цифру - 2,4,6 или 8. За прву цифру тада имамо 8 могућности (све сем 0 и цифре коју смо већ фиксирали), а за другу нам онда остаје још 8 цифара. Решење је $9 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 4$.

2. Доказати да за $m \geq 0$ и $n \geq 1$ важи $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$.

Решење:

$$\begin{aligned}\binom{m+n+1}{m+1} &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n}{m+1} = \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m+1} = \dots \\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m+2}{m} + \binom{m+2}{m+1} = \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m+2}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1} \\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m+2}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m}\end{aligned}$$

II начин: Индукција по n

3. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$ које ниједан непаран број не пресликавају у самог себе?

Решење: Обележимо

S_1- пермутације код којих је 1 на првом месту

S_2- пермутације код којих је 3 на трећем месту

S_3- пермутације код којих је 5 на петом месту

S_4- пермутације код којих је 7 на седмом месту

S_5- пермутације код којих је 9 на деветом месту.

Сада је

$$\begin{aligned}N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5') &= N - \binom{5}{1}N(1) + \binom{5}{2}N(2) - \binom{5}{3}N(3) + \binom{5}{4}N(4) - \binom{5}{5}N(5) \\ &= 10! - 5 \cdot 9! + \binom{5}{2}8! - \binom{5}{3}7! + 5 \cdot 6! - 5!.\end{aligned}$$

4. Решити систем рекурентних релација

$$\begin{aligned}2f_{n+1} + g_{n+1} &= f_n + 3g_n \\ f_{n+1} + g_{n+1} &= f_n + g_n,\end{aligned}$$

уз почетне услове $f_0 = 1, g_0 = 2$.

Решење: Одузимањем друге једначине од прве добијамо

$$f_{n+1} = 2g_n.$$

Убацивањем даље у другу једначину добија се

$$g_{n+1} + g_n - 2g_{n-1}.$$

Нуле карактеристичне једначине $t^2 + t - 2 = 0$ су $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$, па рекурентна релација има облик $g_n = A(-2)^n + B$. Пошто је $f_1 = 2g_0 = 4$, из друге једначине је $g_1 = f_0 + g_0 - f_1 = -1$, па добијамо систем

$$\begin{aligned}A + B &= 2 \\ -2A + B &= -1.\end{aligned}$$

Даље је $A = 1$ и $B = 1$, одакле је $g_n = (-2)^n + 1$. Сада је $f_n = 2g_{n-1} = (-1)^{n-1}2^n + 2$.